A Fast Hough Transform Based on a Sine-Three-Term-Recurrence

Munetoshi Numada Non-member (Lossev Technology, m-numada@lossev.co.jp)

Hiroyasu Koshimizu Senior Member (Chukyo university, hiroyasu@sist.chukyo-u.ac.jp)

Keywords : line detection, Hough transform, three-term-recurrence, shift operation

The Hough transform (Eq. (1)) is an important method for pattern recognition that allows a line to be detected from the edge points of an image⁽¹⁾. In the attempt to achieve a faster Hough transform, it is found most practical to increase the efficiency of both the trigonometric function that forms the basic computational unit, and multiplication. For this reason, Koshimizu et al. proposed a method “Fast Incremental Hough Transform 2 (FIHT2)” that enables one point to be generated on the curve by a single operation of multiplication⁽²⁾. To be more specific, this is actually a method for determining a Hough curve approximatively and incrementally using a simultaneous recurrence formula. However, it has a problem that a significant approximation error occurs. Therefore, a method for making this recurrence formula more accurate was then proposed, which resulted in more or less doubling the computation cost in software processing. With this shortcoming taken into consideration, this paper proposes a method “FIHT3” (Eq.(2)) that generates an accurate Hough curve using an STTR (Sine-Three-Term-Recurrence).

$$\left. \begin{aligned} \rho_n &= x \cdot \cos \theta_n + y \cdot \sin \theta_n \\ \rho'_n &= -x \cdot \sin \theta_n + y \cdot \cos \theta_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n+2} &= \rho_n + c \cdot \rho'_{n+1} \\ \rho'_{n+2} &= \rho'_n - c \cdot \rho_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{※ } c = 2\sin\Delta\theta$$

As with the FIHT2, the FIHT3 method is based on a single operation of multiplication for determination of one point. Moreover, high-speed algorithm which uses shift operation instead of multiplication was also shown in this paper. The computation time of the original Hough transform is 5.23×10^{-1} sec, and the

Fig. 1. Deviation E to Hough curve.

Fig. 2. Deviation between Hough transform and other methods.

processing time ratio to the FIHT3 was 20.2, as follows:

Computational time (sec)

	FIHT2	Nakashima ⁽³⁾	FIHT3
Time	3.03×10^{-2}	2.84×10^{-2}	2.59×10^{-2}
Ratio	1.17	1.10	1.00

Furthermore, doing experiments has confirmed that the FIHT3 method provides the best accuracy and the fastest computation among any other methods that employ the conventional simultaneous recurrence formula (Fig. 1, Fig.2).

References

- (1) R. O. Duda and P. E. Hart : Use of the Hough transform to detect lines and curves in pictures, Comm. ACM, Vol.15, No.1, pp.11-15 (1972)
- (2) H. Koshimizu and M. Numada : FIHT2 algorithm, a fast incremental Hough transform, *IEICE Trans.*, Vol.E 74, No.10, pp.3389-3393 (1991)
- (3) K. Nakashima, H. Yakabe, Y. Obuchi, and K. Inoue : High-speed, high-accuracy Hough transform using simultaneous recurrence formula, *Systems and Computers in Japan*, Vol.28, No.3, pp.24-33 (1997)

正弦三項漸化式に基づく高速 Hough 変換

非会員 沼田 宗敏^{*,**}

上級会員 輿水 大和^{**}

A Fast Hough Transform Based on a Sine-Three-Term-Recurrence

Munetoshi Numada^{*}, Non-member, Hiroyasu Koshimizu^{**}, Senior Member

Hough transform (HT) is one of the important methods for detecting or recognizing lines from the edge points in the image. In order to put HT faster, it is promising to decrease the computation costs both in the trigonometric function that forms the basic computational unit and in multiplication. From this view point, Koshimizu et al. proposed a method “Fast Incremental Hough Transform 2 (FIHT2)” that enables one point to be generated on the curve by a single operation of multiplication. However, it has a problem that a significant approximation error occurs. With this shortcoming taken into consideration, this paper proposes a new method “FIHT3” that generates an exact Hough curve using a STTR (Sine-Three-Term-Recurrence). As with FIHT2, FIHT3 method is implemented by a single operation of multiplication for generating one point of Hough curve. Furthermore, it was known experimentally that the FIHT3 method provides the complete accuracy and the fastest computation among any other methods that employ the conventional simultaneous recurrence formula. Moreover, the high-speed algorithm which uses shift operation instead of multiplication was also shown in this paper.

キーワード : 直線検出, Hough 変換, 三項漸化式, シフト演算

Keywords : line detection, Hough transform, three-term-recurrence, shift operation

1. はじめに

Hough 変換⁽¹⁾は、クラスタリングされていないエッジ点群から直線を検出できる、パターン認識の有力な手法である。この手法は、パターン平面上のエッジ点をパラメータ平面上の曲線へと変換し、同一直線上にある点群の変換曲線がパラメータ平面上で交差する性質を利用する。しかし、処理時間の大きさが障害となっている。これは、次式に示す Hough 変換の基本式に含まれる、三角関数演算と乗算の計算コストが大きいためである。

$$\rho_n = x \cdot \cos \theta_n + y \cdot \sin \theta_n \dots\dots\dots (1)$$

ここに、パラメータ ρ はパターン平面である x - y 座標系のエッジ点の画像の原点から直線までの距離、パラメータ θ は原点から直線に下ろした垂線と x 軸とのなす角度である。

これまで Hough 変換を高速化するため多くの研究が行われているが、大別するとハードウェアを用いる手法、演算回数の低減を図る手法、基本演算部を効率化する手法の 3

種類に分けることができる。

まず、ハードウェアを用いる手法であるが、これは専用ハードウェアを用いて高速に Hough 変換を実行する手法である。これには、CORDIC による反復演算を用いる FPGA⁽²⁾、マルチプロセッサ構成や⁽³⁾、角度分割数を 2 のべき乗とし FFT のようなバタフライ演算を多段パイプラインで実現する並列回路⁽⁴⁾などがある。しかし、これらはいずれも初期投資が大掛かりであり、ソフトウェア処理で置き換えた場合には効率化がほとんど見込めないハードウェアのみに特化した手法である。

第 2 の演算回数の低減を図る手法には、まず、ピラミッド構造を用いた手法がある⁽⁵⁾。これは、高解像度の画像から低解像度の画像までピラミッドのように階層化を行い、エッジ点数を減らすことによって、演算回数を低減する手法である。しかし、階層化の次数が大きくなるにつれ、線分の特徴である長さが指数関数的に小さくなるため、短い線分の抽出には適さない。一方、エッジ成分の勾配を用いる手法は⁽⁶⁾⁽⁷⁾、投票する角度パラメータ θ の範囲を制限し、演算回数を低減する手法である。しかし、エッジ成分の勾配はノイズの影響を受けると大きく変化する。このため、ノイズが含まれるエッジ画像にこの手法を適用すると正しく直線を検出できない。したがって、Hough 変換の特長の一つである、ノイズに対するロバスト性が失われてしまっている。

* (株) ロゼフテクノロジー
〒939-1502 富山県南砺市野尻 662-1
Lossev Technology Corp.

** 662-1 Nojiri, Nanto-shi 939-1502
中京大学情報理工学部
〒470-0393 愛知県豊田市貝津町床立 101
School of Information Science and Technology, Chukyo University
101 Tokodachi, Kaizu-cho, Toyota-shi 470-0393

第3の基本演算部の計算コストを効率化する手法は、計算コストの大きな三角関数演算と乗算の計算回数とを削減する。実際には、三角関数は予め計算しテーブル化しておくことにより省くことができるので、乗算回数の低減が鍵となる。この手法による最初の試みはOndaらによるもので、三角関数の周期性を利用した効率的な計算手法を提案した⁽⁸⁾。これは、角度パラメータ θ を M 個のブロックに分ける手法で、Hough曲線上の1点あたりの乗算回数を2回から $3/2+1/M$ 回にまで低減させた。しかし、この手法で効率を上げるには分割数 M を十分に大きくする必要があり、こうすると逆にステップ数が M 倍に大きくなってしまいう問題があった。

これに対し、漸化式を用いてインクリメンタルに近似Hough曲線を発生させることのできる、著者らによるPLHT法およびFIHT2、Tagzoutらによる改良FIHT2などが提案されている^{(9)~(11)}。これらは(1)式のHough変換とは異なる変換関数系を用いる広義のHough変換で、同一関数による逆変換で直線を検出するので、検出される直線には近似誤差が伴わない。また、これらの曲線はインクリメンタルに計算できるので、1点を生成するのに必要な乗算回数がほぼ1回ですむ。第1のPLHT法ではHough曲線を区分的直線で近似したHough曲線を用い、第2のFIHT2ではHough曲線に対して数dot程度の偏差をもつ近似Hough曲線を用いる。ここに、単位[dot]はパラメータ平面の分割の最小単位である。第3の改良FIHT2では、直列演算方式のFIHT2よりもハードウェア化に適した並列演算方式の漸化式を用いるが、Hough曲線との近似誤差はFIHT2を用いた場合に比べて2倍ほど大きくなる。これに対し、Nakashimaらは近似Hough曲線計算の漸化式を改良し、Hough曲線との近似誤差を 10^{-4} dot以下に抑えた⁽¹²⁾。この手法はハードウェア化に適した並列演算方式の漸化式を用いる。しかしながら、1点あたりの乗算回数は2回と多く、ソフトウェアで実行するとFIHT2などに比べ2倍の処理時間を要する。

このような漸化式を用いた基本演算部の効率化の背景から、1点あたりの乗算回数が1回以下、Hough曲線との近似誤差が 10^{-4} dot以下、並列演算方式、ステップ数が小さい、という4つの条件を同時に成立させることのできるHough変換法が求められている。このような手法は、ソフトウェア、ハードウェアのいずれで実行しても従来法よりも高速高精度となることが期待される。そこで本論文では、正弦三項漸化式を用いてこのようなHough変換法を提案する。

以下、2章では漸化式を用いた従来のHough変換法について概説する。続く3章では正弦三項漸化式を用いて、厳密なHough曲線を効率よく発生させる手法を提案する。4章の実験では計算コストと近似誤差の分析を行い、5章で全体をまとめる。

2. 漸化式を用いた従来のHough変換法

〈2・1〉 FIHT2 FIHT2では次の漸化式を用いて、 ρ_n とこれのペアである $\rho'_n \equiv \rho_{n+K/2}$ を計算する⁽¹⁰⁾。ここで、 K を

θ 方向分割数とし、 $n=0,1,\dots, K/2-2$ とする。また、 ε を十分に小さな定数とする。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho_n + \varepsilon \cdot \rho'_n \\ \rho'_{n+1} &= \rho'_n - \varepsilon \cdot \rho_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(2)式を解いて次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \rho_n &= \frac{\rho_0 \cos(\theta_n - \Delta\theta/2) + \rho'_0 \sin \theta_n}{\cos(\Delta\theta/2)} \\ \rho'_n &= \frac{-\rho_0 \sin \theta_n + \rho'_0 \cos(\theta_n + \Delta\theta/2)}{\cos(\Delta\theta/2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\Delta\theta = \pi/K$, $\varepsilon = 2\sin(\Delta\theta/2)$, $n\Delta\theta = \theta_n$ とする。 ε が十分に小さいとき、 $\Delta\theta = 2\sin^{-1}(\varepsilon/2) \cong 0$, $\cos(\Delta\theta/2) \cong 1$ が成立する。このため、初期値 $\rho_0 = x$, $\rho'_0 = y$ とおくことにより、

$$\left. \begin{aligned} \rho_n &= x \cos \theta_n + y \cdot \sin \theta_n \\ \rho'_n &= -x \sin \theta_n + y \cdot \cos \theta_n \\ &= x \cdot \cos(\theta_n + \pi/2) + y \cdot \sin(\theta_n + \pi/2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となり、(1)式の近似式が得られる。すなわち、(2)式の漸化式をインクリメンタルに計算することにより、(1)式の近似Hough曲線である(4)式を得ることができる。ここで、図1にFIHT2による近似Hough曲線発生の手順を示す。まず、 θ 方向分割数 K を2の倍数とおく。次に初期値を $\rho_0 = x$, $\rho'_0 = y$ とおく。そして、(2)式の漸化式を $K/2-1$ 回繰り返して計算すると、近似Hough曲線を発生できる。 ρ_n または ρ'_n を1点計算するための乗算回数は1回である。また、Hough曲線との近似誤差 E は ρ_n の近似誤差を E_n として、

$$\left. \begin{aligned} E_n &\cong \frac{\pi}{2K} |x \cdot \sin \theta_n| \leq \frac{\pi}{2K} |x| & (0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}) \\ E_n &\cong \frac{\pi}{2K} |y \cdot \cos \theta_n| < \frac{\pi}{2K} |y| & (\frac{\pi}{2} \leq \theta_n < \pi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

であるから⁽¹⁰⁾,

$$E \leq \frac{\pi}{2K} \max(|x|, |y|) \dots\dots\dots (6)$$

となる。

Fig. 1. Generating the approximated Hough curve by using FIHT2.

〈2・2〉 改良 FIHT2 Tagzout らの改良 FIHT2 は⁽⁹⁾, (2) 式の 2 行目右辺第 2 項の ρ_{n+1} を ρ_n に置き換えた手法である。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho_n + \varepsilon \cdot \rho'_n \\ \rho'_{n+1} &= \rho'_n - \varepsilon \cdot \rho_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

(2) 式をハードウェアで実行する場合, 2 行目の ρ'_{n+1} は 1 行目の ρ_{n+1} の計算が終わってからでないと計算できない。よってこの式は直列演算方式である。これに対し, (7) 式は 1 行目と 2 行目を同時に計算できる並列演算方式である。このため, 並列処理可能なハードウェアで実行するとより高速化できる。しかし, この式で計算した Hough 曲線との近似誤差は, FIHT2 で計算した場合に比べて約 2 倍と大きく, 実用向きではない。

〈2・3〉 Nakashima らの手法 Nakashima らは(2)式を改良し, (1) 式の Hough 曲線との近似誤差がより小さくなる連立漸化式を提示した。これを下に示す。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho_n - \frac{\delta^2}{2} \cdot \rho_n + \delta \cdot \rho'_n \\ \rho'_{n+1} &= \rho'_n - \frac{\delta^2}{2} \cdot \rho'_n - \delta \cdot \rho_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに変数 δ と刻み角 $\Delta\theta = \pi/K$ との間には,

$$\sin\Delta\theta = \delta / \sqrt{1 + \delta^4/4} \dots\dots\dots (9)$$

の関係が成り立つ。ここで, δ を 2^{-m} の形にすると $\delta^2/2$ は $2^{-(2m+1)}$ の形になる。このため, (8) 式は乗算の代わりに, より高速なシフト演算を用いて計算できる。これをハードウェア化した場合, 2 回のシフト演算を同時に処理することができるので, 1 回のシフト演算を用いる場合と処理時間は変わらない。さらに, (8) 式は改良 FIHT2 と同様並列演算方式であるので, ハードウェア化の実験例では, 直列演算方式の FIHT2 に比べて約 1.5 倍高速であるという報告がある⁽¹²⁾。

また, Hough 曲線(1)式との近似誤差 E は次式で計算できる。すなわち, $\delta \equiv \Delta\theta = \pi/K$ であるので,

$$\begin{aligned} E &\leq \left\{ \left(\sqrt{1 + \frac{\delta^4}{4}} \right)^{\frac{K}{2}} - 1 \right\} \max(|x|, |y|) \dots\dots\dots (10) \\ &\cong \frac{K\delta^4}{16} \max(|x|, |y|) \cong \frac{\pi^4}{16K^3} \max(|x|, |y|) \end{aligned}$$

となる⁽¹²⁾。これは, FIHT2 と比べて十分に小さい。

しかし, (8) 式をソフトウェアで実行すると, $\delta^2/2$ を予め計算しておいたとしても, 乗算回数は 1 点あたり 2 回であり FIHT2 の 2 倍になる。このため, ソフトウェアで実行すると約 2 倍の処理時間を要する。

3. 正弦三項漸化式を用いた Hough 変換

〈3・1〉 三項漸化式を用いた計算手法 ここでは正弦関数の定義式から導かれる正弦三項漸化式を用いて, 近似誤差のない Hough 曲線を 1 点あたり 1 回の乗算で計算する手法を提示する。まず次の正弦関数の定義式を考える。

$$e^{i\Delta\theta} - e^{-i\Delta\theta} = 2i\sin\Delta\theta \dots\dots\dots (11)$$

ここで, 両辺に $e^{i\theta_n}$ を乗じれば次式を得る。

$$e^{i\theta_{n+1}} - e^{i\theta_{n-1}} = 2i\sin\Delta\theta \cdot e^{i\theta_n} \dots\dots\dots (12)$$

上式の実数部と虚数部から, 以下の一対の漸化式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \cos\theta_{n+1} - \cos\theta_{n-1} &= -2\sin\Delta\theta \cdot \sin\theta_n \\ \sin\theta_{n+1} - \sin\theta_{n-1} &= 2\sin\Delta\theta \cdot \cos\theta_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式の 2 つの成分は互いに絡み合っており分離できない連立形で, 乗数係数に正弦関数を含む。これを正弦三項漸化式 STTR (Sine-Three-Term-Recurrence) という。上式の 1 行目に x , 2 行目に y を乗じた後に 2 つの式を加え, これに(1)式を代入すると次式が得られる。

$$\rho_{n+1} - \rho_{n-1} = 2\sin\Delta\theta \cdot \rho'_n \dots\dots\dots (14)$$

ここに, ρ'_n は $\rho_{K/2+n}$ に等しく,

$$\rho'_n = -x \cdot \sin\theta_n + y \cdot \cos\theta_n \dots\dots\dots (15)$$

である。 K は θ 方向分割数で 2 の倍数である。同様に, (13) 式の 1 行目に y , 2 行目に x を乗じ, 2 つの式を減算すると次式が得られる。

$$\rho'_{n+1} - \rho'_{n-1} = -2\sin\Delta\theta \cdot \rho_n \dots\dots\dots (16)$$

$c=2\sin\Delta\theta$ と置き換え, (14) と (16) 式を連立させると, 次式の連立漸化式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n+2} &= \rho_n + c \cdot \rho'_{n+1} \\ \rho'_{n+2} &= \rho'_n - c \cdot \rho_{n+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ρ_0 と ρ_1 , ρ'_0 と ρ'_1 を初期値として与え, $n=0$ から $K/2-3$ まで上式を計算すると順次 Hough 曲線が得られる。発生する Hough 曲線には近似誤差が伴わない。初期値は(1)式と(15)式とから計算できる。このため, $\sin\Delta\theta$, $\cos\Delta\theta$ を定数化しておけば, 初期値の計算も含めて三角関数の計算は一切不要となる。また, Hough 曲線 1 点を生成するための乗算回数も FIHT2 と同じ 1 回である。以下に, 提案手法のアルゴリズムを示す。

[Initialize]

$$\Delta\theta = \pi/K; \alpha = \cos\Delta\theta; \beta = \sin\Delta\theta; c = 2\beta$$

$$\rho_0 = x; \rho'_0 = y; \rho_1 = \alpha x + \beta y; \rho'_1 = -\beta x + \alpha y$$

[loop] $n=0, 1, 2, \dots, K/2-3$

$$\rho_{n+2} = \rho_n + c \cdot \rho'_{n+1}$$

$$\rho'_{n+2} = \rho'_n - c \cdot \rho_{n+1}$$

メインループのステップ数は FIHT2 と同様わずか 2 行と少ない。しかも, ρ'_{n+2} の計算に ρ_{n+2} の計算結果を用いない並列演算形式である。ここで, 本手法で発生した点列を図 2 に示す。これらの点列は, FIHT2, Nakashima らの手法とは

Fig. 2. Generating the Hough curve by using FIHT3.

Fig. 3. Generating the Hough curve based on FIHT3 by using shift-operator.

異なり，厳密な Hough 曲線である。この手法を Fast Incremental Hough Transform 3 (FIHT3) と呼ぶことにする。

〈3・2〉 シフト演算による高速化 FIHT2 や Nakashima らの手法と同様、乗数係数を 2 のべき乗に設定することにより、乗算をシフト演算に置き換えることができる。このためより高速化が可能である。 m を正の整数として、 $c = 2\sin\theta = 2^{-m}$ とおくと、(17)式より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{n+2} &= \rho_n + \frac{\rho'_{n+1}}{2^m} \\ \rho'_{n+2} &= \rho'_n - \frac{\rho_{n+1}}{2^m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

ただし、 $\Delta\theta=\sin^{-1}(2^{-m-1})$ 、 $K=\pi/\Delta\theta$ である。(18)式と等価な Hough 変換の式は、(1)と(15)式である。これより、 ρ_n 、 ρ'_n の初期値は $\rho_0=x$ 、 $\rho_1=x\cdot\cos\Delta\theta+y\cdot\sin\Delta\theta$ 、 $\rho'_0=y$ 、 $\rho'_1=-x\cdot\sin\Delta\theta+y\cdot\cos\Delta\theta$ で与えられる。

ここで注意しなければならないのは、 θ 方向分割数が $K=\pi/\sin^{-1}(2^{-m/4})$ という無理数となるため、2 の倍数にならない点である。このため、 K の代わりに整数である $[K]$ を用いて漸化式を計算することにする。ここに、 $[\cdots]$ は Gauss 記号である。 $[K]$ が 2 の倍数であれば、(18)式の n の範囲を $n=0,1,2,\cdots,[K]/2-3$ とすればよい。

図3に示すように、(18)式で計算される点 (θ_n, ρ_n) は Hough 曲線上の点であり、 θ 方向の間隔は $\Delta\theta$ で一定である。ただし、 $\theta_{|K|/2-1}$ と $\theta_{K/2} = \pi/2$ 、 $\theta_{|K|-1}$ と $\theta_K = \pi$ の間だけは、 $\Delta\theta$ よりも間隔が大きくなる。これは、 $\theta_{|K|/2} \neq \pi/2$ 、 $\theta_{|K|} \neq \pi$ とはなら

Table 1. Ratio of angle error γ .

m	1	3	4	6	7
c	1	2^{-3}	2^{-4}	2^{-6}	2^{-7}
K	12.43	50.23	100.5	402.1	804.2
$[K]$	12	50	100	402	804
γ	0.22	0.12	0.26	0.06	0.12

ないためである。この誤差の $\Delta\theta$ に対する比率を γ とおくと、

$$\gamma = \frac{(\theta_{K/2} - \theta_{[K]/2-1}) - \Delta\theta}{\Delta\theta} = \frac{K - [K]}{2} \dots\dots\dots(19)$$

となる。この比率が大きいと、 $\theta=\pi/2$ 近辺と $\theta=\pi$ 近辺の直線検出感度が低下する。 $m=1,3,4,6,7$ の場合の乗数係数 c 、 θ 方向分割数 K および $[K]$ 、誤差の比率 γ を表 1 に示した。 $m=2,5$ の場合は $[K]$ が 2 の倍数にならないので除いてある。これより、 $m=6$ 、 $c=2^{-6}$ 、 $[K]=402$ のとき最も γ が小さくなることがわかった。

ここで、 m ビットのシフト演算を用いた Hough 曲線の計算手順を示す。まず、画像中心を原点とする $H \times V$ pixel サイズのエッジ画像を用いる。 ρ 方向の 1 dot を x-y 座標系の画像の 1 pixel と等しくすると、 $|\rho|$ の最大値は $\max|\rho| = \sqrt{(H/2)^2 + (V/2)^2}$ となるため、 ρ 方向の分割数は $L = 2\max|\rho| = \sqrt{H^2 + V^2}$ とすればよい。シフト演算で用いる変数は整数であるから、予め ρ_n, ρ'_n を M 倍した R_n, R'_n を用いて計算を行う。そして、投票値の更新を行う直前に、 R_n, R'_n を M で割って ρ_n, ρ'_n を求めるのがよい。 M も高速化のために 2 のべき乗、すなわち p を正の整数として $M=2^p$ という形にしておく。整数を 32 ビットで表現すると、

$$\max |M\rho| \leq 2^{31} \dots\dots\dots (20)$$

が成立するので, $L=2 \max|\rho|$ を代入して,

$$L \leq 2^{32-p} \dots\dots\dots (21)$$

が成立するような最大の p を決定すればよい。たとえば、エッジ画像が $H=640$, $V=480$ の VGA 画像であれば $L=800$ となるので、 p の取り得る最大値は 22 となる。

[Initialize]

$$\begin{aligned} c &= 2^{-m}; \Delta\theta = \sin^{-1}(c/2); K = \pi/\Delta\theta; \\ \alpha &= \cos\Delta\theta; \beta = c/2; \\ R_0 &= [x \ M]; R'_0 = [y \ M]; \\ R_1 &= [(\alpha \ x + \beta \ y)M]; R'_1 = [(-\beta \ x + \alpha \ y)M] \end{aligned}$$

$$[\text{loop}] \quad n=0,1,2,\cdots, [K]/2-3$$

$$\begin{aligned} R_{n+2} &= R_n + [R'_{n+1} / 2^m] \\ R'_{n+2} &= R'_n - [R_{n+1} / 2^m] \end{aligned}$$

上式の[loop]の R_{n+2} , R'_{n+2} における計算の平均誤差は、整数演算であるから 0.5 である。これが $[K]/2 - 2$ 回繰り返されるので、累積誤差は $e \approx [K]/4 - 1$ となる。 ρ_{n+2} , ρ'_{n+2} は R_{n+2} , R'_{n+2} を $M=2^p$ で割って得られるので、

$$E \approx 2^{-p-2}([K]-1) \approx 2^{-(p+2)}K \dots\dots\dots(22)$$

Table 2. Number of multiplications and shift operations.

	FIHT2	Nakashima	FIHT3
Multiplications	1	2	1
Shift operations	1	2	1

Table 3. The theoretical deviations (dot).

	FIHT2	Nakashima	FIHT3
Multiplications	$\pi L/5K$	$E_1 \pi^4 L/(40K^3)$	0
Shift operations	$\pi L/5K$	$\sqrt{E_1^2 + E_2^2}$	$E_2 \cdot 2^{-(p+2)} K$

となる。なお、付録 A.1 に上記アルゴリズムの C 言語によるプログラムを添付した。

〈3・3〉 計算コストと誤差の評価 FIHT2, Nakashima らの手法及び提案手法の FIHT3 とで、 ρ - θ パラメータ平面上に描く軌跡の 1 点を出力するための乗算回数について調べ、表 2 に示した。FIHT2 及び FIHT3 では、1 回の乗算で近似 Hough 曲線または Hough 曲線の 1 点を計算できる。これに対し、Nakashima らの手法では 2 回の計算が必要である。乗算をシフト演算に置き換えた場合の計算回数も同様である。

また、Hough 曲線と各手法の生成曲線との近似誤差を調べるため、便宜上エッジ画像 ($H \times V$ pixel) の縦横比を 4:3 とした。これより、 ρ 方向の分割数は、 $L=(5/2)\max(|x|,|y|)=(5/4)H$ となる。この近似誤差を表 3 に示す。FIHT2 の近似誤差は (6) 式に、 $\max(|x|,|y|)=(2/5)L$ を代入して、 $\pi L/5K$ となる。 $L=800, K=402$ なら 1.25dot と無視できないほど大きい。これに対し、Nakashima らの手法の近似誤差は、(10) 式より $E=\pi^4 L/(40K^3)$ となり、 $L=800, K=402$ で $E=3.00 \times 10^{-5}$ dot となり十分に小さい。FIHT3 の近似誤差は 0 である。以上は漸化式に乗算を用いた場合の近似誤差である。

漸化式にシフト演算を用いた場合の計算誤差は (22) 式より、理論誤差のない FIHT3 で $2^{-(p+2)}K$ である。 $[K]=402, p=22$ とすると、 $E=2.40 \times 10^{-5}$ dot となる。続いて Nakashima らの手法における計算誤差について考察する。この手法では 1 点あたりの計算にシフト演算を 2 回必要とする。このため、理論誤差 $E_1=\pi^4 L/(40K^3)$ とシフト演算 1 回による累積誤差 $E_2=2^{-(p+2)}K$ の 2 倍との総合誤差 E を二乗和平方根から計算すると、

$$E \approx \sqrt{E_1^2 + 4E_2^2} = \sqrt{(\pi^4 L)^2 / (40K^3)^2 + K^2 2^{-(2p+2)}} \dots\dots (23)$$

となる。 $L=800, [K]=402$ とすると $E=5.66 \times 10^{-5}$ dot である。FIHT2 の場合は近似誤差が非常に大きいので、シフト演算に伴う誤差の影響は受けず、乗算の場合の近似誤差と同じである。

4. 実 験

本章では、FIHT2, Nakashima らの手法、提案した FIHT3 の 3 手法で、Hough 曲線に対する偏差と計算速度を比較する。改良 FIHT2 は、FIHT2 や Nakashima らの両手法と比べて、Hough 曲線に対する近似誤差で劣るため除外した。計算には、CPU に Pentium4-1.7GHz を搭載したパソコンを用い、

Fig. 4. Hough curve used in the experiment.

Table 4. Deviation to the Hough curve (multi).

	FIHT2	Nakashima	FIHT3
Theory	1.25	3.00×10^{-5}	0
Experiment	1.25	3.01×10^{-5}	2.84×10^{-13}

Table 5. Deviation to the Hough curve (shift operation).

	FIHT2	Nakashima	FIHT3
Theory	1.25	6.42×10^{-5}	2.40×10^{-5}
Experiment	1.25	5.35×10^{-5}	1.60×10^{-5}

Fig. 5. Deviation E to Hough curve (Multiplication). Fig. 6. Deviation E to Hough curve (Shift operation).

Fig. 7. Deviation between Hough transform and other methods.

プログラムは VC/C++ で記述した。変数としては、漸化式を乗算で計算した場合で倍精度実数 (64bit)、シフト演算を用いて計算した場合で整数 (32bit) を用いた。

〈4・1〉 Hough 曲線生成における偏差 画像中心に原点をもつエッジ画像の大きさを $H640 \times V480$ pixel, ρ 方向分割数を $L=800$, θ 方向分割数を $K=402$ とする。画像上のエッジ点の座標を $x=320, y=-240$ として, Hough 曲線または近似 Hough 曲線を発生させる。図 4 は (1) 式で計算した, 実験で用いる Hough 曲線である。これと, 3 手法で計算した曲線との近似誤差を調べる。

表 4 に, 乗算を用いた場合の Hough 曲線と各手法との偏差 E を, 理論値と実測値とに分けて示す。理論値は表 3 より計算した。FIHT2 の近似誤差は $\pi L/5K=1.25$ dot であったが, 実測値も 1.25 dot であり一致した。また, Nakashima らの手法の近似誤差は $\pi^4 L/(40K^3)=3.00 \times 10^{-5}$ dot であったが, 実測値も 3.01×10^{-5} dot となりほぼ一致した。なお, FIHT3 の近似誤差は 0 dot であるが, 実測値は 2.84×10^{-13} dot となった。これは倍精度計算における丸め誤差が, 漸化式によって累積されたものであり実用上は無視できる。FIHT3 の偏差は, 3 手法の中で最も偏差が小さかった。

シフト演算を用いた場合も同様にして計算し, 表 5 に載せた。各手法とも理論値と実験値は類似した値が得られた。FIHT3 の偏差は 3 手法の中で最も偏差が小さく, 理論値・実験値ともに Nakashima らの手法の $1/2$ から $1/3$ 以下であった。

図 5 は, Hough 曲線と 3 手法による計算値との偏差を, 漸化式を乗算で計算した場合で示したものである。 θ の範囲を $0 \leq \theta < \pi$ とする。 $\theta=0, \pi/2$ を除くすべての区間で FIHT3, Nakashima らの手法, FIHT2 の順で偏差が小さくなった。 $\theta=0, \pi/2$ で FIHT2 や Nakashima らの手法で FIHT3 よりも偏差が小さくなるのは, ここが ρ_0 と ρ'_0 との初期値として, Hough 曲線上の点が直接与えられるためにすぎない。

図 6 は, Hough 曲線と 3 手法による計算値との偏差を, 漸化式をシフト演算で計算した場合で示したものである。 θ の範囲を $0 \leq \theta < \pi$ とする。一部の区間で FIHT3 よりも Nakashima らの手法の偏差が小さい場合があるが, 概ね, FIHT3, Nakashima らの手法, FIHT2 の順で偏差が小さくなった。

図 7 は Hough 変換と他の手法との変換画像における偏差を, 実際の画像に適用して調べたものである。漸化式の計算にはシフト演算を用いた。 640×480 pixel の大きさを持つ実際の画像(a)に, Sobel 法と 2 値化を適用してエッジ画像(b)を得た。(d),(e),(f),(g)がそれぞれ Hough 変換, FIHT2, Nakashima らの手法, FIHT3 による処理画像で, 横が θ 方向, 縦が ρ 方向である。4 つの画像はほぼ同じに見える。そこで違いを明らかにするため, Hough 変換の処理画像(d)に対する他の 3 手法の処理画像(e),(f),(g)のそれぞれの偏差の絶対値をとり, 1 以上のレベル差で白になるようにしたのが (h),(i),(j)である。FIHT2 ではレベル 1 以上の偏差を持つ画素は 75589 点と ρ - θ パラメータ平面の 23.5% にも及んだ。こ

Table 6. Computational time (sec).

	Hough	FIHT2	Nakashima	FIHT3
Time	1.34×10^{-1}	3.03×10^{-2}	2.84×10^{-2}	2.59×10^{-2}
Ratio	5.17	1.17	1.10	1.00

れに対し, Nakashima らの手法ではレベル 1 以上の偏差を持つ画素は 78 点で 0.024%, FIHT3 では 26 点で 0.008%に過ぎない。FIHT3 は FIHT2 に対してはもちろん, Nakashima の手法に対しても精度的に優れていることがわかる。FIHT3 による直線検出結果を図(c)に示す。

ところで, FIHT2 法による最大の偏差は投票値の極大点近傍で発生しており, その値は 152 であった。Hough 変換による直線検出は投票値の極大点の検出で行うため, この近似誤差が直線検出に影響を与える可能性が大きい。これに対し, Nakashima らの手法, FIHT3 では最大の偏差は 1 でしかなく, しかも投票値の極大点近傍では発生しなかった。両手法とも極大点近傍で最大 1 の偏差が発生する確率は 0.01%のオーダーと低い。このため, 1dot 単位の整数値で極大点の位置を検出する通常の Hough 変換では, 近傍データの投票値がたとえ 1 増えてもそれが極大点の検出位置に及ぼす影響は極めて小さいので, これら 2 手法の近似誤差が直線検出に与える影響は 0 と考えてよい。しかし, 近傍の投票値にフィルタを適用し実数値で極大点の位置を検出する高精度な Hough 変換では, 近傍データの投票値が 1 増えるだけでも極大点の検出位置に影響を及ぼす。この場合には, Nakashima らの手法に比べて偏差の小さい FIHT3 の方が直線検出に与える影響は小さい。なお, FIHT3 の処理画像(g)の場合で漸化式の計算に乗算を用いると Hough 変換の処理画像(d)に正確に一致する。このため, (j)の FIHT3 の偏差画像の白画素数は 0 になる。

〈4・2〉 計算時間 Hough 変換に要する計算時間を測定するため, 図 7 の(d),(e),(f),(g)の投票画像生成に必要な時間を計測した。Hough 変換の計算には, 三角関数値テーブルを用いた高速手法を用いる。

表 6 に計算時間を示す。計算時間は FIHT3 が最も速く, 次いで Nakashima らの手法, そして FIHT2 の順であった。FIHT3 に対する Nakashima らの手法の処理時間の比率は 1.10 倍とそれほど大差はない。これは, 投票画像生成においてメモリへの書き込み時間が大きなウェイトを占めるため, もともと処理時間の小さな Shift 演算の回数が 2 倍違っても影響が現れにくいためと思われる。一方, FIHT3 に対する FIHT2 の処理時間の比率は, シフト演算回数が同じであるにも関わらず 1.17 倍であった。これは, 計算に用いた CPU が複数の命令を同時に実行できるスーパースケラ技法を用いているため, 並列演算方式の利点が出たものと思われる。このため, 提案手法はハードウェア化に適した手法であることが確かめられた。なお, 三角関数テーブルを用いず, (1) 式をそのまま計算するオリジナルの Hough 変換の計算時間は 5.23×10^{-1} sec であった。FIHT3 に対する処理時間の比率は 20.2 におよぶ。

5. ま と め

FIHT2 のように漸化式を用いたインクリメンタルな計算法でありながら、近似ではなく厳密に Hough 曲線を生成できる手法 FIHT3 を提案した。この手法の基本演算部の乗算回数は FIHT2 と同じく 1 回であり、ステップ数も FIHT2 と同様 2 行と少ない。

Hough 曲線との偏差に関する実験では、FIHT3 は従来の 2 手法である FIHT2, Nakashima らの手法のいずれよりも偏差が小さかった。これは、漸化式の計算に乗算を用いた場合でもシフト演算を用いた場合でも変わらない。さらに、エッジ画像から Hough 曲線による投票値画像を生成する実験では、従来の 2 手法よりも高速であった。ただ、シフト演算自体の計算コストが小さいため、投票値更新も含めた計算時間では Nakashima らの手法に対しては 1.1 倍しか速くなかったが、三角関数テーブルを用いる一般的な Hough 変換と比べると 5.17 倍の高速化が可能であった。また、1 点あたりの乗算回数が直列演算方式の FIHT2 と同じであるにも関わらず、並列演算可能な CPU を用いると FIHT3 の方が約 1.17 倍速くなったことから、ハードウェア化に適した演算方式であることも確かめられた。

(平成 20 年 10 月 2 日受付, 平成 20 年 12 月 12 日再受付)

文 献

- (1) R. O. Duda and P. E. Hart : "Use of the Hough transform to detect lines and curves in pictures", Comm. ACM, Vol.15, No.1, pp.11-15 (1972)
- (2) S. M. Karabernou, L. Kessala, and F. Terranti : "Real-time FPGA implementation of Hough Transform using gradient and CORDIC algorithm", Image and Vision Computing, Vol.23, pp.1009-1017 (2005)
- (3) D. Ben-Tzvi, A. A. Naqvi, and M. B. Sandler : "Synchronous multiprocessor implementation of the Hough transform, Computer Vision", Graphics and Image Processing, Vol.52, No.3, pp.437-446 (1990)
- (4) J. E. Vuillemin : "Fast Linear Hough Transform, International Conference on Application Specific Array Processors", pp.1-9 (1994)
- (5) G. Bongiovanni, C. Guerra, and S. Levialdi : "Computing the Hough transform on a pyramid architecture", Machine Vision and Applications, Vol.3, pp.117-123 (1990)
- (6) R. Cucchiara and F. Filicori : "The vector-gradient Hough transform", IEEE Trans. Pattern. Anal. Machine Intell., Vol.20, No.7, pp.746-751 (1998)
- (7) F. O' Gorman and M. B. Clowes : "Finding picture edges through collinearity of feature points", IEEE Trans. Computers, Vol.25, No.4, pp.449-456 (1976)
- (8) 恩田邦夫・青木由直 : 「三角関数の周期性を利用した Hough 変換の高速計算法」, 信学論, **70-D**, 10, pp.2009-2011 (1987)
- (9) S. Tagzout, K. Achour, and O. Djekouse : "Hough transform algorithm for FPGA implementation, Signal Processing", Vol.81, pp.1295-1301 (2001)
- (10) H. Koshimizu and M. Numada : "FIHT2 algorithm, a fast incremental Hough transform", IEICE Trans., Vol.E 74, No.10, pp.3389-3393 (1991)
- (11) H. Koshimizu and M. Numada : "On a fast piece-wise linear Hough transform PLHT and its application", IAPR Workshop on CV-Special Hardware and Industrial Application, pp.335-339 (1988)
- (12) K. Nakashima, H. Yakabe, Y. Obuchi, and K. Inoue : "High-speed, high-accuracy Hough transform using simultaneous recurrence formula", Systems and Computers in Japan, Vol.28, No.3, pp.24-33 (1997)

付 録

A.1 シフト演算を用いた FIHT3 プログラム

```
#include <math.h>

#define L      800          //L
#define K      402          //[K]
#define Ds     0.007812579 //Δθ

unsigned char* pointer1;    //(θ, ρ) pointer
pointer1=(unsigned char*)GlobalAlloc(GPTR, L*K ) +L/2;
int      IR10, IR11, IR1;   //R0, R1, R2
int      IR20, IR21, IR2;   //R'0, R'1, R'2
double   roh10, roh11, roh20, roh21; //ρ0, ρ1, ρ'0, ρ'1
unsigned char* pointer2= pointer1+(K/2)*L;  //(θ+π/2, ρ') pointer
////////// FIHT3 ////////////

void FIHT3(double x, double y){    //FIHT3 main loop
    roh10= x; roh20=y;             //ρ0, ρ'0
    roh11= x*cos(Ds)+y*sin(Ds);    //ρ1
    roh21= -x*sin(Ds)+y*cos(Ds);    //ρ'1
    //(θ0, ρ0), (θ1, ρ1), (θ'0+π/2, ρ'0), (θ'1+π/2, ρ'1) countup
    *(pointer1+(int)roh10) += 1; pointer1 += L;
    *(pointer1+(int)roh11) += 1; pointer1 += L;
    *(pointer2+(int)roh20) += 1; pointer2 += L;
    *(pointer2+(int)roh21) += 1; pointer2 += L;
    IR10 = (int)(roh10*4194304.0);    // R0=int(ρ0×222)
    IR11 = (int)(roh11*4194304.0);    // R1=int(ρ1×222)
    IR20 = (int)(roh20*4194304.0);    // R'0=int(ρ'0×222)
    IR21 = (int)(roh21*4194304.0);    // R'1=int(ρ'1×222)
    //////////// FIHT3 main loop ////////////
    for(int lk=0; lk<K/2-2; lk++){    // k=0,1,...,[K]/2-3
        IR1= IR10+(IR21>>6);          //Rk+2
        IR2= IR20-(IR11>>6);          //R'k+2
        IR10=IR11; IR20=IR21;         //Rk, R'k
        IR11=IR1; IR21=IR2;           //Rk+1, R'k+1
        if(*(pointer1+(IR1>>22)) < 255) // over flow check
            *(pointer1+(IR1>>22)) += 1; //(θk+2, ρk+2)count up
        if(*(pointer2+(IR2>>22)) < 255) // over flow check
            *(pointer2+(IR2>>22)) += 1; //(θk+2+π/2, ρ'k+2)count up
        pointer1 += L; pointer2 += L;  //pointer count up
    }
}

GlobalFree(pointer1);
```

沼田 宗敏

(非会員) 1984 年富山大学理学部物理学科卒業。2006 年富山県立大学大学院工学研究科博士後期課程修了。博士 (工学)。1984 年よりコマツ NTC グループ (株) ロゼフテクノロジー, コマツ NTC (株) 等に勤務。2004 年より中京大学人工知能高等研究所員兼任。2006 年より富山県立大学工学部非常勤講師, 中京大学情報理工学部非常勤講師などを歴任, 2009 年より中京大学情報理工学部教授。主たる研究テーマは, 人工知能, 機械学習, 知能機械学, コンピュータグラフィックス, 画像処理。電子情報通信学会, 情報処理学会, 精密工学会各会員。共著書に, 最新コンピュータグラフィックスがわかる (技術評論社) など。

奥水 大和

(上級会員) 1975 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。工学博士。名古屋大学助手, 名古屋市工研を経て, 現在中京大学情報理工学部長。画像処理, マシンビジョン, パターン認識, 顔研究, 画像デジタル化理論, Hough 変換など画像処理基礎理論, およびそれらの産業応用研究に従事。電子情報通信学会 (教科書委員), SICE (PM 部会顧問), JSPE (IAIP 副委員長), 日本顔学会 (理事), 各種国内・国際学会 (SSII, ViEW, DIA/QCAV, FCV など) で活動中。共著書に, 画像処理基本技法 (技術評論社), コンピュータビジョン (近代科学社), 実践画像処理 (Springer-Verlag 東京), 信号処理 (オーム社) など。ViEW2002 小田原賞 (IAIP, JSPE) など受賞。