状態と決定の数が多いマルコフ過程の 効率的な学習制御

正員 佐藤 光 男 (東 北 大)

正員 阿 部 健 一 (豊橋技科大)

正員 竹 田 宏 (東 北 大)

1. ま え が き

未知パラメータを含む確率システムの学習制御モデルとして、Two-armed bandit 問題、それを更に一般化した Multiarmed bandit 問題、学習オートマトン、および未知遷移確率の推定を伴うマルコフ決定問題などがある⁽¹⁾⁻⁽¹⁰⁾。これらのうち、他のモデルをその特殊ケースとして含むマルコフ決定モデルは種々の実際的な問題に応用できることが知られているので、未知遷移確率の推定を含むマルコフ決定問題は理論的な面からだけでなく実際の面から見ても興味深いものである。ところで、これらはいずれも学習の最終目標を最適な制御入力への漸近的な到達においている。しかし、多くの場合、それを実現するのは非常に困難である。というのは、各制御入力が一方向では推定のための入力信号でもあることの結果として、未知パラメータの推定とシステムの制御とが互いに矛盾する関係にあるからである。従って、いかにこの矛盾を解決し、いかに巧妙に最適制御入力への収束性を保証するかがこれらに関する研究の主題となっている。

未知遷移確率の推定を伴うマルコフ決定問題に関しては従来より種々の学習方式の研究がなされている⁽⁴⁾⁻⁽¹⁰⁾。これらのうち、Martin 氏⁽⁴⁾および Borkar 氏ら⁽⁵⁾の示した方式は、最適制御入力への収束性を保証するという意味では必ずしも最適でないことが判明しているが⁽⁵⁾⁽¹³⁾、それ以外はいずれも独自の方法で推定と制御の矛盾を解決し、上記の意味での最適性を実

現している。これら最適なもののうち El-Fattah 氏⁽⁶⁾、Kumar 氏ら⁽⁷⁾、および著者ら⁽⁸⁾の提案した方式はアルゴリズムの形が複雑であったり、あるいは、実際の運用に当って計算上の大きな困難を伴う。これに対して文献(10)の方式ではこれらの難点がかなり改善されている。この方式は ϵ -最適性を満たす文献(9)の方式と同じ考えに基づくもので、その特徴は制御性能と推定精度をそれぞれ反映する二つの項からなる評価基準を制御入力の選択のために導入したことにある。この評価基準が単純な形をなすことから、この方式の運用上の諸操作が従来の方式に比べてかなり簡単化される。

文献(9)あるいは文献(10)の方式でも、しかし、システムの状態やとりうる決定の数が大きくなるにつれて実際の運用に伴う計算量が急速に増大する。従って、そのような場合においては、Howard 氏⁽¹¹⁾の政策反復法に類するような何らかの効率的な手法が必要となろう。このような観点から、本論文では、モデルの規模が大きい場合にも十分対処できるように文献(9)あるいは(10)の方式を本来の制御性能を損わずに更に簡単化した方式を構成する。この簡単化は評価基準を政策反復法などの利用に適した形に改めることを意味し、このことにより特にモデルの規模が大きい場合の計算量が大幅に軽減されることになる。本論文ではまた、理論的興味の観点から、この評価基準を用いる方式が単に最適であるだけでなく、制御変数の値のとり方によって ϵ -最適にもなることを証明する。

2. 問題の記述

本論文では Howard 氏⁽¹¹⁾らによって定式化されたごく基本的なマルコフ決定モデルを扱うので、まず、それについて説明する。システムのとりうる状態が全

Efficient Learning Control of Markov Chains with Many States and Decision. By Mitsuo Sato, Member (Tohoku University), Kenichi Abe, Member (Toyohashi University of Technology), & Hiroshi Takeda, Member (Tohoku University).

佐藤光男: 正員, 東北大学工学部電気工学科

阿部健一: 正員, 豊橋技術科学大学情報工学科

竹田 宏: 正員, 東北大学工学部電気工学科

部で N 通りあるとし ($N < \infty$), その状態の集合を $S = \{1, \dots, N\}$ で表す。各時刻 $t = 0, 1, 2, \dots$ ごとにシステムはある状態からある状態に確率的に遷移し, そのたびにある利得が得られる。ただし, 各状態 i に対して決定の集合 $\Gamma_i = \{1, \dots, K_i\}$ が割り当てられており ($K_i < \infty$), その中から一つの決定を選ぶことによって遷移確率と利得の値を変えられるものとする。例えばシステムが状態 i にあるときに決定 $k \in \Gamma_i$ を選んだとすると, システムは時間に無関係な確率 p_{ij}^k で状態 j に遷移し ($p_{ij}^k \geq 0, \sum_{j=1}^N p_{ij}^k = 1$), それに伴い r_{ij}^k なる利得が得られる ($|r_{ij}^k| < \infty$)。このように決定を適当に選ぶことによって遷移確率と利得の値, その結果として, 利得の期待値を操作していく制御過程をマルコフ決定過程と呼ぶ。

各状態 i において選ぶべき決定 $u_i \in \Gamma_i$ を指定した規則を政策と呼び, ここではこれを N 次元ベクトル $U = (u_1, \dots, u_N)$ で表す。最適な制御入力として定義されているものの一つは今後得られるであろう総期待利得を最大にするような政策である。ただし, 将来の利得についてはその価値を割り引いて考えるものとし, 1 期間あたりの割引き率 β を導入する ($0 < \beta < 1$)。このような政策を β -最適政策と呼ぶ。初期状態を i として今後政策 U を継続的に適用するときの総期待割引き利得を v_i^U で表すと, $i \in S$ に関して一様に v_i^U を最大ならしめる U が存在する。これが β -最適政策で, これを継続的に適用すれば常に将来の期待利得が最大化される。 $v_1^U, \dots, v_N^U$ は次の連立方程式のただ 1 組の有界な解で与えられる。

$$v_i^U = \sum_j p_{ij}^{u_i} r_{ij}^{u_i} + \beta \sum_j p_{ij}^{u_i} v_j^U \quad (i=1, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (1)$$

他の一つは過程の 1 期間あたりの平均期待利得を最大ならしめる政策で, これは平均最適政策と呼ばれる。いま政策 U を継続的に適用する過程を考える。この過程は定常マルコフ過程を形成するので, もし過程が正則ならば各状態 i の生起確率の極限値 π_i^U が存在し, これらは次の連立方程式のただ 1 組の解で与えられる⁽¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \pi_j^U &= \sum_i \pi_i^U p_{ij}^{u_i} \quad (j=1, \dots, N) \\ \sum_i \pi_i^U &= 1 \end{aligned} \right\}$$

このとき $g^U = \sum_{i,j} \pi_i^U p_{ij}^{u_i} r_{ij}^{u_i}$ は過程の 1 期間あたりの平均期待利得を表す。 g^U を最大ならしめる U が平均最適政策である。

もし遷移確率 p_{ij}^k の値がすべて既知ならば, 上記 v_i^U や g^U の値がすべて計算できるので β -最適政策や

平均最適政策を求めることができる。また, 政策反復法やその他の逐次近似法は必ずしもすべての v_i^U あるいは g^U の値を計算することなしに効率良く最適政策を見出すための手法である。しかしながら, 本論文での前提条件としていまはすべての遷移確率 p_{ij}^k の値を未知としているので, 一般に最適な制御入力を求めることはできない。そこで, このような条件下では未知確率に関する推定情報を取り入れながら期待利得が最適値に達するように制御していかなければならない。このような行動形態を一種の学習と言うことができる。

本論文では, 各時刻で選択する政策が β -最適政策あるいは平均最適政策に収束するような学習方式の構成について論じる。なお, 以下では, これら 2 種類の最適政策を特に区別はせずに単に最適政策 $U^* = (u_1^*, \dots, u_N^*)$ として扱う。ここで議論の都合上次の仮定をおく。

〔仮定 1〕 すべての $k \in \Gamma_i$ および $i, j \in S$ に対して $p_{ij}^k > 0$ である。

〔仮定 2〕 最適政策 U^* はただ一つである。

仮定 2 は議論を簡潔にするための便宜的なものであるが, 仮定 1 はいかなる制御則のもとでもすべての状態が無限回生起することを保証するもので, これはすべての遷移確率を推定するのに必要である。また, 仮定 1 により, いかなる政策を継続的に適用しても過程の正則性が満たされる。

3. 推定と制御の矛盾

前述のマルコフ決定過程において時刻 t までの間に状態 i から決定 $k \in \Gamma_i$ のもとで状態 j に遷移した回数を $n_{ij}^k(t)$ で表し, $n_i^k(t) = \sum_j n_{ij}^k(t)$ および $n_i(t) = \sum_k n_i^k(t)$ とする。このとき, 周知のように, $\hat{p}_{ij}^k(t) = n_{ij}^k(t)/n_i^k(t)$ は遷移確率 p_{ij}^k の最尤推定値となる。 i, j および k をそれぞれ時刻 t において生起した状態およびそこで用いられた決定とすると, これらや上記に定義した $n_{ij}^k(t)$ などの諸量はいずれも状態遷移の標本 $\omega = (i_0, i_1, \dots)$ に依存した確率変数である。従って, これらに関する記述はすべて与えられた確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を基盤としてなされる。ここに, Ω はすべての ω からなる標本空間, $\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる σ -集合体, そして P は適用される制御則のもとで $\mathcal{F}$ の各要素に割り当てられる確率である。しかし, 以下の確率的記述はいずれも確率 1 で成り立つことを前提としているので, 表示の簡単のためにそれらの記述において ω や $\Omega, \mathcal{F}, P$ を明示しないものとする。

さて、推定値 $\hat{p}_{ij}^k(t)$ の一貫性に関して大数の強法則から次の補題が導かれる。

〔補題 1〕適用される制御則にかかわらず $\lim_{t \rightarrow \infty} n_{i,j}^k(t) = \infty$ なるあらゆる $k \in \Gamma_i$ および $i \in S$ に対して次式が成立する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{p}_{ij}^k(t) = p_{ij}^k \quad (j=1, \dots, N)$$

補題 1 の結果として、すべての $k \in \Gamma_i$ および $i \in S$ に対して p_{ij}^k を完全に推定するにはあらゆる状態 i において Γ_i 内のあらゆる決定を無限回用いなければならない。ところが、一方、制御本来の目的は各状態 i において最適決定 u_i^* のみを用いることにより達成される。最適政策への収束とは推定を含む制御の最適化により得られるものであるから、上記のように推定と制御との間に明白な矛盾が存在することはそれを実現するうえでの大きな障害となる。

著者らはさきに、文献 (9) および (10) において、推定と制御の矛盾を陽に考慮した評価基準を政策選択のために導入することによりその矛盾の解決を試みた。この評価基準は制御性能を反映する項と推定精度を反映する項との和からなっており、その形の単純さにより学習方式の運用上の容易さが従来のものに比べてかなり改善されている。次章では、さきに導入した評価基準の制御に対応する項を更に簡単化することにより、実際の適用の範囲を状態や決定の数が多い場合にまで広げた方式を示す。

4. 学習方式

すべての $k \in \Gamma_i$ および $i, j \in S$ に対して $p_{ij}^k = \hat{p}_{ij}^k(t)$ とおいたときの最適政策 U^* を $\hat{U}^*(t) = (\hat{u}_1^*(t), \dots, \hat{u}_N^*(t))$ と書き、そのときの v_i^U, q^U をそれぞれ $\hat{v}_i^U(t), \hat{q}^U(t)$ と書く。また、 I をインジケータ関数 (事象 E が真ならば $I(E)=1$, それが真でなければ $I(E)=0$ なる関数) および α を任意の正定数とする。文献 (9), (10) で導入された評価基準は制御に対応する項として $\hat{v}_i^U(t)$ を用いているが、これを実際により簡単化された項 $\alpha I(U = \hat{U}^*(t))$ で置き換えようというのがここでの提案である。すなわち、ここに提案する学習方式とは、時刻 t において適用すべき政策が、そのときのシステムの状態を i とするとき、評価基準

$$w_i^U(t) = \alpha I(U = \hat{U}^*(t)) + \frac{c_i^{u_i}(t)}{n_i^{u_i}(t)} \dots \dots (2)$$

を最大ならしめる U で与えられるというものである。ここに $c_i^{u_i}(t)$ は次に示すように逐次的に定められる実数である (各 $i \in S$ に対して $c_i^{u_i}(0)=0$)。 $\{\theta(n)\}_{n=1}^\infty$ を $\sum_n \theta(n) = \infty$ なる正数列とする。ただし、 $\theta(n) = \gamma$

(定数) もしくは $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$ のどちらかである。いま、時刻 t において、ある政策が選ばれた結果として決定 $d \in \Gamma_i$ が用いられたとする。このとき

$$\begin{cases} c_i^{u_i}(t+1) = c_i^{u_i}(t) + \theta(n_i(t+1) - n_i^{u_i}(t+1)) \\ c_i^d(t+1) = c_i^d(t) \end{cases} \quad (u_i \neq d)$$

と定める。また、このとき、すべての $j \neq i (j \in S)$ に対して $c_j^{u_j}(t+1) = c_j^{u_j}(t)$ と定める。

著者らがさきに提案した方式は $\theta(n)$ が定数ならば ε -最適の意味で β -最適政策に到達し、また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$ ならば単にそれに到達することがそれぞれ文献 (9), (10) で証明されている。なお、これらの証明から明らかなことであるが、この方式において評価基準の第 1 項として $\hat{v}_i^U(t)$ の代りに $\hat{q}^U(t)$ を用いれば平均最適政策への到達についても全く同様な結果が得られる。評価基準の第 1 項としての $\hat{v}_i^U(t), \hat{q}^U(t)$, あるいは $\alpha I(U = \hat{U}^*(t))$ はいずれも制御本来の目的に対応したものである。というのは、この第 1 項だけが評価基準として与えられると、それによって選択される政策が推定値をすべて真値としたときの最適政策となるからである。一方、評価基準の第 2 項は第 1 項の推定面における不備を補うためのものである。すなわち、この第 2 項は特定の未知確率の“推定の進み具合”あるいは“推定の遅れ具合”を数量化したもので、これを評価基準の中にとり入れることにより第 1 項だけではもたらされない推定の促進を図るものである。また、 $\theta(n)$ は第 1 項がいくつある大きさをとりうるも第 2 項をそれと程よく調和させるための制御変数としての役割を持つ。従って、ここに提案した方式では、第 1 項における定数 α の大きさは方式の究極的な特性には影響しない。ただし、その大きさは第 1 項と第 2 項の初期の大小関係にかかわるので、収束の速度など過渡的な特性に影響を及ぼす。

ところで、さきに提案した方式を実際に運用するとき計算上手間がかかるのは、評価基準の算出に当たって、(1) 式の形の連立方程式を解くことにより $\hat{v}_i^U(t)$ の値をすべての U, i について求めることである。これは文献 (9), (10) のシミュレーション例 (3 状態 2 決定モデル) のように状態や決定の数が多い場合にはさほど困難ではないが、それらの数が大きくなると計算量のうえで非常に困難になる。この点、ここに提案した方式では、 $\hat{v}_i^U(t)$ の値を一々求める必要はなく、その代りに推定値をすべて真値としたときの最適政策 $\hat{U}^*(t)$ のみを求めればよい。これは政策反復法やその他の逐次近似法の利用を可能にするもので、これ

により評価基準の算出が大幅に簡単化される。更に、 $\hat{U}^*(t)$ を求めるのに政策反復法を用いるとき、初期政策として $\hat{U}^*(t-1)$ を選ぶならば、後に示すように $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{U}^*(t) = U^*$ であることから、 t の増加につれても計算上の負担が大幅に軽減されることになる。

5. 漸近特性

以下では前章に提案した学習方式の漸近特性を決定の使用頻度を意味する係数 $f_i^k(t) = n_i^k(t)/n_i(t)$ によって調べる。まず $\theta(n) = \gamma$ のときの ε -最適性、次いで $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$ のときの最適性を証明する。学習方式の実質的な制御性能と運用上の簡便さを総合して判断した場合には ε -最適性と最適性との差はほとんどないと言える。しかし、理論的な面からみた場合、文献(9)、(10)からも推察されるように最適性の証明は必ずしも ε -最適性のそれを含まないで、これらをそれぞれ学習方式の重要な性質として調べることにする。ここで、文献(10)の補題2と同じ内容を持つ次の補題を挙げておく。

〔補題2〕 仮定1のもとで、本方式は $\theta(n) = \gamma$ のときにも $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$ のときにもすべての $k \in \Gamma_i$, $i \in s$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} n_i^k(t) = \infty$ ならしめる。

文献(10)の補題2の証明は、評価基準の第1項についてはその有界性、また、正数列 $\{\theta(n)\}$ については $\sum_n \theta(n) = \infty$ なる性質のみを用いてなされるので、本方式に関しても同じ補題が成り立つことは明らかである。

〈5.1〉 ε -最適性 本節では、 $\theta(n) = \gamma$ のときの本方式について、その ε -最適性を意味する次の定理を証明する。

〔定理1〕 仮定1と仮定2のもとで、 $\theta(n) = \gamma$ のときの本方式については次式が成立する。

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} f_i^{u_i^*}(t) = 1 \quad (i=1, \dots, N)$$

仮定1よりどの状態も一様に無限回生起するので、任意の一つの $i \in s$ について定理の式を示せば十分である。そこで以下の証明においては任意の1状態 i を選んでそれを固定する。また、(2)式の政策 U に関する最大化は

$$w_i^k(t) \triangleq \alpha I(k = \hat{u}_i^*(t)) + \frac{c_i^k(t)}{n_i^k(t)} \dots\dots\dots (3)$$

の決定 $k \in \Gamma_i$ に関する最大化に置き換えられるので、以下の証明においては(2)式より扱いやすい(3)式を評価基準として用いる。補題1と補題2から $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{U}^*(t) = U^*$ 従って $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{u}_i^*(t) = u_i^*$ が得られるので、こ

れを(3)式に適用すると十分大きなすべての t に対して次式の成り立つことがわかる。

$$w_i^k(t) = \alpha I(k = u_i^*) + \frac{c_i^k(t)}{n_i^k(t)} \quad (k=1, \dots, K_i) \dots\dots\dots (4)$$

ところで、少くとも一つの $k \in \Gamma_i$ に対して $n_i^k(t) = 0$ ならば当然この評価基準は適用できないので、初期の間はこれ以外の基準によらなければならない。この初期操作を適用に行うことにより、すべての t および $k \in \Gamma_i$ に対して

$$c_i^k(t) = \theta(1) + \theta(2) + \dots + \theta(n_i(t) - n_i^k(t)) \dots\dots\dots (5)$$

ならしめることができる。

$\theta(n) = \gamma$ のときには、(5)式により $c_i^k(t) = \gamma(n_i(t) - n_i^k(t))$ であるから、これを(4)式に代入することにより次式を得る。

$$w_i^k(t) = \alpha I(k = u_i^*) + \gamma \frac{1 - f_i^k(t)}{f_i^k(t)} \quad (k=1, \dots, K_i) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、まず、 $t \rightarrow \infty$ のとき $w_i^1(t), \dots, w_i^{K_i}(t)$ が有限な値に収束するという仮定をおいてみる。すると明らかにこれらはすべて同じ収束値を持たねばならないから、その値を w_i で表す。また、この仮定により $t \rightarrow \infty$ のとき $f_i^k(t)$ も収束するので、その収束値を $f_i^k(\infty)$ で表すと ($k=1, \dots, K_i$)、(6)式より

$$w_i = \alpha I(k = u_i^*) + \gamma \frac{1 - f_i^k}{f_i^k} \quad (k=1, \dots, K_i) \dots\dots\dots (7)$$

あるいは書き換えて

$$f_i^k = \gamma / [w_i - \alpha I(k = u_i^*) + \gamma] \quad (k=1, \dots, K_i) \dots\dots\dots (8)$$

を得る。(7)式により $w_i > \alpha$ であることを考慮し、(8)式を $\sum_k f_i^k = 1$ に代入することにより、十分小さな γ のもとで w_i は次の二次方程式の大きい方の実根である確定値 w_i^* で与えられることが導かれる。

$$w_i^2 - [\alpha + (K_i - 2)\gamma] w_i + \gamma [(K_i - 2)(\alpha - \gamma) - \gamma] = 0 \dots\dots\dots (9)$$

そこで、次に、 $t \rightarrow \infty$ のとき実際に $w_i^1(t), \dots, w_i^{K_i}(t)$ がすべて w_i^* に収束することを証明するために以下の補題を示す。

〔補題3〕 仮定1が成り立ち、 $\theta(n) = \gamma$ が十分小さいものとする。このとき、十分大きな各 t において、もしすべての $k \in \Gamma_i$ に対して $w_i^k(t) \geq w_i^*$ あるいはすべての $k \in \Gamma_i$ に対して $w_i^k(t) \leq w_i^*$ ならばそれはすべての $k \in \Gamma_i$ に対して $w_i^k(t) = w_i^*$ であることを意味する。

(証明) (6)式より十分大きなすべての t に対して

$$\sum_k f_i^k(t) = \sum_k \frac{\gamma}{w_i^k(t) - \alpha I(k=u_i^*) + \gamma} = 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

が成立する。一方、(9)式は(8)式を $\sum_k f_i^k=1$ に代入することにより導かれた方程式であるから、その解である w_i^* は次式を満足する。

$$\sum_k \frac{\gamma}{w_i^k - \alpha I(k=u_i^*) + \gamma} = 1 \quad \dots\dots\dots (11)$$

(10)式と(11)式を比較すれば明らかのように、すべての $k \in \Gamma_i$ に対して $w_i^k(t) \geq w_i^*$ ならば、少くとも一つの k に対して $w_i^k(t) > w_i^*$ となると(10)式が成り立たなくなる。これら二つの不等号の向きを逆にしても同じことが言える。よって補題が成り立つ。

(証明終)

(補題4) 補題3と同じ条件のもと、 δ を任意の正数とすると、十分大きなすべての t に対して次式が成立する。

$$w_i^k(t) \geq w_i^* - \delta \quad (k=1, \dots, K_i)$$

(証明) ここでは時刻 t が十分大きいものとする。

すると、補題3によれば、各時刻 t においては $w_i^k(t) = w_i^*(k=1, \dots, K_i)$ もしくは $\min_k w_i^k(t) < w_i^* < \max_k w_i^k(t)$ のどちらかが成り立つことになる。よって、時刻 t において決定 k が用いられるには必ず $w_i^k(t) \geq w_i^*$ でなければならない。さて、任意の一つの $k \in \Gamma_i$ について、前章に示した $c_i^k(t)$ の変化によって(4)式で与えられる $w_i^k(t) = \alpha I(k=u_i^*) + c_i^k(t)/n_i^k(t)$ がどのように変化するかを考える。もし時刻 t において決定 k が用いられたとすると、 $c_i^k(t+1) = c_i^k(t)$ および $n_i^k(t+1) = n_i^k(t) + 1$ であるから、 $w_i^k(t+1) < w_i^k(t)$ となる。一方、もし時刻 t において決定 k が用いられなかったとすると、そのときの状態が i ならば $c_i^k(t+1) = c_i^k(t) + \gamma$ 、そうでなければ $c_i^k(t+1) = c_i^k(t)$ であり、また、どちらにしても $n_i^k(t+1) = n_i^k(t)$ であるから、 $w_i^k(t+1) \geq w_i^k(t)$ となる。このように、 $w_i^k(t)$ が減少するのは時刻 t において決定 k が用いられたときだけである。

そこで、任意の一つの $k \in \Gamma_i$ について、部分列 $\{t\} \subset \{t\}$ を時刻 τ において決定 k が用いられた結果 $w_i^k(\tau+1) < w_i^*$ となるような時刻列とすれば、補題の証明のためには $\tau \rightarrow \infty$ のとき $w_i^k(\tau+1) \rightarrow w_i^*$ であることを示せばよい。ここで $\{t\}$ が無限列であることを示すためにそれが有限列であると仮定する。この仮定は言い換えれば、ある有限の時刻以後は時刻 t において決定 k が用いられるときには必ず $w_i^k(t) > w_i^*$

$(t+1) \geq w_i^*$ であるということになる。上記によりこの $w_i^k(t+1)$ は決定 k が用いられるまでは減少しないから、この仮定の結果として、十分大きなすべての t に対して $w_i^k(t) \geq w_i^*$ が成立する。よって、決定 k の任意性から、十分大きなすべての t に対して $w_i^k(t) \geq w_i^*(k=1, \dots, K_i)$ が成立する。これは、補題3により、十分大きなすべての t に対して $w_i^k(t) = w_i^*(k=1, \dots, K_i)$ であることを意味する。このようなことは当然あり得ず、よって $\{t\}$ が無限列であることが示された。さて、時刻列 $\{t\}$ の定義により時刻 τ では決定 k が用いられるので、前段に記したように τ が十分大きければ $w_i^k(\tau) \geq w_i^*$ でなければならない。また、同定義により $c_i^k(\tau+1) = c_i^k(\tau)$ 、 $n_i^k(\tau+1) = n_i^k(\tau) + 1$ 、および $w_i^k(\tau+1) < w_i^*$ であるので(4)式から次式が成立する。

$$\frac{c_i^k(\tau)}{n_i^k(\tau)+1} < w_i^* - \alpha I(k=u_i^*) < M$$

ここに M はある有界な正定数である。よって、(4)式から

$$\begin{aligned} w_i^k(\tau) - w_i^k(\tau+1) &= \frac{c_i^k(\tau)}{n_i^k(\tau)} - \frac{c_i^k(\tau)}{n_i^k(\tau)+1} \\ &= \frac{c_i^k(\tau)}{n_i^k(\tau)(n_i^k(\tau)+1)} < \frac{M}{n_i^k(\tau)} \end{aligned}$$

あるいは書き換えて

$$w_i^k(\tau) - M/n_i^k(\tau) < w_i^k(\tau+1) \quad \dots\dots\dots (12)$$

が成立する。 $w_i^k(\tau) \geq w_i^*$ および $w_i^k(\tau+1) < w_i^*$ であることを考慮すれば(12)式より次式を得る。

$$w_i^* - M/n_i^k(\tau) < w_i^k(\tau+1) < w_i^*$$

上式において $\tau \rightarrow \infty$ とすれば、補題2により $n_i^k(\tau) \rightarrow \infty$ となるから、 $w_i^k(\tau+1) \rightarrow w_i^*$ を得る。よって補題は証明された。(証明終)

補題3と補題4から $w_i^1(t), \dots, w_i^{K_i}(t)$ の w_i^* への収束性が示される。その結果、(6)式より次式が得られる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_i^k(t) = \frac{\gamma}{w_i^* - \alpha I(k=u_i^*) + \gamma} \quad (k=1, \dots, K_i)$$

上式は各 $k \neq u_i^*$ に対しては $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i^k(t) = \gamma/(w_i^* + \gamma)$ となるので、 $w_i^* > \alpha > 0$ であることに注意すれば

$$\gamma \rightarrow 0 \text{ のとき } \lim_{t \rightarrow \infty} f_i^k(t) \rightarrow 0 \quad (k \neq u_i^*, k \in \Gamma_i)$$

となることがわかる。よって、仮定2による u_i^* の唯一性およびすべての t に対して $\sum_k f_i^k(t) = 1$ であることから定理の証明が完了する。

(5.2) 最適性 本節では、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$ のときの

本方式について、その最適性を意味する次の定理を証明する。

〔定理2〕 仮定1と仮定2のもとで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$ のときの本方式については $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i^{u_i^*}(t) = 1 (i=1, \dots, N)$ が成立する。

ここでも前節と同じく状態 i を固定して考えればよい。 $\bar{\theta}(n) = (1/n) \sum_{m=1}^n \theta(m)$ とすると、(5)式の $c_i^k(t)$ は $c_i^k(t) = \bar{\theta}(n_i(t) - n_i^k(t)) [n_i(t) - n_i^k(t)]$ と表すことができるので、これを(4)式に代入することにより次式を得る。

$$w_i^k(t) = \alpha I(k = u_i^*) + \bar{\theta}(n_i(t) - n_i^k(t)) \frac{1 - f_i^k(t)}{f_i^k(t)} \quad (k=1, \dots, K_i)$$

従って、十分大きなすべての t に対して次式が成立する。

$$f_i^k(t) = \frac{\bar{\theta}(n_i(t) - n_i^k(t))}{w_i^k(t) + \bar{\theta}(n_i(t) - n_i^k(t))} \quad (k \neq u_i^*, k \in \Gamma_i) \dots (13)$$

補題2と $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = 0$ より $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\theta}(n_i(t) - n_i^k(t)) = 0$ ($k=1, \dots, K_i$) が得られるので、下記の補題が示されれば(13)式より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_i^k(t) = 0 \quad (k \neq u_i^*, k \in \Gamma_i)$$

が得られ、よって、仮定2および $\sum_k f_i^k(t) = 1$ より定理が導かれる。

〔補題5〕 仮定1のもとで、十分大きなすべての t に対して $w_i^k(t) > \delta_0$ ($k \neq u_i^*, k \in \Gamma_i$) となるような $\delta_0 > 0$ が存在する。

〔証明〕 任意の一つの $k \neq u_i^* (k \in \Gamma_i)$ が用いられる時刻列を $\{t_l\}_{l=1}^\infty$ で表すと、明らかに $w_i^k(t_l) \geq w_i^{u_i^*}(t_l)$ であるので、(4)式から十分大きなすべての l に対して

$$w_i^k(t_l) = c_i^k(t_l) / n_i^k(t_l) \geq w_i^{u_i^*}(t_l) = \alpha + c_i^{u_i^*}(t_l) / n_i^{u_i^*}(t_l) \geq \alpha \dots (14)$$

また、更に

$$\begin{aligned} w_i^k(t_l+1) &= c_i^k(t_l+1) / n_i^k(t_l+1) \\ &= \frac{c_i^k(t_l)}{n_i^k(t_l)+1} = \frac{n_i^k(t_l)}{n_i^k(t_l)+1} w_i^k(t_l) \\ &\geq \frac{n_i^k(t_l)}{n_i^k(t_l)+1} \alpha \dots (15) \end{aligned}$$

が成立する。(14)式と(15)式より十分大きなすべての l に対して $w_i^k(t_l) > \delta_1$ かつ $w_i^k(t_l+1) > \delta_1$ となるような $\delta_1 > 0$ が存在する。これは、十分大きな各 $t \neq t_l$ に対しては $w_i^k(t) = c_i^k(t) / n_i^k(t)$ が減少しないことから

ら、十分大きなすべての t に対して $w_i^k(t) > \delta_1$ であることを意味する。従って、決定の数が有限であることから、補題が成立する。 (証明終)

6. シミュレーション例

本方式の実効的な有効性を明らかにするために、文献(9)、(10)の方式にとっては適用がかなり困難である5状態3決定のモデルに本方式を適用した計算機シミュレーションの結果をここに示す。モデルの遷移確率と利得はそれぞれ表1と表2のとおりである。また割引き率は $\beta = 0.8$ である。この場合、政策の総数は

表1 遷移確率

Table 1. Transition probabilities.

$p_{11}^1 = 0.1$	$p_{12}^1 = 0.2$	$p_{13}^1 = 0.2$	$p_{14}^1 = 0.2$	$p_{15}^1 = 0.3$
$p_{11}^2 = 0.2$	$p_{12}^2 = 0.2$	$p_{13}^2 = 0.2$	$p_{14}^2 = 0.2$	$p_{15}^2 = 0.2$
$p_{11}^3 = 0.1$	$p_{12}^3 = 0.1$	$p_{13}^3 = 0.1$	$p_{14}^3 = 0.3$	$p_{15}^3 = 0.4$
$p_{21}^1 = 0.1$	$p_{22}^1 = 0.1$	$p_{23}^1 = 0.2$	$p_{24}^1 = 0.3$	$p_{25}^1 = 0.3$
$p_{21}^2 = 0.1$	$p_{22}^2 = 0.1$	$p_{23}^2 = 0.6$	$p_{24}^2 = 0.1$	$p_{25}^2 = 0.1$
$p_{21}^3 = 0.1$	$p_{22}^3 = 0.5$	$p_{23}^3 = 0.2$	$p_{24}^3 = 0.1$	$p_{25}^3 = 0.1$
$p_{31}^1 = 0.1$	$p_{32}^1 = 0.4$	$p_{33}^1 = 0.2$	$p_{34}^1 = 0.2$	$p_{35}^1 = 0.1$
$p_{31}^2 = 0.3$	$p_{32}^2 = 0.2$	$p_{33}^2 = 0.2$	$p_{34}^2 = 0.2$	$p_{35}^2 = 0.1$
$p_{31}^3 = 0.3$	$p_{32}^3 = 0.2$	$p_{33}^3 = 0.1$	$p_{34}^3 = 0.1$	$p_{35}^3 = 0.3$
$p_{41}^1 = 0.2$	$p_{42}^1 = 0.5$	$p_{43}^1 = 0.1$	$p_{44}^1 = 0.1$	$p_{45}^1 = 0.1$
$p_{41}^2 = 0.3$	$p_{42}^2 = 0.1$	$p_{43}^2 = 0.1$	$p_{44}^2 = 0.4$	$p_{45}^2 = 0.1$
$p_{41}^3 = 0.2$	$p_{42}^3 = 0.3$	$p_{43}^3 = 0.3$	$p_{44}^3 = 0.1$	$p_{45}^3 = 0.1$
$p_{51}^1 = 0.2$	$p_{52}^1 = 0.2$	$p_{53}^1 = 0.2$	$p_{54}^1 = 0.2$	$p_{55}^1 = 0.2$
$p_{51}^2 = 0.2$	$p_{52}^2 = 0.3$	$p_{53}^2 = 0.2$	$p_{54}^2 = 0.1$	$p_{55}^2 = 0.2$
$p_{51}^3 = 0.1$	$p_{52}^3 = 0.4$	$p_{53}^3 = 0.2$	$p_{54}^3 = 0.1$	$p_{55}^3 = 0.2$

表2 利得

Table 2. Rewards.

$r_{11}^1 = 1$	$r_{12}^1 = -2$	$r_{13}^1 = -4$	$r_{14}^1 = -1$	$r_{15}^1 = 3$
$r_{11}^2 = -2$	$r_{12}^2 = -7$	$r_{13}^2 = 2$	$r_{14}^2 = 8$	$r_{15}^2 = -1$
$r_{11}^3 = -3$	$r_{12}^3 = 6$	$r_{13}^3 = -1$	$r_{14}^3 = -2$	$r_{15}^3 = 4$
$r_{21}^1 = 7$	$r_{22}^1 = -4$	$r_{23}^1 = 1$	$r_{24}^1 = -2$	$r_{25}^1 = -8$
$r_{21}^2 = -5$	$r_{22}^2 = -2$	$r_{23}^2 = 1$	$r_{24}^2 = -2$	$r_{25}^2 = 5$
$r_{21}^3 = 5$	$r_{22}^3 = -1$	$r_{23}^3 = -3$	$r_{24}^3 = -7$	$r_{25}^3 = 0$
$r_{31}^1 = 3$	$r_{32}^1 = 1$	$r_{33}^1 = 2$	$r_{34}^1 = 4$	$r_{35}^1 = -4$
$r_{31}^2 = 3$	$r_{32}^2 = 0$	$r_{33}^2 = -1$	$r_{34}^2 = -3$	$r_{35}^2 = 7$
$r_{31}^3 = -6$	$r_{32}^3 = 1$	$r_{33}^3 = -2$	$r_{34}^3 = 4$	$r_{35}^3 = 0$
$r_{41}^1 = 5$	$r_{42}^1 = -4$	$r_{43}^1 = 3$	$r_{44}^1 = 1$	$r_{45}^1 = -6$
$r_{41}^2 = 3$	$r_{42}^2 = 2$	$r_{43}^2 = -1$	$r_{44}^2 = -3$	$r_{45}^2 = -5$
$r_{41}^3 = 4$	$r_{42}^3 = 1$	$r_{43}^3 = -6$	$r_{44}^3 = 6$	$r_{45}^3 = 2$
$r_{51}^1 = 2$	$r_{52}^1 = 6$	$r_{53}^1 = 2$	$r_{54}^1 = -1$	$r_{55}^1 = 3$
$r_{51}^2 = -5$	$r_{52}^2 = 1$	$r_{53}^2 = -3$	$r_{54}^2 = 4$	$r_{55}^2 = -4$
$r_{51}^3 = -3$	$r_{52}^3 = 5$	$r_{53}^3 = 2$	$r_{54}^3 = -1$	$r_{55}^3 = -5$

図1 $\theta(n)=0.05$ (定数) のときおよび $\theta(n)=1/\sqrt{n}$ のときの $f^*(t)$ の t に関する変化

Fig. 1. Variations of $f^*(t)$ with respect to t when $\theta(n)=0.05$ (constant) and when $\theta(n)=1/\sqrt{n}$.

$3^3=243$ であり、政策反復法などにより β -最適政策 $U^*=(3, 2, 1, 3, 1)$ が求められる。従って、この場合、本方式の学習特性を $f^*(t)=(n_1^3(t)+n_2^3(t)+n_3^3(t)+n_4^3(t)+n_5^3(t))/t$ なる頻度係数の1への近づき方で表すことができる。学習方式に関しては、 $\alpha=1$ とおき、 $\theta(n)$ として $\theta(n)=0.05$ (定数) と $\theta(n)=1/\sqrt{n}$ の2とおりを考えた。

以上の条件のもとで実施されたシミュレーションの結果の1例を図1に示す。図1は上記2とおりの $\theta(n)$ のもとでの $f^*(t)$ の t に関する変化を表したものである。3状態2決定のモデルに対しても文献(10)と同じ条件のもとで本方式を適用する計算機シミュレーションを実施したが、その結果、本方式は文献(10)の方式とほぼ同様な学習特性 ($t=500$ で $f^*(t)$ が約0.9に到達)を示すことが確認された。これらのシミュレーション結果によれば、状態や決定の数が少し増加しても最適政策への収束速度は急激に低下することがわかる。なお、 α や $\theta(n)$ の最適値を一般的な形で求めるのは極めて困難であるので、個々の場合に応じて、過去のシミュレーション例なども参考にそれらを定める必要がある。

7. む す び

本論文では、未知遷移確率の推定を伴うマルコフ決

定問題に対して、推定と制御の矛盾を陽に考慮する立場から一つの学習方式を提案した。これはさきに著者が提案した方式を本来の制御性能を損わずに更に簡単化したもので、この簡単化により状態や決定の数が大きいモデルへの適用がこれまでよりもはるかに容易になる。更にまた、本方式は単に最適であるだけでなく、制御変数 $\theta(n)$ の値のとり方によって ε -最適にもなることが証明された。

本方式は在庫管理問題や資源配分問題などマルコフ決定モデルの応用分野である現実の諸問題に適用できるものであり、今後は実用化の立場から更に検討を進めていく必要がある。

(昭和60年10月25日受付, 同61年7月25日再受付)

文 献

- (1) J.H. Witten: "The Apparent Conflict between Estimation and Control-A Survey of the Two-armed Bandit Problem", *J. Franklin Inst.*, **301**, 161 (1976)
- (2) P.P. Varaiya, J.C. Walrand, & G. Buyukkoc: "Extensions of the Multiarmed Bandit Problem: The Discounted Case", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-30**, 426 (1985)
- (3) K.S. Narendra & M.A.L. Thathachar: "Learning Automata-A Survey", *IEEE Trans. Syst. Man Cybernetics*, **SMC-4**, 323 (1974)
- (4) J.J. Martin: *Bayesian Decision Problems and Markov Chains*, Wiley, 36 (1967)
- (5) V. Borkar & P. Varaiya: "Adaptive Control of Finite Markov Chains, I: Finite Parameter Set", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-24**, 953 (1979)
- (6) Y.M. El-Fattah: "Recursive Algorithms for Adaptive Control of Finite Markov Chains", *IEEE Trans. Syst. Man Cybernetics*, **SMC-11**, 135 (1981)
- (7) P.R. Kumar & W. Lin: "Optimal Adaptive Controllers for Unknown Markov Chains", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-27**, 765 (1982)
- (8) M. Sato, K. Abe, & H. Takeda: "Learning Control of Finite Markov Chains with Unknown Transition Probabilities", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-27**, 502 (1982)
- (9) 佐藤・阿部・竹田: 「確定的手法によるマルコフ過程の学習制御」電学論C, **102**, 245 (昭57-10)
- (10) 佐藤・阿部・竹田: 「マルコフ過程の漸近最適学習制御」, 計測自動制御学会論文集, **21**, 706 (昭60-7)
- (11) R.A. Howard: *Dynamic Programming and Markov Processes*, MIT Press & Wiley, 32 (1960)
- (12) J.G. Kemeny & J.L. Snell: *Finite Markov Chains*, D. Van Nostrand Company, 69 (1960)
- (13) 佐藤・阿部・竹田: 「ベイズ的手法を用いた未知パラメータを含むマルコフ決定過程の漸近的性質」, 信学論, **J61-D**, 1 (昭53-1)