不動点定理を用いたある最適制御問題の数値計算法

正 員 師 玉 康 成 (防衛大)

正 員 山 浦 弘 夫 (防衛大)

正 員 太 田 豊 生 (防衛大)

1. ま え が き

非線形最適制御問題の数値計算法のうち、問題を変分法などにより常微分方程式の2点境界値問題に帰着させて解く方法では、その非線形方程式を変分方程式や、ベルマンの準線形化法などによって準線形化し、線形方程式の境界値問題解法の理論を適用することがよく行われている⁽¹⁾⁻⁽³⁾。これらはニュートン・ラプソン法を基礎にしている。この方法は最初に与える推定解が、解の十分近くに与えられた場合二次収束し、高い精度の数値解が得られる。

しかし、そうでないときには計算の過程で過大な修正量が発生し、オーバフローのためにそのままでは計算が継続できなくなることが多い。そのため、過大な修正量を抑制するためにいろいろな工夫がなされている。例えば修正区間を分割⁽²⁾したり、修正量に係数をかけたりする⁽³⁾。

それらの工夫をほどこしても、そのアルゴリズムの局所的な2次収束性が証明されているものもあるので、収束の速さや解の精度の点では有効なものであるが、アルゴリズム自体が非常に複雑になるため、システムの次数が高くなったりすると、その実行が難しくなるものが多い。

また、最初に与える推定解も未知なので、解の近くに与えるのは難しい。実際の数値計算ではこれらの収束の速い方法と、むしろ解の精度や収束の速さを犠牲にしても、計算の過程でオーバフローが発生しにくくアルゴリズムが簡単であり、近似解を容易に得る

ことができる方法を併用することが必要と考えられる。

本研究では、その一つの方法として不動点定理を用いて、ニュートン法によらずに近似解に漸近的に収束するアルゴリズムを考案した。

記号法

関数 $h_m(x, y)$ の x, y に関する偏微分を

$$\frac{\partial}{\partial x} h_m(x, y) \triangleq h_{x^m}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h_m(x, y) \triangleq h_{x,y^m}$$

のように表す。 x が n 次元ベクトル

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T$$

であるとき (T は転置記号を示す)、関数 $g(x)$ の x に関する偏微分 g_x を次の n 次元行ベクトルとして定義する。

$$g_x \triangleq (g_{x1}, \dots, g_{xn})$$

もし $g(x)$ が n 次元行ベクトルならば g_x は

$$g_x = \begin{bmatrix} g_{x1^1} \dots g_{xn^1} \\ g_{x1^n} \dots g_{xn^n} \end{bmatrix}$$

のように表現される。また、表現を簡単にするため、 $[g_x]^T$ を g_x^T で表す。

2. 問題の定式化

制御対象の状態方程式および初期条件がそれぞれ、

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + g(x(t))$$

$$x(t_i) = x_i \dots \dots \dots (1)$$

で与えられ、最小にする評価関数 $J(u)$ が

$$J(u) = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + q(x(t)) \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) \dots \dots \dots (2)$$

Computation Method of a Optimal Control Problem using Fixed Point Theorem. By Yasunari Shidama, Member, Hiroo Yamaura, Member & Toyomi Ohta, Member (Department of Electrical Engineering, The National Defense Academy).

師玉康成: 正員, 防衛大学校理工学研究科研究員

山浦弘夫: 正員, 防衛大学校電気工学教室

太田豊生: 正員, 防衛大学校電気工学教室

である場合の最適制御問題を考える。

ここに、 t は時間変数で制御区間は $[t_i, t_f]$ とする。

また、 $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times m$, $n \times n$, $m \times m$ の時変形の数値行列で、 $Q(t)$ は対称準正定、 $R(t)$ は対称正定であり、 Q_f は $n \times n$ の定数行列、 $g(x(t)) \in R^n$ は n 次ベクトル、 $q(x(t))$ はスカラーとする。 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m (m \leq n)$ は、時刻 $t \in [t_i, t_f]$ における状態量と制御量を表す。本論文で提案する計算アルゴリズムは、終端値 $x(t_f)$ に拘束がある場合にも適用できるが、第3章、第4章でのアルゴリズムの説明では表現を簡単にするため、終端値 $x(t_f)$ はとりあえず自由としておく。終端に拘束が与えられた場合の解法は第5章の計算例で述べる。

3. 不動点定理の適用

最適制御理論でよく知られているように⁽⁴⁾、ラグランジュ乗数 $\lambda(t) \in R^n$ を導入すると、第2章の最小化問題の解である $x^{opt}(t)$, $u^{opt}(t)$ について、最小性の必要条件から次の式を得る (付録1)。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -A^T(t)\lambda(t) - Q(t)x^{opt}(t) \\ &\quad - g_x^T(x^{opt}(t))\lambda(t) - q_x^T(x^{opt}(t)) \\ \lambda(t_f) &= Q_f x^{opt}(t_f) \dots\dots\dots (3) \\ u^{opt}(t) &= -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

以後、表現を簡単にするため $x^{opt}(t)$, $u^{opt}(t)$ を、 $x(t)$, $u(t)$ で表す。

(1), (3), (4) 式をいっしょにすると、 $x(t)$, $\lambda(t)$ についての非線形連立微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) - B(t)R^{-1}(t) \\ &\quad \cdot B^T(t)\lambda(t) + g(x(t)) \\ x(t_i) &= x_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -A^T(t)\lambda(t) - Q(t)x(t) \\ &\quad - g_x^T(x(t))\lambda(t) - q_x^T(x(t)) \\ \lambda(t_f) &= Q_f x(t_f) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

を得る。

すなわち、第2章の最小化問題が(5), (6)式のごとく、 x については初期点で、 λ については終端点で境界条件が与えられる2点境界値問題に帰着する。つまり、(5), (6)式の解 $x(t)$, $\lambda(t)$ を求めれば $x(t)$, $u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t)$ は最小性の必要条件を満足する。

ところで、(5), (6)式は非線形方程式であり、線形方程式とちがって、この2点境界値問題を解くことは難しい。

そのため、ベルマンは(5), (6)式についてニュートンラプソン・カントロビッチ法に基づく準線形化法

によって解く方法を示している⁽¹⁾⁽¹¹⁾が、ここでは少し違った簡単なアルゴリズムを提案する。まず、表現を簡単にするため、

$$\begin{aligned} Z(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} \\ F(t) &= \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \\ G(Z(t)) &= \begin{pmatrix} g(x(t)) \\ -g_x^T(x(t))\lambda(t) - q_x^T(x(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と置く。

(5), (6)式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}(t) &= F(t)Z(t) + G(Z(t)) \\ Z(t_i) &= \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda(t_i) \end{pmatrix} \\ Z(t_f) &= \begin{pmatrix} x(t_f) \\ Q_f x(t_f) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

と表される。ただし、 $\lambda(t_i)$ は未知量。

いま仮りに、初期条件 $Z(t_i)$ が $Z(t_i) = Z_i$ として与えられたとする。ここで、 $Z(t)$ の最初の推定解 $Z_0(t)$ を適当に与える。(例えば、 $Z_0(t) \equiv Z_i$ とでもすればよい)。

次に方程式

$$\dot{Z}_1(t) = F(t) \cdot Z_1(t) + G(Z_0(t)) \dots\dots\dots (8)$$

を初期条件 $Z_1(t_i) = Z_i (= Z_0(t_i))$ のもとに解けば、次の推定解 $Z_1(t)$ を得る。この $Z_1(t)$ を用いて方程式

$$\dot{Z}_2(t) = F(t) \cdot Z_2(t) + G(Z_1(t)) \dots\dots\dots (8)'$$

を(8)式と同一の初期条件 $Z_2(t_i) = Z_i$ を用いて解けば更に次の推定解 $Z_2(t)$ を得る。同様の操作を次々に繰り返して、方程式

$$\dot{Z}_k(t) = F(t) \cdot Z_k(t) + G(Z_{k-1}(t)) \dots\dots\dots (9)$$

を同一の初期条件 $Z_i = Z_0(t_i) = Z_1(t_i) = \dots = Z_k(t_i) = \dots$ のもとに解くと、推定解の関数列 $\{Z_k(t)\}$ が得られる。次にこのアルゴリズムによって得られる推定解の関数列 $\{Z_k(t)\}$ が漸近的に収束することを不動点定理を用いて証明する。

まず用語の定義⁽¹¹⁾や定理について述べておく。

定義1 E を距離空間、 $\tilde{T}$ を E から E への写像とする。ある正数 $\epsilon < 1$ が存在して E の任意の2点 x, y に対して不等式 $d(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) \leq \epsilon d(x, y)$ が成り立つとき $\tilde{T}$ は縮小写像である。

定義2 写像 $\tilde{T}$ に対して $\tilde{T}(a) = a$ なる点 a を $\tilde{T}$ の不動点という。

定理 完備距離空間 E から E への写像 $\tilde{T}$ について $\tilde{T}$ のある冪 $\tilde{T}^p = \underbrace{\tilde{T} \circ \tilde{T} \circ \tilde{T} \circ \dots \circ \tilde{T}}_{p \text{ 回}}$ が縮小写像であると

き

- (i) $\tilde{T}$ はただ一つの不動点 a を持つ。
- (ii) x_0 を E の任意の元として $\{x_k\}$ が次式によって与えられたとする。

$$x_k = \tilde{T} x_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots)$$

このとき $\{x_k\}$ は収束し $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ である。

上記の定理を区間 $[t_i, t_f]$ から R^{2n} への連続関数全体の集合 $C[t_i, t_f]$ に適用する。 $C[t_i, t_f]$ がノルム $\|x\| = \sup_{t \in [t_i, t_f]} \|x(t)\|$ によって完備ノルム空間となり、更に距離 $d(x, y) = \|x - y\|$ によって完備距離空間となることは周知の通りである。次に方程式(9)は線形方程式であるから、よく知られた線形方程式の理論⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾により

$$Z_k(t) = \Phi(t, t_i) Z_i + \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) G(Z_{k-1}(\tau)) d\tau \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに $\Phi(t, t_i)$ は遷移行列と呼ばれ、次の微分方程式の解である。

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_i) = F(t) \Phi(t, t_i)$$

$$\Phi(t_i, t_i) = I_{2n}$$

(10)式の右辺の Z_{k-1} と左辺の Z_k に注目すると、以下のように $C[t_i, t_f]$ から $C[t_i, t_f]$ への写像 $\tilde{T}$ が定義される。

$$Z \in C[t_i, t_f], \quad \tilde{T}(Z) \in C[t_i, t_f]$$

$$\tilde{T}(Z)(t) = \Phi(t, t_i) Z_i + \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) G(Z(\tau)) d\tau$$

以下の議論では $\tilde{T}$ のある冪が自己縮小写像となることをいう。

ここで $G(Z)$ は Z に関してリプシッツ連続とする。すなわち、ある $L > 0$ が存在して任意の $\omega, \omega' \in R^{2n}$ について、

$$\|G(\omega) - G(\omega')\| \leq L \|\omega - \omega'\| \quad \dots\dots\dots (11)$$

が成り立つものとする。

$$\text{そこで, } \sup_{t, \tau \in [t_i, t_f]} \|\Phi(t, \tau)\| = K$$

とおけば評価式

$$\begin{aligned} & \|\tilde{T}(Z_1)(t) - \tilde{T}(Z_0)(t)\| \\ &= \|Z_2(t) - Z_1(t)\| = \left\| \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) \{G(Z_1(\tau)) - G(Z_0(\tau))\} d\tau \right\| \\ &\leq K \cdot L \int_{t_i}^t \|Z_1(\tau) - Z_0(\tau)\| d\tau \\ &\leq K \cdot L \|Z_1 - Z_0\| \int_{t_i}^t d\tau \\ &= K \cdot L \cdot (t - t_i) \|Z_1 - Z_0\| \end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$\|Z_1 - Z_0\| = \sup_{t \in [t_i, t_f]} \|Z_1(t) - Z_0(t)\|$$

次に上の式を用いて

$$\begin{aligned} & \|\tilde{T}^2(Z_1)(t) - \tilde{T}^2(Z_0)(t)\| \\ &= \|Z_3(t) - Z_2(t)\| = \left\| \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) \{G(Z_2(\tau)) - G(Z_1(\tau))\} d\tau \right\| \\ &\leq K \cdot L \cdot \int_{t_i}^t \|Z_2(\tau) - Z_1(\tau)\| d\tau \\ &\leq K^2 \cdot L^2 \cdot \|Z_1 - Z_0\| \int_{t_i}^t (\tau - t_i) d\tau \\ &= K^2 \cdot L^2 \cdot \frac{(t - t_i)^2}{2!} \cdot \|Z_1 - Z_0\| \end{aligned}$$

を得る。

更に同様の操作を次々に繰り返して

$$\begin{aligned} & \|\tilde{T}^k(Z_1)(t) - \tilde{T}^k(Z_0)(t)\| \\ &= \|Z_{k+1}(t) - Z_k(t)\| \\ &\leq K \cdot L \cdot \int_{t_i}^t \|Z_k(\tau) - Z_{k-1}(\tau)\| d\tau \\ &\leq K^k \cdot L^k \cdot \|Z_1 - Z_0\| \int_{t_i}^t \frac{(\tau - t_i)^{k-1}}{(k-1)!} d\tau \\ &= K^k \cdot L^k \cdot \frac{(t - t_i)^k}{k!} \|Z_1 - Z_0\| \end{aligned}$$

が得られる。従って

$$\|\tilde{T}^k(Z_1) - \tilde{T}^k(Z_0)\| \leq K^k \cdot L^k \cdot \frac{(t_f - t_i)^k}{k!} \|Z_1 - Z_0\|$$

である。この評価式は k が十分大きくなれば、

$$K^k \cdot L^k \cdot \frac{(t_f - t_i)^k}{k!} < 1$$

となり $\tilde{T}^k$ が自己縮小写像となることを示している。よって前述の不動点定理によって $\tilde{T}$ は唯一の不動点を持ち、関数列 $\{Z_k\}$ がその不動点(関数)に一様収束する。よって(11)式などの仮定のもとに上述の繰り返し計算アルゴリズムによって得られる関数列 $\{Z_k\}$ の収束性が不動点定理により証明された。その極限関数 $Z_{\infty}(t)$ は(7)式の初期条件 $Z_{\infty}(t_i) = Z_i$ の解である。つまり(5),(6)式 of 非線形2点境界値問題の解 $x(t), \lambda(t) \left(Z_{\infty}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} \right)$ が求められる。これらの $x(t), \lambda(t), (u(t) = -R(t)^{-1} B(t)^T \lambda(t))$ は前述の通り最小性の必要条件を満たしている。

ところが $Z_i = \begin{pmatrix} x(t_i) \\ \lambda(t_i) \end{pmatrix}$ において $x(t_i)$ は指定されているが $\lambda(t_i)$ は未知量なるゆえ、 Z_i は完全には決定されていない。しかし、各 k について、方程式(9)は、 $Z_k(t)$ に関する線形方程式であるから、この2点境界値問題を解くことは極めて容易である。

実際 $Z_k(t) = \begin{pmatrix} x_k(t) \\ \lambda_k(t) \end{pmatrix}$ について、従来知られているリカッチ変換

$\lambda_k(t) = S_k(t)x_k(t) + h_k(t)$
を導出し、この式と(9)式から次のリカッチ方程式と補助方程式

$$\begin{aligned}\dot{S}_k(t) &= -Q(t) - A^T(t)S_k(t) - S_k(t)A(t) \\ &\quad + S_k(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)S_k(t) \dots (12) \\ \dot{h}_k(t) &= -A^T(t)h_k(t) + S_k(t)B(t)R^{-1}(t) \\ &\quad \cdot B^T(t)h_k(t) - S_k(t)g(x_{k-1}(t)) \\ &\quad - q_x^T(x_{k-1}(t)) - g_x^T(x_{k-1}(t))\lambda_{k-1}(t) \\ &\quad \dots \dots \dots (13)\end{aligned}$$

を得る(付録2)。ここで $S_k(t)$ は $n \times n$ 行列、 $h_k(t)$ は n 次ベクトルである。しかも(12)、(13)式の境界条件

$$\begin{aligned}S_k(t_f) &= Q_f \dots \dots \dots (12)' \\ h_k(t_f) &= 0 \dots \dots \dots (13)'\end{aligned}$$

として完全に決定される。

ここで(12)、(13)式を終端条件(12)', (13)'に従って t_f から t_i まで逆方向に積分すれば、 $S_k(t_i)$ 、 $h_k(t_i)$ を得ることができる。

$\lambda_k(t_i) = S_k(t_i)x_k(t_i) + h_k(t_i)$
により $\lambda_k(t_i)$ が決定される。

すなわち、 $Z_k(t_i) = \begin{pmatrix} x_k(t_i) \\ \lambda_k(t_i) \end{pmatrix}$ が決まり(9)式は初期値問題に置換される。

(5)、(6)式あるいは、(7)式の小線形2点境界値問題を直接解くかわりに、(9)式の小線形2点境界値問題を繰り返し解けば、その解は(5)、(6)式あるいは(7)式の解に漸次近づき、その極限解 $x_{\infty}(t)$ 、 $\lambda_{\infty}(t)$ ($u_{\infty}(t) = -R(t)^{-1}B^T(t)\lambda_{\infty}(t)$) は最適性の必要条件を満足する。ただし、これらの極限解は実際の数値計算では連続性を離散形におきかえたり、計算機の有限けたによる計算誤差などのため、正確な最適解ではなくその近似解である。

また、線形2点境界値問題に対しては、終端点等式拘束などの境界条件の問題も解くことができる。例えば筆者らが既に提案している合成リカッチ変換なども適用できる。これについては第5章の計算例で述べることにする。

次に本法の特徴について述べる。ニュートンラプソン法に基づくベルマンの準線形化法⁽¹¹⁾⁽¹²⁾を例にとり比較してみる。

この方法は(11)式について準線形化を行い、漸化式

$$\begin{aligned}Z_k &= \{FZ_{k-1} + G(Z_{k-1}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial w} \{Fw + G(w)\} \mid w = Z_{k-1} \cdot (Z_k - Z_{k-1})\} \\ &= \{F + G_z(Z_{k-1})\} Z_k \\ &\quad + \{G(Z_{k-1}) - G_z(Z_{k-1})Z_{k-1}\}\end{aligned}$$

を用いるが、 $\|Z_k - Z_{k-1}\|$ を計算すると $\|Z_k - Z_{k-1}\| \leq \tilde{M}^k \|Z_1 - Z_0\|^{2k}$ となる⁽¹²⁾。ここで $\tilde{M} > 0$ は $|t_f - t_i|$ 、 $\|F\|$ 、 $\|G(Z_{k-1})\|$ 、 $\|G_z(Z_{k-1})\|$ 、 $\|G_{zz}(Z_{k-1})\|$ によって定められる。

この評価式は $\tilde{M}\|Z_1 - Z_0\| < 1$ が成立するように、すなわち、 $\|Z_1 - Z_0\|$ が十分小さくなるように非常にうまく最初の推定解を与えれば2次収束することを示している。これは局所収束性といわれるが、このような推定解の選択は難しいことが多い。このためこのように「感度のよい」方法を数値計算で実行した場合、発生する過大な修正量のために収束が得られず、オーバフローを起こすことがしばしば起きる。本方法では $\|Z_k - Z_{k-1}\| \leq \frac{\tilde{M}^k}{k!} \cdot \|Z_1 - Z_0\|$ (ただし、 $\tilde{M} = K \cdot L \cdot |t_f - t_i|$) であり k が十分大きければ、 $G(Z)$ の Z に関するリプシッツ連続性や、 F による遷移行列の有界性などの条件を必要とするが、 $\|Z_1 - Z_0\|$ の大きさは無関係に収束が期待できる。すなわち、 $\tilde{M}\|Z_1 - Z_0\| < 1$ である必要はない。更にアルゴリズムの漸近的な性質からみて、1回1回の繰り返し計算ではそれほど大きくない修正量が発生すると考えられる。また、大域的な収束性を保障し得るアルゴリズムとしてこう配法などがあるが、これらはあるパラメータの試行的選択が必要である。例えば、こう配法では $J(u_k + \alpha H_u(u_k))$ が最小となるように $\alpha > 0$ を選ばなくてはならない⁽¹³⁾。その他、準ニュートン法に基づいたアルゴリズム⁽¹³⁾もあるが、それは計算法が煩雑で多くのメモリーを必要とする⁽¹³⁾。本論文の方法はこのようなパラメータの選択を必要とせず、各ステップごとのメモリーは x_k 、 λ_k だけで済み計算法も簡単である。要するにこの方法の特徴は適当な初期解から始め計算回数は多少多くなるが、パラメータの選択を必要とせず収束を得ることができ、メモリーもそれほど多く必要としない簡単な計算法である。

しかしながら、このような特徴があっても、実際の数値計算では $\tilde{M}\|Z_1 - Z_0\|$ が大き過ぎるとなかなか収束が得られないこともあり得る。そこで $\tilde{M}\|Z_1 - Z_0\|$ をできるだけ小さく (ただし、 < 1 という意味ではない。) なるように工夫することもすべきである。そこで一つの工夫として、 $\dot{x} = Ax + Bu + g(x)$ による x について非線形項 $g(x)$ と $q(x)$ を $\bar{x}$ に無関係な時変形定数として扱い、線形システム

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + q(x) \\ \bar{x}(t_0) &= x_i \\ J &= \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} \bar{x}(t)^T Q(t) \bar{x}(t) + \frac{1}{2} \bar{u}(t)^T R(t) \bar{u}(t) \right\}\end{aligned}$$

$$+q(x)\left\}dt+\frac{1}{2}\bar{x}^T(t_f)Q_f\bar{x}(t_f)\right.$$

の最適解 x_0 を求めこれを最初の推定解とする方法が考えられる。

この方法を任意の k に適用してシステム

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A(t)x_k(t) + B(t)u_k(t) + q(x_{k-1}(t)) \\ x_k(t_i) &= x_i \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} J = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} x_k^T(t) Q(t) x_k(t) + \frac{1}{2} u_k^T(t) R(t) u_k(t) \right. \\ \left. + q(x_{k-1}(t)) \right\} dt + \frac{1}{2} x_k^T(t_f) Q_f x_k(t_f) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (15)$$

の最適化を繰り返す方法については筆者らは既に提案している⁽⁹⁾。ただし、この方法は $g_x=0$, $q_x=0$ (付録2)とするためその収束解が最適性の必要条件をみたすということは、(3)式を用いることができずいまのところ明らかでない。

なお、この方法による収束解の存在については、山本、杉浦氏⁽⁸⁾らの結果を用いて証明することができる。第4章のアルゴリズムではこのような工夫についても述べる。

4. アルゴリズム

以下に第3章で述べた繰り返し計算法を若干の工夫を入れ、アルゴリズムとして定式化する。

Step 0 ($Z_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \lambda_0(t) \end{pmatrix}$) を与える

$u(t)$ に適当な推定解 $u_0(t)$ を与え、方程式(1)を初期条件 $x(t_i) = x_i$ のもとに解く。

このときの解を $x_0(t)$ とし $\lambda(t)$ に適当な推定解 $\lambda_0(t)$ を与える。例えば、 $\lambda_0(t) \equiv Q_f x(t_f)$ とすればよい。

また、このときの評価関数の J の値を(2)式により計算し、 J_0 とおき $J_1^{(0)} = J_0$, $k=1$ とする。

Step 1 (S_k, h_k の計算)^{*1}

$x_0(t)$, $\lambda_0(t)$ により、方程式(12), (13)を終端条件(12)', (13)'のもとに解き、 $S_1(t_i)$, $h_1(t_i)$ を求める。

Step 2 ($Z_k(t_i)$ の決定 $Z_k(t) = \begin{pmatrix} x_k(t) \\ \lambda_k(t) \end{pmatrix}$ の計算)

$\lambda_1(t_i) = S_1(t_i)x_i + h_1(t_i)$ により $\lambda_1(t_i)$ を求める。

方程式(9)を解き(このときの x を x_1 とする。) $u_1(t) = -B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\lambda_1(t)$ により $u_1(t)$ を求める。^o このときの評価関数 J の値を $J_1^{(k)}$ とおく。

Step 3 ($Z_k(t)$ の $J^{(k)}$ による収束のチェック)

(i) 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $|J_1^{(k-1)} - J_1^{(k)}| < \varepsilon$ が成立する場合 $|J_1^{(k)} - J_0| < \varepsilon$ が成立すれば計算を

停止する。そうでなければ、

$$u_0(t) = u_1(t)$$

$$\lambda_0(t) = \lambda_1(t)$$

として Step 0 にもどる。

(ii) (i)が成立しない場合

$$x_0(t) = x_1(t)$$

$$\lambda_0(t) = \lambda_1(t)$$

$$k = k + 1$$

として Step 1 にもどる。

Step 0~Step 3 は解が収束するまで十分な回数を繰り返す必要があるが、(12)式の $S_k(t)$ の方程式は終端条件が $S_k(t_f) = Q_f$ であり、その係数 $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ は繰り返しによって変化しないから1回解くだけでよい。すなわち、 $S_1(t)$ だけを求めればよい。また、積分は数値積分を行うから、Step 1~Step 3 の繰り返しを行っても、誤差が累積されることがあり $Z_k(t)$ が収束しても $u_0(t) = u_1(t)$ として Step 0 に戻し確認する必要がある。^{*2} Step 3 の判定が少し複雑になっているのはそのためである。また、Step 0 と Step 1~Step 2 の実行の過程で x_0 と x_1 が大きく隔たる場合はオーバーフローが発生するかもしれない。特に x について終端拘束(後述)が与えられた場合、最初の x_0 の与え方が不適当であるときなどはオーバーフローが発生しやすくなる。この場合 g_x や q_x の項の影響が無視できないほど大きくなる。そこで必要に応じて第3章で述べたように $g_x=0$, $q_x=0$ とする方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾を併用する。すなわち、最小化問題(14), (15)式を解くアルゴリズムを併用する。具体的に次のような工夫を行う。

(a) 最初の Step 0~Step 3 の実行では $g_x=0$, $q_x=0$ とする。

(b) Step 3 の(i)の判定の前に適当な大きさの $M > 0$ について $\|x_1 - x_0\| < M$ が成立するかどうかを判定し、成立しない場合 $g_x=0$, $q_x=0$ として Step 0 にもどる。

実用的には $\|x_1 - x_0\|$ の代りに $|J_1^{(k)} - J_0|$ を用いる方が簡単である。いずれにしても M の大きさはいまのところ試行的に決めざるを得ない。

5. 計算例

以上のアルゴリズムをシステムの方程式が Van der pole の非線形方程式で与えられ、評価関数が2次形式で与えられる次の最小問題について、(i)終端点が自由な場合、(ii)終端点が固定された場合、(iii)終端

^{*2}: 最適解が求まっていれば Step 1~Step 2 を無駄に1回実行することになるが Step 3 の判定で計算は停止する。

^{*1}: 表現を簡単にするため $k-1$ を0で k で代表させる。

点に等式拘束が与えられた場合の三つの場合について適用してみた。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1-x_1^2)x_2 + u & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$J = \int_0^5 \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt$$

ただし、係数などは次のようにおいた。

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1^2 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(t) = 1$$

また、以下の説明で繰り返し回数とは Step 0~Step 3 の2重のループのうち、内側のループの実行回数の総数を示し、最初の推定解は $u_0(t) \equiv 0$, $\lambda_0(t) \equiv 0$ とした。

(i) 終端点が自由な場合 第2章~第4章で説明に用いた式がそのまま使用できる。結果は図1, 2で示す通りである。繰り返し回数27回で $J=1.479$ を得た。Nedeljkovic⁽¹³⁾の結果と比較すると十分近似になっているものと考えられる。また、この場合第4章で

図1 解軌道 (終端自由の場合)

Fig. 1. Trajectories by this method (terminal free).

図2 制御の収束 (終端自由の場合)

Fig. 2. Convergence of Control Function (terminal free).

述べたような $g_x=0$ とする工夫は必要としなかった。

(ii) 終端点が固定された場合、例では

$$x_1(5)=0$$

$$x_2(5)=0$$

とする。一般に終端点が $x(t_f)=x_f$ の形で固定されている場合(6)式の $\lambda(t)$ に関する微分方程式の境界条件は $\lambda(t_i)$, $\lambda(t_f)$ とも未知である。そこで逆リッチ変換⁽¹⁰⁾ $x_k(t)=S_k(t)\lambda_k(t)+h_k(t)$ を用いることにする。この場合(12), (13)式に相当する式は

$$\begin{aligned} \dot{S}_k(t) &= A(t)S_k(t) + S_k(t)A^T(t) - B(t)R(t)B^T(t) \\ &\quad + S_k(t)Q(t)S_k(t) \end{aligned}$$

$$S_k(t_f)=0$$

$$\dot{h}_k(t) = \{A(t) + S_k(t)Q(t)\}h_k(t) + g(x_{k-1}(t))$$

$$+ S_k(t)g_x^T(x_{k-1}(t))\lambda_{k-1}(t)$$

$$+ S_k(t)q_x^T(x_{k-1}(t))$$

$$h_k(t_f) = x(t_f)$$

となる。計算結果は図3, 4の通りである。繰り返し

図3 解軌道 (終端固定の場合)

Fig. 3. Trajectories by this method (terminal fixed).

図4 評価関数の収束 (終端固定の場合)

Fig. 4. Convergence of Cost Function (terminal fixed).

回数 22 回で $J=1.44$, $x_1(5)=-0.01$, $x_2(5)=-0.01$ を得た。また第 4 章で述べたように $g_x=0$ とする工夫を用いている。ただし, $g_x=0$ とおいたのは繰り返し 1 回から 4 回の間である。

(Ⅲ) 終端に等式拘束が与えられた場合, 例では

$$-1-x_1(5)+x_2(5)=0$$

とする。一般に終端に等式拘束

$$D \cdot x(t_f) + E = 0$$

$$D \in R^{s \times n}$$

$$E \in R^s$$

ただし, $\text{rank}(D)=s$ ($1 \leq s \leq n$) が与えられた場合, ベクトル $x(t)$ の要素の順序を適当に入れ替えることにより

$$(D_1 | D_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + E = 0$$

$$D_1 \in R^{s \times s} \quad \text{rank}(D_1)=s$$

$$D_2 \in R^{s \times (n-s)}$$

$$x_1 \in R^s$$

$$x_2 \in R^{n-s}$$

と書き直すことができる。そこで x に対応して

$$g(x), \lambda(t), Q(t), A(t), B(t), R(t), g(x)$$

の要素の順序を入れ替え

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(t) & S_2(t) \\ S_3(t) & S_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \lambda_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$$

とおくと (12), (13) 式に相当する式を導くことができる。(これを筆者らは合成リカッチ変換⁽⁷⁾と呼んでいる。) 結果は図 5, 6 に示す通りである。繰り返し 17 回目で $J=1.769$

$$-1-x_1(5)+x_2(5)=0.0951$$

を得た。

図 5 解軌道 (終端等式拘束の場合)

Fig. 5. Trajectories by this method (terminal equality constrained).

図 6 評価関数の収束 (終端等式拘束の場合)

Fig. 6. Convergence of Cost Function (terminal equality constrained).

(Ⅱ)と同様 $g_x=0$ とする工夫を用いているがその必要があったのは 1 回から 5 回の間であり, それ以後は $g_x=0$ としていない。

この問題について準線形化法や第 2 変分法を最初の推定解を $u_0(t) \equiv 0$ として試みたが, 繰り返し 1 回目からオーバーフローが発生し⁽⁷⁾計算が続けられなくなった。

6. あとがき

本研究では, 不動点定理を用いて解を漸近的に求める方法を試みた。この方法は収束の速さや解の精度の点ではニュートン法によるものと比較すると劣るものの, アルゴリズムが著しく簡単であり, 計算の過程でオーバーフローが発生しにくいと, 次数の高い問題にも適応できると考えられる。

実際の数値計算では, このような比較的簡単なアルゴリズムによって近似解を求め, その近似解をもとにして, 感度のよいアルゴリズムを適用することが適当と考える。

(昭和 62 年 2 月 24 日受付, 同 62 年 7 月 27 日再受付)

文 献

- (1) 日野:「境界値問題の解法」(昭 56) 朝倉書店
- (2) D. H. Jacobson: "New Second-Order and First-Order Algorithms for Determining Optimal Control: Journal of Optimization Theory and Applications" 2, No. 6, 411 (1968)
- (3) Nikola B. Nedeljkovic: "New Algorithms for Unconstrained Nonlinear Control Problems: IEEE Transactions on Automatic Control" AC-25, No. 4, 868 (1981)
- (4) Donald M. Wiberg.: "Theory and Problems of State Space and Linear Systems" (1971) McGraw-Hill
- (5) 柴垣:「関数解析と数値解析の基礎」(昭 60) 森北出版
- (6) ポントリヤーギン:「常微分方程式」(昭 59) 共立出版
- (7) 山浦・清原・太田:「合成リカッチ変換法によるアクセサリ問題の計算法」計測自動制御学会論文集 19, No. 4, 342

- (昭 58)
- (8) 山本・杉浦:「非線形系の最適制御とその解の存在」システムと制御 16, 9, 737 (昭 47)
- (9) 師玉・山浦・太田:「係数を時変形定数とする非線形最適制御問題の数値計算法」第 28 回自動制御連合講演会予稿(昭 60)
- (10) 山浦・竹生・師玉・太田:「逆リカッチ変換法による非線形 2 次形式問題の計算法」計測自動制御学会論文集 22, No. 6, 703 (昭 61)
- (11) シュヴァルツ: 解析学 1 p. 83 (昭 47) 東京図書
- (12) ベルマン・カラバ: 準線形化とその応用 p. 26 (昭 47) 東京図書
- (13) 嘉納: システムの最適理論と最適化 p. 215 (昭 62) コロナ社

付 録

1. (1), (2) 式からハミルトン関数を導入すると

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \lambda(t)) \\ = \frac{1}{2} x(t)^T Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u(t)^T R(t) u(t) + q(x(t)) \\ + \lambda^T(t) \{A(t) x(t) + B(t) u(t) + g(x(t))\} \end{aligned}$$

$\lambda(t)$: ラグランジュ乗数 $\in \mathbb{R}^n$

最適制御理論からよく知られているように、上の式から $\lambda(t)$ についての方程式が

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -H_x^T \\ &= -A^T(t) \lambda(t) - Q(t) x(t) \\ &\quad - g_x^T(x(t)) \lambda(t) - q_x^T(x(t)) \end{aligned}$$

で与えられる。特に g_x^T や q_x^T の項が存在することに注意を要する。

$u(t)$ についても最小性の必要条件

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), \lambda(t)) &= \min_v H(x(t), v, \lambda(t)) \\ &\quad (t \in [t_i, t_f]) \end{aligned}$$

から $H_u = 0$ として

$$u(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \lambda(t)$$

が得られる。

$$\begin{aligned} 2. (9) \text{式を } Z_k(t) &= \begin{pmatrix} x_k(t) \\ \lambda_k(t) \end{pmatrix} \text{ によって書き直すと} \\ \left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A(t) x_k(t) - B(t) R^{-1}(t) B(t)^T \lambda_k(t) \\ &\quad + g(x_{k-1}(t)) \\ x_k(t_i) &= x_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)' \\ \left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_k(t) &= -A^T(t) \lambda_k(t) - Q(t) x_k(t) \\ &\quad - g_x^T(x_{k-1}(t)) \lambda_{k-1}(t) - q_x^T(x_{k-1}(t)) \\ \lambda_k(t_f) &= Q_f x_k(t_f) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)' \end{aligned}$$

そこで $\lambda_k(t) = S_k(t) x_k(t) + h_k(t)$ と (5)' 式から

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_k(t) &= \dot{S}_k(t) x_k(t) + S_k(t) \dot{x}_k(t) + \dot{h}_k(t) \\ &= \dot{S}_k(t) x_k(t) + S_k(t) A(t) x_k(t) \\ &\quad - S_k(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) S_k(t) x_k(t) \\ &\quad - S_k(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) h_k(t) \\ &\quad + S_k(t) g(x_{k-1}(t)) + \dot{h}_k(t) \dots\dots\dots (14)' \end{aligned}$$

また (6)' 式の右辺から

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_k(t) &= -A^T(t) S_k(t) x_k(t) - A^T(t) h_k(t) \\ &\quad - Q(t) x_k(t) - g_x^T(x_{k-1}(t)) \lambda_{k-1}(t) \\ &\quad - q_x^T(x_{k-1}(t)) \dots\dots\dots (15)' \end{aligned}$$

(14)', (15)' 式を $x_k(t)$ について整理することにより

$$\begin{aligned} \dot{S}_k(t) &= -Q(t) - A^T(t) S_k(t) - S_k(t) A(t) \\ &\quad + S_k(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) S_k(t) \\ \dot{h}_k(t) &= -A^T(t) h_k(t) + S_k(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) h_k(t) \\ &\quad - S_k(t) g(x_{k-1}(t)) - q_x^T(x_{k-1}(t)) \\ &\quad - g_x^T(x_{k-1}(t)) \cdot \lambda_{k-1}(t) \end{aligned}$$

を得る。また上式の境界条件は

$$S_k(t_f) x_k(t_f) + h_k(t_f) = \lambda_k(t_f) = Q_f x_k(t_f)$$

より

$$\begin{aligned} S_k(t_f) &= Q_f \\ h_k(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

として与えられる。