Design of Model Reference Adaptive Control for Nonlinear Multivariable Systems

Yasuhiko Mutoh Member (Sophia University, y_mutou@sophia.ac.jp)

Keywords: nonlinear system, multivariable system, interactor, adaptive control, a prior information

A goal of this paper is to construct the adaptive output tracking controller for nonlinear multivariable systems with unknown parameters. For this purpose, an interactor for a nonlinear system is used as a prior information of the unknown plant. If the interactor is diagonal, the problem becomes straightforward extension of the adaptive control problem for scalar systems. However, in general, as in the linear case, the interactor is a lower left triangular polynomial matrix whose off-diagonal elements depend on the unknown plant parameters, which is the most difficult point in the multivariable case.

The m-input m-output nonlinear unknown plant considered in this paper is as follows.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

A polynomial matrix of the differential operator p with coefficient matrices, $N_i \in R^{m \times m}$

$$N(p) = N_w p^w + N_{w-1} p^{w-1} + \dots + N_0$$

is an interactor of the above non-linear system if it satisfies the following equation.

$$N(p)y(t) = a(x) + \Lambda(x)u(t)$$

Here, $\Lambda(x)$ is a nonsingular matrix. In this paper, first, using the interactor algorithm, the structure of the interactor of the unknown plant is estimated, and then, based on this knowledge, the adaptive output tracking control system will be designed by applying the well developed MRACS technique for linear systems.

What we can do using this technique can be shown as the following example.

[Example] Consider the unknown nonlinear plant (1) with

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_1 x_1^2 + a_2 x_2 \\ a_3 x_1 x_3 \\ -a_4 x_1 + a_5 x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_6 \\ a_7 & 0 \\ a_8 & 0 \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Fig. 1. Output of the Reference Model

Fig. 2. Plant Output (Adaptive Control)

where $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $y = [y_1, y_2]^T$, $u = [u_1, u_2]^T$ are the state, the output and the input respectively. The parameters, $a_1 \sim a_8$, are unknown constants whose true values are all 1. According to the interactor algorithm, the following is the estimate of the structure of the interactor of this unknown plant,

$$N(\psi, p) = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ \psi_1 p^3 + \psi_2 p^2 & p^3 + 6p^2 + 11p + 6 \end{bmatrix}$$

where ψ_1 and ψ_2 are unknown parameters which we have to estimate in the adaptive controller. Then using $N(\psi, p)$, the MRACS for the system (1) can be designed. Fig.1 and Fig.2 show the reference output signals and adaptive output signals respectively in the simulation. This shows the validity of the proposed adaptive system.

非線形多変数系に対する MRACS の一設計法

正 員 武藤 康彦*

Design of Model Reference Adaptive Control for Nonlinear Multivariable Systems

Yasuhiko Mutoh*, Member

A goal of this paper is to construct the adaptive output tracking controller for nonlinear multivariable systems with unknown parameters. For this purpose, an interactor for nonlinear systems is used as a prior information of the unknown plant. If the interactor is diagonal, the problem becomes straightforward extension of the adaptive control problem for scalar systems. However, as in the linear case, the interactor is a lower left triangular polynomial matrix whose off-diagonal elements depend on the unknown parameters of the plant. In this paper, first, using the interactor algorithm, the structure of the interactor of the unknown plant is estimated, and then, the well developed MRACS technique for linear systems will be applied. Some simulation results will be presented to show the validity of this design concept. This shows that the framework for designing the MRACS for linear multivariable systems can be also used for the nonlinear multivariable system.

キーワード：非線形系，多変数系，インタラクタ，適応制御，事前情報

Keywords: nonlinear system, multivariable system, interactor, adaptive control, a prior information

1. まえがき

本論文では非線形多変数系に対するモデル規範型適応制御系 (MRACS) の一設計法について述べる。近年、アファイン型の非線形システムについて多くの研究が行われ⁽⁷⁾⁽⁸⁾、バックステッピング手法に基づいた適応安定化制御に関していくつかの結果が得られている。

一方、非線形システムにおいても相対次数が定義されることから、出力を相対次数分だけ微分することにより、入力と出力の関係を表す式を導出し、これに線形系に対して培ってきた MRACS の手法^{(2)~(6)}を適用することが考えられる。さらに、あるクラスの非線形多変数系に対しては相対次数を拡張したインタラクタ⁽¹⁾⁽⁴⁾を定義することができるため、これを利用して MRACS を構成することが考えられる。

本論文は、線形多変数系に対して従来より利用されてきた MRACS の設計のための枠組みが、あるクラスの非線形多変数系に対してそのまま適用可能であることを示すことを目的としている。このクラスとは静的状態フィードバックにより入出力線形化可能なアファイン型の非線形多変数

系である。このクラスのプラントは線形系と同様に定数係数行列を持つインタラクタが得られるため、未知パラメータが線形に含まれている場合は“generic”な意味でインタラクタの構造を推定することができる。一般にインタラクタは左下三角行列となり、対角部分は推定により得られた次数を持った任意安定多項式、非対角部分はプラントのパラメータとインタラクタの対角成分に依存して決まる未知パラメータを含んでいる。構造推定されたインタラクタを用いて、プラントの別表現を得るところまでが、未知プラントの事前情報を取り扱う本論文の中心的なテーマとなる。

一旦、プラントの別表現が得られれば、これに基づいて適応系を構成することができる。プラントが未知パラメータを線形に含んでいる場合、プラントの別表現は未知パラメータベクトルとリグレッサベクトルの積で表されることから、線形系で培ってきた様々な形態の適応系を適用することが可能となる。

ここでは、構造が比較的簡単であるモデルマッチングのためのコントローラを用いて、インタラクタに含まれる未知パラメータとコントロールパラメータに対してパラメータ調整機構を適用して間接型の非線形多変数系の MRACS を構成する。以下、第2章では問題の記述、第3章で非線形多変数系のインタラクタについて簡単にまとめ、第4章でインタラクタアルゴリズムについて記述する。これは、未知プラントのインタラクタの構造推定をするときの道具と

* 上智大学理工学部機能創造理工学科
〒102-8554 東京都千代田区紀尾井町7-1
Dept. of Engineering and Applied Sciences, Sophia University
7-1 Kioicho, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8554

なる。適応系の構成については、第5章において最初に概略を述べてから、例題を用いて設計手順を記述し、最後にシミュレーション結果を示す。

2. 問題の記述

未知プラントとして、次式で示される m 入力 m 出力の非線形多変数系を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $x \in R^n$, $u, y \in R^m$ はそれぞれ状態変数、入力、出力である。また、関数 $f(x) \in R^n$, $g(x) \in R^{n \times m}$, $h(x) \in R^m$ は必要なだけ微分できるものとし、未知パラメータは線形に含まれているものとする。さらに、システムは静的な状態フィードバックにより線形化可能なクラスを対象とする。ここで、規範入力 $r \in R^m$ に対して次式で表される規範モデルを考えよう。

$$y_d = G_d(p)r \dots\dots\dots (2)$$

$G_d(p)$ は p を微分演算子として表した伝達関数である。制御目的は規範入力 r に対してプラント (1) の出力 y が規範モデルの出力 y_d に追従するような入力 u を適応的に構成することである。

3. 非線形多変数系のインタラクタ

ここでは、非線形系多変数系のインタラクタについて簡単にまとめておく。

〔定義 1〕 定数行列 $N_i \in R^{m \times m} (i = 1, 2, \dots, \omega)$ を係数に持つ多項式行列

$$N(p) = N_\omega p^\omega + N_{\omega-1} p^{\omega-1} + \dots + N_0 \dots (3)$$

が次式を満足するとき $N(p)$ を領域 Ω でシステム (1) のインタラクタと呼ぶ。

$$N(p)y = a(x) + \Lambda(x)u, \quad \forall x \in \Omega \dots\dots\dots (4)$$

$\Lambda(x) \in R^{m \times m}$ はすべての $x \in \Omega$ で正則な行列である。以下では簡単のため、 Ω は全空間として議論を進める。

出力関数 $h(x)$ のリー微分を用いて次式により行列 $T_i(x) \in R^{m \times m} (i = 1, 2, \dots)$ を定義する。

$$T_i(x) = L_g L_f^{i-1} h(x) \quad (i = 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (5)$$

さらに、この $T_i(x)$ を用いて次のブロック Toeplitz 行列 $\Gamma_i(x) (i = 1, 2, \dots)$ を定義する。

$$\Gamma_1(x) = T_1^T(x)$$

$$\Gamma_i(x) = \begin{bmatrix} T_1^T(x) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ T_i^T(x) & \dots & T_1^T(x) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

($i = 2, 3, \dots$)

このとき、インタラクタに関して以下の定理は基本的で

ある⁽⁴⁾。

〔定理 1〕 (3) 式で表される $N(p)$ がシステム (1) のインタラクタとなるための必要十分条件は次式を満たすような正則行列 $\Lambda(x) \in R^{m \times m}$ が存在することである。

$$\Gamma_w(x) \begin{bmatrix} N_w^T \\ N_{w-1}^T \\ \vdots \\ N_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Lambda^T(x) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

(7) 式をインタラクタ方程式と呼ぶ。 $N(p)$ の次数 w は次の定理により決まる。

〔定理 2〕 (3) 式で表される $N(p)$ がシステム (1) のインタラクタであるとする。このとき w は次式を満たす整数 k の最小値である。

$$\text{rank} \Gamma_k(x) = \text{rank} \Gamma_{k-1}(x) + m \dots\dots\dots (8)$$

さて、システム (1) がインタラクタ $N(p)$ を持っているとき、システムの入出力は (4) 式と表されることから、状態フィードバック

$$u(t) = -\Lambda^{-1}(x)a(x) + \Lambda^{-1}(x)v(t) \dots\dots\dots (9)$$

により、外部入力 $v(t)$ から出力 $y(t)$ までは

$$N(p)y = v \dots\dots\dots (10)$$

と表され、この閉ループ伝達行列は $N^{-1}(p)$ となる。これを非線形系多変数系の逆インタラクタ化と呼ぶ。ここで、

$$a(x) = [N_0, N_1, \dots, N_w] \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^w h(x) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(x) = [N_1, N_2, \dots, N_w] \begin{bmatrix} L_g h(x) \\ L_g L_f h(x) \\ \vdots \\ L_g L_f^{w-1} h(x) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

である。

非線形システム (1) に対して、状態フィードバック (9) を用いた全システムは以下の形をしたシステムに変数変換とフィードバック等価であることが知られている⁽⁸⁾。

$$\dot{z} = Fz + Bv \dots\dots\dots (12)$$

$$\dot{\xi} = \psi(\xi, z) \dots\dots\dots (13)$$

ここで、(12) 式は (10) 式の実現であり、 $z \in R^q$, $\xi \in R^{(n-q)}$ である。ただし、 q はシステム (1) の相対次数の和に相当しており、 $N(p)$ の行列式の次数である。また、一般に $q \leq n$ であるので、隠れたモードが (13) 式であり、

$$\dot{\xi} = \psi(\xi, 0)$$

はシステム (1) のゼロダイナミクスである。

したがって、閉ループが内部安定であるためにはシステム (1) のゼロダイナミクスが ISS (有界入力に対して状態変数が有界) である必要がある。これは線形多変数系が最小位相系と仮定することに対応している。

$N(p)$ が対角であれば多変数系の取り扱いが格段に容易となる。非線形多変数系でよく定義される「ベクトル相対次数」とは $N(p)$ が対角となる場合の対角要素の多項式の次数であり、このとき多変数制御系の設計はスカラ系を並べたものとして取り扱える。しかし、一般的に $N(p)$ は左下三角行列として得られ、このことが多変数系の制御問題を複雑にしている。特に、適応制御問題では、 $N(p)$ の対角要素はその次数さえ決まれば任意の安定多項式に選ぶことができるが、非対角要素はインタラクタ方程式を解いて得られるので、制御対象が未知パラメータを含んでいる場合は $N(p)$ も未知となり、さらに問題を複雑にしている。これは線形多変数系と同じ状況である。

4. インタラクタの構造推定

インタラクタの次数構造は Γ_w の列ベクトルの線形独立性の構造により決まる。この線形独立な列ベクトルを探す手順をインタラクタ・アルゴリズムという。これは、未知パラメータを含むシステムに対するインタラクタの構造推定を行うためには必須のプロセスであるので、この節でまとめておく。以下では記述を簡単にするために最初から w が決まっているとしてアルゴリズムを説明する。詳細は文献 (4) を参照されたい。

(6) 式より、 Γ_i は i 個の列ブロックよりなり、各列ブロックは m 個の列ベクトルよりなっている。ここで、 $\gamma_j^k(x)$ により Γ_i の右から第 k 番目の列ブロックにおいて、左から第 j 番目の位置にある列ベクトルを表すものとする。以下では簡単のため i にかかわらずこの表現を用いることにする。

[インタラクタアルゴリズム]

[Step 1] $\Gamma_1(x)$ の左から順に列ベクトルの独立性をチェックして、必要なら列の並べ替えを行うことにより、左から連続的に独立な列ベクトルが並び、残りはこれらのベクトルに対して従属なベクトルとなるようにする。この独立な列ベクトルの数を q_1 とする。これらの独立な列ベクトルを改めて、

$$\gamma_1^1(x), \gamma_2^1(x), \dots, \gamma_{q_1}^1(x)$$

と表し、残りのベクトルを $\gamma_{q_1+1}^1(x), \dots, \gamma_m^1(x)$ とする。ここで行った列ベクトルの並べ替えとは、すべての $T_i^T(x)$ の対応する列の並べ替えを意味し、これは対応する出力信号の並べ替えを意味する。また、以下で列の並べ替えを行った場合も並べ替えた後の列ベクトルを改めて $\gamma_j^k(x)$ と表記する。これは、列ベクトルを並べ替える毎に添え字が入れ替わり、記述が煩雑になるのを防ぐためであり、適当に並べ替えたものを最初から考えればよいので、並べ替えは必要ないとしても一般性は失わない。

[Step 2] $\Gamma_2(x)$ の第 2 列ブロックについて考える。 $\Gamma_2(x)$ の構造から第 2 列ブロック中の左から q_1 個の列ベクトルは自動的に第 1, 第 2 列ブロックにおける独立な列ベクトルとなる。さらに、第 2 列ブロック中の残りの列ベクトルについて必要なら列の並べ替えを行って、第 2 列ブロック中に左から連続的に q_2 個 ($q_2 \geq q_1$) の独立な列ベクトル (前 Step で得られた独立ベクトルに対しても独立) を並べ、これらを改めて

$$\gamma_1^2(x), \gamma_2^2(x), \dots, \gamma_{q_2}^2(x)$$

と書く。 $\gamma_{q_2+1}^2, \dots, \gamma_m^2$ を第 2 列ブロック中の残りの列ベクトルとし、これらは互いに独立なベクトル $\gamma_1^1(x), \dots, \gamma_{q_1}^1(x), \gamma_1^2(x), \dots, \gamma_{q_2}^2(x)$ に対して従属な列ベクトルである。また、ここで行った列ベクトルの並べ替えも [Step 1] と同様に出力信号の並べ替えを意味している。

このような手順を繰り返して、[Step w] で初めて $q_w = m$ となったとし、ここでアルゴリズムを終了する。このとき、

$$q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{w-1} < q_w = m \dots \dots \dots (14)$$

となっている。

Step w までを終えた後、各列ブロックにおける第 j 番目の列ベクトルの集合

$$\gamma_j^1(x), \gamma_j^2(x), \dots, \gamma_j^w(x) \quad j = 1, \dots, m$$

を第 j 系列の列ベクトルと呼ぶ。さらに、第 j 系列の列ベクトルのうち、インタラクタアルゴリズムにより最初に独立ベクトルとして選ばれた列ベクトルを $\gamma_j^{k_j}(x)$ とする。明らかに、

$$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{m-1} \leq k_m = w \dots \dots \dots (15)$$

が成立する。このとき、インタラクタの次数構造に関して次のような性質がある⁽⁴⁾。

[性質 1] インタラクタは $w (= k_m)$ 次の行プロパーな左下三角多項式行列となり、第 j 対角要素は k_j 次の任意多項式である。また、第 j 行の行次数も k_j 次である。さらに、対角要素を決めると非対角要素はインタラクタ方程式により一意に定まる。さらに、インタラクタ方程式によれば、インタラクタの非対角要素の多項式は 1 次の項と定数項が任意であり、従って二つの項とも 0 とおける。(この部分は任意である。)

5. 非線形多変数系の MRACS

この節では非線形多変数系に対する MRACS の構成法について述べる。ここでは、まず、概略を述べてから例題を用いて実際に MRACS を構成する手法を述べる。

〈5・1〉 MRACS 構成の概略 制御対象は未知パラメータを持っているので $N(p)$, $a(x)$, $\Lambda(x)$ はそれぞれ $N(\psi, p)$, $a(\theta, x)$, $\Lambda(\phi, x)$ と書くことができる。ここで、 ψ , θ , ϕ は未知パラメータベクトルとする。今、真値が分かっているとすれば、これらは (4) 式、すなわち

$$N(\psi, p)y = a(\theta, x) + \Lambda(\phi, x)u \dots\dots\dots (16)$$

を満たしているので (9) 式よりフィードバックおよびフィードフォワードを

$$\begin{aligned} u &= \Lambda^{-1}(\phi, x)\{-a(\theta, x) + v\} \\ v &= N(\psi, p)G_d(p)r \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

とおくことにより、規範入力（コマンド） r から出力 y までの閉ループ伝達行列は $G_d(p)$ となりモデルマッチングが構成される。ここで、 $G_d(p)$ は $N(\psi, p)G_d(p)$ がプロパーとなるように選ばなくてはならない。

一方、これらのパラメータが未知である場合は、それらの推定値 $\hat{\psi}(t)$, $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ を用いて適応フィードバック、適応フィードフォワードを

$$\begin{aligned} u &= \Lambda^{-1}(\hat{\psi}(t), x)\{-a(\hat{\theta}(t), x) + v\} \\ v &= N(\hat{\phi}(t), p)G_d(p)r \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

により構成する。また、各パラメータ推定については以下のように行う。まず、

$$N(\psi, p) = N_{Diag}(p) + N_T(\psi, p) \dots\dots\dots (19)$$

と分解する。 $N_{Diag}(p)$ は $N(\psi, p)$ の対角行列部分であり、対角要素は推定された次数の任意安定多項式である。また、 $N_T(\psi, p)$ は $N(\psi, p)$ の非対角要素よりなる行列であり、未知パラメータはすべてこの行列に含まれる。これより、(16) 式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} N_{Diag}(p)y &= -N_T(\psi, p)y + a(\theta, x) + \Lambda(\phi, x)u \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1^T Z_1(t) \\ \vdots \\ \Phi_m^T Z_m(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

この式の二つ目の等号は制御対象の未知パラメータが線形に含まれているという仮定から成立する。ここで、 $Z_i(t)$ は適当なりグレッサベクトルであり、 Φ_i は対応する未知定数パラメータベクトルである。 Φ_i は ψ , θ , ϕ より構成されている。ここで、

$$\begin{aligned} N_{Diag}(p) &= \text{diag}[n_1(p), n_2(p), \dots, n_m(p)] \\ &\dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

とおくと、(16) 式は次のように表される。

$$y_i = \Phi_i^T \frac{1}{n_i(p)} Z_i(t), \quad i = 1, \dots, m \dots\dots\dots (22)$$

未知パラメータベクトル Φ_i に対する推定パラメータベクトルを $\hat{\Phi}_i(t)$ として、次の推定器を導入する。（ $\hat{\Phi}_i(t)$ は $\hat{\psi}(t)$, $\hat{\theta}(t)$, $\hat{\phi}(t)$ より構成される。）

$$\xi_i = \hat{\Phi}_i^T(t) \frac{1}{n_i(p)} Z_i(t), \quad i = 1, \dots, m \dots\dots\dots (23)$$

推定誤差

$$e_i = \xi_i - y_i \dots\dots\dots (24)$$

を定義すると、同定理論より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\Phi}_i(t) &= -G_i e_i \frac{1}{n_i(p)} Z_i(t), \\ G_i^T &= G_i > 0, \quad i = 1, \dots, m \dots\dots (25) \end{aligned}$$

はこの場合のパラメータ調整則のひとつである。

【5・2】 例 題 次式で表される 2 入力 2 出力で 4 次の非線形系を考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $x \in R^4$, $u, y \in R^2$ であり、 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ はそれぞれ次式で表されるものとする。

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{bmatrix} a_1 x_1^2 + a_2 x_2 \\ a_3 x_1 x_3 \\ -a_4 x_1 + a_5 x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_6 \\ a_7 & 0 \\ a_8 & 0 \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ここで、各変数は $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $y = [y_1, y_2]^T$, $u = [u_1, u_2]^T$ とする。また、パラメータ $a_1 \sim a_8$ は未知定数であり、 a_i の真値はすべて 1、すなわち

$$a_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \dots\dots\dots (28)$$

とする。このように、ここで対象とするシステムは未知パラメータを線形で含んでいるようなシステムである。

$h(x)$ のリー微分を用いて $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $\dots$ を求めると以下のようになる。

$$\begin{aligned} T_1(x) &= L_g h(x) = \begin{bmatrix} a_7 & 0 \\ a_8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \\ T_2(x) &= L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} a_5 a_7 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T_3(x) &= L_g L_f^2 h(x) = \begin{bmatrix} a_5^2 a_7 & -a_2 a_4 a_6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここで記号 “*” は非零未知定数とする。これらを用いてインタラクタアルゴリズムを忠実に実行すると次のようになる。

[Step 1] Γ_1 を考える。

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= T_1^T = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \gamma_1^1 \end{aligned}$$

であるので、“↑”の列 $\gamma_1^1(x)$ が “generic” な意味で独立列として選ばれる。これより $q_1 = 1$ となる。

[Step 2] Γ_2 を考える。

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} T_1^T & 0 \\ T_2^T & T_1^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \dots (31)$$

$\uparrow \qquad \uparrow$
 $\gamma_1^2 \quad \gamma_1^1$

であるので、[Step 1] の結果と行列 Γ_2 の構造より $\gamma_1^2(x)$ が自動的に独立列として選ばれる。 Γ_2 にはこれ以外には独立列となる列ベクトルは存在しない。(複数の列ベクトルは各ベクトルから行に重複なく非零要素が選べる時 “generic” な意味で互いに独立であるという。) このステップにおいて $q_2 = 1$ が得られる。

[Step 3] Γ_3 を考える。

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} T_1^T & 0 & 0 \\ T_2^T & T_1^T & 0 \\ T_3^T & T_2^T & T_1^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\gamma_1^3 \quad \gamma_2^3 \quad \gamma_1^2 \quad \gamma_1^1$
 $\dots\dots\dots (32)$

であるので、 Γ_3 の構造より $\gamma_1^3(x)$ が自動的に独立列として選ばれる。さらに、 $\gamma_2^3(x)$ も “generic” な意味で独立な列として選ばれる。すなわち、

$$q_3 = 2(=m) \dots\dots\dots (33)$$

となり、[Step 3] ではじめて

$$\text{rank}\Gamma_3 = \text{rank}\Gamma_2 + 2 = \text{rank}\Gamma_2 + m \dots\dots (34)$$

となるので、 $w = 3$ が得られる。また、[Step 3] までで得られた独立列の組み合わせより

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 3(=w) \dots\dots\dots (35)$$

が得られる。従って、性質 1 よりシステム (26)(27) に対するインタラクタは 3 次の行プロパな左下三角多項式行列

$$N(\psi, p) = \begin{bmatrix} n_1(p) & 0 \\ n_{21}(\psi, p) & n_2(p) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (36)$$

となる。ここで、 $n_1(p)$ 、 $n_2(p)$ はそれぞれ $k_1 = 1$ 次、 $k_2 = 3$ 次の任意安定多項式であり、 $n_{21}(\psi, p)$ は定数項と 1 次の項が 0 である未知係数を持った高々 3 次の多項式である。これらの多項式をここでは以下のように設定する。

$$n_1(p) = p + 1$$

$$n_2(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6 \dots\dots\dots (37)$$

$$n_{21}(\psi, p) = \psi_1 p^3 + \psi_2 p^2$$

ここで、 ψ_1 、 ψ_2 はインタラクタ方程式を満たす未知定数パラメータであり、未知パラメータ a_i の関数である。インタラクタを用いると、非線形系 (26)、(27) の入出力は (4) 式を満たすので、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} n_1(p) & 0 \\ n_{21}(\psi, p) & n_2(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = a(\theta, x) + \Lambda(\phi, x) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (38)$$

この例題では、

$$L_f h(x) = \begin{bmatrix} -a_4 x_1 + a_5 x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_f^2 h(x) = \begin{bmatrix} -a_4 a_5 x_1 - a_4 a_2 x_2 + a_5^2 x_3 - a_1 a_4 x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_f^3 h(x) = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} -a_4 a_5^2 x_1 - a_2 a_4 a_5 x_2 + a_5^3 x_3 \\ -a_1 a_4 a_5 x_1^2 - 2a_1^2 a_4 x_1^3 \\ -2a_1 a_2 a_4 x_1 x_2 - a_2 a_3 a_4 x_1 x_3 \end{array} \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるので、(11) 式より

$$a(x) = \begin{bmatrix} \theta_1^T \zeta_1(t) \\ \theta_2^T \zeta_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\zeta_1(t) = [x_1, x_3]^T$$

$$\zeta_2(t) = [x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1^3, x_1 x_2, x_1 x_3]^T \dots\dots\dots (39)$$

と書ける。ここで $\theta_i (i = 1, 2)$ は対応する未知パラメータベクトルである。さらに、(11)(29)(37) 式より

$$\Lambda(x) = \begin{bmatrix} a_7 & 0 \\ 11a_8 + \psi_2 a_5 a_7 + \psi_2 a_5^2 a_7 & \phi_1 a_2 a_4 a_6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

となることから、新たに未知定数 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 を導入して

$$\Lambda(\phi, x) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

とおく。

以上より (36) 式は次のように書ける。

$$\begin{cases} y_1 = \Phi_1^T \frac{1}{n_1(p)} Z_1(t) \\ y_2 = \Phi_2^T \frac{1}{n_2(p)} Z_2(t) \end{cases} \dots\dots\dots (42)$$

ここで、

 Fig. 1. Reference Input Signals (r_1 and r_2)

 Fig. 3. Output Signals of the Plant (y_1 and y_2)

 Fig. 2. Output Signals of the Reference Model (y_{d1} and y_{d2})

 Fig. 4. Output Error Signals (e_1 and e_2)

$$Z_1(t) = [x_1, x_3, u_1]$$

$$Z_2(t) = \left[\frac{p^3}{n_2(p)} y_1, \frac{p^2}{n_2(p)} y_1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1^3, x_1 x_2, x_1 x_3, u_1, u_2 \right]$$

であり、 $\Phi_1 = [\theta_1^T, \phi_1]^T$ 、 $\Phi_2 = [-\psi_1, -\psi_2, \theta_2^T, \phi_2, \phi_3]^T$ は対応する未知パラメータベクトルである。この例題ではこれらの真値は次の通りである。

$$\Phi_1 = [-1, 2, 1]$$

$$\Phi_2 = [1, 5, 6, 6, -6, 6, 2, 2, 1, 5, 1]$$

(42) 式に対してパラメータ同定器を

$$\begin{cases} \xi_1 = \hat{\Phi}_1^T(t) \frac{1}{n_1(p)} Z_1(t) \\ \xi_2 = \hat{\Phi}_2^T(t) \frac{1}{n_2(p)} Z_2(t) \end{cases} \dots\dots\dots (43)$$

この例では $n_1(p)$ が 1 次 (安定) 多項式であるので上式のようにおいた。パラメータ調整則は

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Phi}}_1(t) = -G_1 e_1 \frac{1}{n_1(p)} Z_1(t), & e_1 = y_1 - \xi_1 \\ \dot{\hat{\Phi}}_2(t) = -G_2 e_2 \frac{1}{n_2(p)} Z_2(t), & e_2 = y_2 - \xi_2 \end{cases} \dots\dots\dots (44)$$

これらの調整則は

$$V(t) = \sum_{i=1}^2 (\hat{\Phi}_i - \hat{\Phi}_i(t))^T G_i^{-1} (\hat{\Phi}_i - \hat{\Phi}_i(t)) \dots\dots\dots (45)$$

 Fig. 5. Adaptive Input Signals (u_1 and u_2)

をリアプノフ関数として用いている。ここでは、以下の数値例を用いたシミュレーション結果を示す。

$$\hat{\Phi}_1(0) = [-4, 6, 3]$$

$$\hat{\Phi}_2(0) = [2, 3, 2, 2, -2, 2, 1, 2, 1, 10, 2]$$

$$G_1 = \lambda I, \quad G_2 = \lambda I, \quad \lambda = 10$$

規範モデルは次式とした。

$$\begin{bmatrix} y_{d1} \\ y_{d2} \end{bmatrix} = \frac{1}{n_2(p)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (46)$$

規範入力、規範出力、プラント出力、出力誤差、適応入力をそれぞれ図 1～図 5 に示す。ここで示した例題は、平均的なシミュレーション結果である。規範入力の一つに矩

形波を用いているため、不連続に変化する箇所で制御系が変動しているが、規範入力に連続関数を利用した場合は応答はかなり良好になる。

なお、(36)(37)式よりこのプラントの相対次数は4となり、次数も4であることから、ゼロダイナミクスを持たず、いわゆる「最小位相性」の仮定は満足している。

6. あとがき

本論文では線形多変数系に対する MRACS 設計のフレームワークが静的状態フィードバックにより入出力線形化可能なアファイン型の非線形多変数系にたいして適用可能であることを示した。すなわち、このクラスの非線形系では定数係数行列を持つインタラクタが得られることから、これを利用して未知プラントの事前情報を使いながら適応系のためのプラントの別表現を得る手法について述べた。一旦、この別表現が得られれば、ここで利用した適応系ばかりではなく線形系で培ったいくつかの適応系が利用できることとなる。

なお、ここでは適応系全系の信号の有界性についての証明については述べていない。(12)(13)式で表わされるシステムはパラメータ調整を除いたプラントを表しているが(フィードバック後)、ここではプラントの入出力関係を規範モデルに合わせることを目指しているの、(12)式のみが考察の対象になっている。すなわちゼロダイナミクスに係する(13)式は無視して適応系を構成しているので、この理論的考察がまだ不完全なためである。一般的にこの種の非線形安定化問題は、(13)式を状態変数 z を用いて安定化するためのリアプノフ関数とその微分した関数が既知であるという仮定をした上でバックステッピングを利用することが多いが、適応系の場合はその仮定は極めて大きいので、この点については今後の課題としたい。

(平成 20 年 6 月 6 日受付, 平成 20 年 12 月 28 日再受付)

文 献

- (1) W.A. Wolovich and P.L. Falb: "Invariants and Canonical Forms under Dynamic Compensation", SIAM J. Control and Optimization, Vol.14, pp.996-1008 (1976)
- (2) L. Dugard, G.C. Goodwin, and C.E.de Souza: "Prior Knowledge in Model Reference Adaptive Control of Multiinput Multioutput Systems", *IEEE, Trans. on Automatic Control*, Vol.AC-29, pp.761-764 (1984)
- (3) H. Elliott and W.A. Wolovich: "Parametrization Issues in Multivariable Adaptive Control", *Automatica*, Vol.25, pp.533-545 (1984)
- (4) Y. Mutoh and R. Ortega: "Interactor Structure Estimation for Adaptive Control of Discrete-Time Multivariable Nondecouplable Systems", *Automatica*, Vol.29, pp.635-647 (1993)
- (5) P.W. Gibbens, C.A. Schwartz, and Minyue Fu: "Achieving Diagonal Interactor Matrix for Multivariable Linear Systems with Uncertain Parameters", *Automatica*, Vol.AC-29, No.6, pp.1547-1550 (1993)
- (6) R.P. Singh and K.S. Narendra: "Prior Information in the Design of Multivariable Adaptive Controllers", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.AC-29, pp.1108-1111 (1985)
- (7) A. Isidori: "Nonlinear Control Systems", Springer-Verlag, New York (1989)
- (8) R. Marino and P. Tomei: "Nonlinear Control Design", Prentice-Hall (1995)

武 藤 康 彦 (正員) 1977 年 3 月上智大学大学院修士課程修了。同年三菱スペースソフトウェア(株)入社。1981 年上智大学大学院博士課程修了。同年上智大学理工学部助手。同講師, 助教授を経て現在教授。Saskatchewan 大学(1983 年, カナダ), CNRS-UTC (1995 年, フランス), CNRS-SUPELEC (2006 年, フランス)の客員研究員。適応制御, 時変系の制御, 多変数制御系, 非線形制御制御系などの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会, IEEE の会員。