零感度制御に関する一考察

非会員 不破 勝彦* 正員 成清 辰生**

正員 神藤 久*

A Study on Zero Sensitive Control System

Katsuhiko Fuwa*, Non-member, Tatsuo Narikiyo**, Member, Hisashi Kando*, Member

Since system uncertainties are unavoidable in the modeling, control systems are generally required to be insensitive to these uncertainties. In this paper, the problem of control system design which is insensitive to these uncertainties is studied, and a structure of system uncertainties which do not affect the control performance is clarified.

キーワード：線形制御，不確かさ，不感，状態フィードバック

Keywords: linear control, system uncertainties, insensitive, state feedback

1. はじめに

制御対象のモデルは，実際の制御対象に対して何らかの不確かさを有する。不確かさの構造や性質が既知である場合，制御系がある条件を満足するもとで，ループゲインを大きくしなくても不確かさの存在が制御性能に全く影響を与えない，不確かさに対して不感な制御系が実現できる可能性がある。そのような制御系は零感度制御系と呼ばれ，これまでにいくつかの研究がなされている^{(1)~(4)}。零感度制御では理想的な制御性能が達成される分，制御対象の不確かさに何らかの制約条件が課せられ，一般にはそれらは非常に厳しいものであることが予想される。制御対象のパラメータや閉ループ極などに関連づけてその条件が明らかにされていなければ，本来零感度制御が達成される制御対象に対しても，制約の緩い別の制御方策を施すことで良好な制御性能を得る機会を失うことも考えられる。それゆえ，零感度制御が達成されるための条件を明らかにすることは，理論的な興味ばかりでなく実用上の有効性に対しても意義深いことと思われる。

本稿では，線形制御で2次安定化される制御対象の零感度制御系において，零感度制御が達成される不確かさのクラスを制御対象のパラメータ行列や配置する閉ループ極と関連づけて明らかにする。なお，本稿において I_n は n 次元単位行列， $O_{n \times m}$ は n 行 m 列の零行列， $\lambda(A)$ は行列 A の

固有値の集合， $\text{rank} A$ は行列 A の階数， $\text{b_diag}\{\cdot\}$ はブロック対角行列， $\text{diag}\{\cdot\}$ は対角行列である。

2. 問題の設定

つぎの状態方程式により記述される制御対象を考える。

$$\dot{x}(t) = \{A + D\Delta(t)E_a\}x(t) + \{B + D\Delta(t)E_b\}u(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし， $x(t), u(t)$ はおののおの n 次元状態変数， m 次元制御入力であり， $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, D \in R^{n \times r}, E_a \in R^{p \times n}, E_b \in R^{p \times m}, \text{rank} B = m, \text{rank}[E_a \ E_b] = \text{rank} E_b$ とし， $\|\Delta(t)\| < \gamma (\gamma \in R)$ ， (A, B) は可制御対， $x(t)$ は直接測定可能とする。このとき，状態フィードバック制御則

$$u(t) = -Kx(t), \quad K \in R^{m \times n} \quad \dots\dots\dots (2)$$

を(1)式に代入して閉ループ系

$$\dot{x}(t) = \{A - BK + D\Delta(t)(E_a - E_bK)\}x(t) \quad \dots\dots (3)$$

を得る。(3)式より， $E_a - E_bK = O_{p \times n}$ を満足するフィードバックゲイン行列 K が設計できれば， D および $\Delta(t)$ とは無関係に零感度制御系が構成される。ただし，設計された K により与えられた閉ループ極 $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ を有する制御系が構成されるか否かは不明である。この問題の解決は，構造的な不確かさを記述する行列 E_a, E_b に依存する。そこで，本稿ではつぎの問題を考える。

〔問題〕 与えられた閉ループ極を有する零感度制御系の E_a, E_b のクラスを求めよ。 □

3. 構造的な不確かさのクラス

$\lambda(A - BK) = \{\lambda_i \notin \lambda(A), i = 1, \dots, n\}$ とすると，文献(5)より $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ を配置する K の1つは

$$K = \Pi_k \bar{N}^{-1} \quad \dots\dots\dots (4)$$

* 名古屋工業大学

〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町

Nagoya Institute of Technology

Gokisocho, Showa-ku, Nagoya 466-8555

** 豊田工業大学

〒468-8511 名古屋市天白区久方2丁目12-1

Toyota Technological Institute

2-12-1, Hisakata, Tenpaku-ku, Nagoya 468-8511

により記述される。ただし

$$\bar{N} := [N_1 k_1 \cdots N_n k_n], \Pi_k := [k_1 \cdots k_n], \\ N_i := (A - \lambda_i I_n)^{-1} B$$

とし, $k_i (i = 1, \dots, n)$ は自由パラメータである。 $\bar{N}$ が正則行列であるとすれば, $E_a - E_b K = O_{p \times n}$ は

$$(E_a N_i - E_b) k_i = O_{p \times 1}, \quad i = 1, \dots, n \dots\dots (5)$$

と等価である。 $p < m$ であれば任意の λ_i に対して $k_i (\neq O_{m \times 1})$ が設計可能であり, $p \geq m$ であれば λ_i はシステム (A, B, E_a, E_b) の不変零点から与えられなければならないことが (5) 式よりわかる。しかしながら, この不変零点の中に希望する閉ループ極が存在するかどうかはわからない。それゆえ, 本稿では E_a, E_b が制御対象のパラメータ行列や希望する閉ループ極, そしてフィードバックゲイン行列の自由度とどのような関係になっているのかを明らかにする。このような解析は, 希望の閉ループ極を配置しつつ零感度制御を達成する意味において工学的な意義を有するものと思われる。

行列 $N_i (i = 1, \dots, n)$ は

$$N_i = -T^{-1} \bar{\Lambda}_i (A_a \bar{\Lambda}_i + \Lambda_{\nu_i})^{-1} \bar{b}, \quad i = 1, \dots, n \dots (6)$$

により記述される。ただし, $-A_a$ および $\bar{b}$ は行列 A, B を変換行列 T により可制御標準形に変換した行列 TAT^{-1}, TB に対して可制御指数 $\nu_j (j = 1, \dots, m)$ により ν_1 行, $\dots$, $\sum_{j=1}^m \nu_j (= n)$ 行目を取り出して並べた行列, そして

$$\bar{\Lambda}_i = \text{b_diag} \{ \Lambda_{i1}, \dots, \Lambda_{im} \}, \quad i = 1, \dots, n \\ \Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \cdots & \lambda_i^{\nu_j-1} \end{bmatrix}^T, \quad j = 1, \dots, m \\ \Lambda_{\nu_i} = \text{diag} \{ \lambda_i^{\nu_1}, \dots, \lambda_i^{\nu_m} \}, \quad i = 1, \dots, n$$

である。 $k_i (i = 1, \dots, n)$ を

$$k_i = \bar{b}^{-1} (A_a \bar{\Lambda}_i + \Lambda_{\nu_i}) \zeta_i, \quad i = 1, \dots, n \dots\dots (7)$$

とすると, (5) 式は

$$[E_a \ E_b] \begin{bmatrix} T^{-1} & O_{n \times m} \\ \bar{b}^{-1} A_a & \bar{b}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_i \\ \Lambda_{\nu_i} \end{bmatrix} \zeta_i = O_{p \times 1}, \quad i = 1, \dots, n \\ \dots\dots\dots (8)$$

となる。ゆえに, $\zeta_i \neq O_{m \times 1}$ とすれば

$$[E_a \ E_b] \begin{bmatrix} T^{-1} & O_{n \times m} \\ \bar{b}^{-1} A_a & \bar{b}^{-1} \end{bmatrix} = \tilde{\Xi}_i \begin{bmatrix} J_i & TB\bar{b}^{-1} \\ Z_i & O_{(m-1) \times m} \end{bmatrix}, \\ \exists \tilde{\Xi}_i, \quad i = 1, \dots, n \dots\dots\dots (9)$$

により (8) 式は記述される。ただし, $\tilde{\Xi}_i (i = 1, \dots, n)$ は p 行 $n + m$ 列の行列, $J_i (i = 1, \dots, n)$ は

$$J_i = \text{b_diag} \{ J_{\nu_1, i}, \dots, J_{\nu_m, i} \} \\ J_{\nu_j, i} = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda_i & 1 \\ & & & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad j = 1 \cdots, m$$

の n 次正方行列, $Z_i (i = 1, \dots, n)$ は

$$Z_i = [\zeta_{i1}^P \ O_{(m-1) \times (\nu_1-1)} \cdots \zeta_{im}^P \\ O_{(m-1) \times (\nu_m-1)}], \quad i = 1, \dots, n$$

であり, $\zeta_{ij}^P (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ は $\zeta_i^P \zeta_i = O_{(m-1) \times 1}$ を満足する $m-1$ 行 m 列の行列 ζ_i^P の第 j 列目を取り出した列ベクトルである。このとき

$$\text{rank} \begin{bmatrix} J_i & TB\bar{b}^{-1} \\ Z_i & O_{(m-1) \times m} \end{bmatrix} = n + m - 1, \quad i = 1, \dots, n$$

であるため, (9) 式は与えられた ζ_i に対する (8) 式の一般解を記述するものである。それゆえ

$$[\Xi_{i1} \ \Xi_{i2}] := \tilde{\Xi}_i \begin{bmatrix} T & O_{n \times (m-1)} \\ O_{(m-1) \times n} & I_{m-1} \end{bmatrix}$$

とすれば, E_a, E_b のクラスは, $i = 1, \dots, n$ に対して

$$[E_a \ E_b] \in \left\{ [\Xi_{i1} \ \Xi_{i2}] \begin{bmatrix} A - \lambda_i I_n & B \\ Z_i T & O_{(m-1) \times m} \end{bmatrix}, \exists \Xi_{i1}, \Xi_{i2} \right\} \\ \dots\dots\dots (10)$$

として得られる。零感度制御を達成する行列 $[E_a \ E_b]$ において, それを行ベクトルに分割したとき, その中の $m-1$ 個は構造に制約はなく, それ以外の行ベクトルは構造に制約が存在することが (10) 式よりわかる。

4. おわりに

本稿では, 零感度制御が達成される不確かさは制御対象のパラメータ行列や配置する閉ループ極, とくに多入力系の場合状態フィードバックゲイン行列の自由パラメータとも関連することを明らかにした。なお, 本研究は, 文部科学省科学研究費補助金 (基盤研究 B, 課題番号 19360110) の助成による。ここに記して謝意を表します。

(平成 21 年 2 月 28 日受付, 平成 21 年 6 月 30 日再受付)

文 献

- (1) T. Mita and K. Hasegawa: "Zeroing and the Design of a Zero-Sensitive System", *T. IEE Japan*, Vol.95-C, No.10, pp.245-252 (1975-10) (in Japanese)
美多 勉・長谷川健介:「Zeroing と零感度系の設計」, 電学論 C, **95**, 10, pp.245-252 (1975-10)
- (2) T. Mita: "On maximal unobservable subspace, zeros and their applications", *International Journal of Control*, Vol.25, No.6, pp.885-899 (1977-6)
- (3) Y. W. Tsai, K. K. Shyu, and K. C. Chang: "Decentralized variable structure control for mismatched uncertain large-scale systems: a new approach", *Systems & Control Letters*, Vol.43, No.15, pp.117-125 (2001-6)
- (4) K. Fuwa, T. Narikiyo, and H. Kando: "A Synthesis Method of Zero Sensitive Observer", *IEEJ Trans. EIS*, Vol.127, No.12, pp.2033-2041 (2007-12) (in Japanese)
不破勝彦・成清辰生・神藤 久:「零感度状態推定器の一構成法」, 電学論 C, **127**, 12, pp.2033-2041 (2007-12)
- (5) H. Hikita, S. Koyama, and R. Miura: "The Redundancy of Feedback Gain Matrix and the Derivative of Low Feedback Gain Matrix in Pole Assignment", *T. SICE*, Vol.11, No.5, pp.556-560 (1975-5) (in Japanese)
疋田弘光・小山昭一・三浦良一:「極配置問題におけるフィードバックゲインの自由度と低ゲインの導出」, 計測自動制御学会論文集, **11**, 5, pp.556-560 (1975-5)