測位システムにおける観測方向と推定精度に関する固有値的考察

正 員 小 坂 満 隆 (日立製作所)

1. 緒 言

衛星からの電波を利用する GPS (Global Positioning System) や海中における移動体の位置決定システムなどの測位システムでは、観測誤差とともに観測方向ベクトルの幾何学的な位置関係が、対象とする移動体の位置推定精度に大きい影響を及ぼす。例えば、GPS 測位システム⁽¹⁾では、複数の可視衛星の中から、最も良い位置推定精度を与える 4 つの衛星を選択することが必要となるし、海中の移動体位置決定システムでは、音波を受信するセンサをどのように配置するかが、推定精度を向上させるうえで大きな要因となる。

このような観測方向ベクトルの幾何学的関係と推定精度との関係は、推定誤差共分散行列 P のトレースの平方根で定義される GDOP⁽²⁾⁽³⁾ (Geometric Dilution of Precision) なる誤差評価指標により解析が行われてきた。GDOP は、推定誤差の期待値の 1σ の大きさを与えるもので、事前の推定精度の評価指標として非常に有効である。すなわち、通常の測位システムでは、GDOP が最小となるような観測方向ベクトルを選択している。しかしながら、GDOP を計算するための推定誤差共分散行列は逆行列計算を必要とするため、一定個数の観測ベクトルを選んで推定問題を解くような場合、選択対象の観測方向ベクトルの個数が多いとすべての組合せに対して、GDOP を評価する必要があるため、処理時間が問題となるという欠点をもっている。また、観測方向ベクトルと GDOP の直接的関係について論じている文献も少ないようである。

一方、最近の多変数制御系の研究でみられるように、固有値を用いた解析によりシステムの構造・特性が明確にはあてられる。そこで、測位システムにおい

ても、固有値を用いたアプローチにより、観測方向ベクトルの幾何学関係と推定精度の関係が明確に説明できるのではないかと考えた。すなわち、固有値を用いて、測位システムにおける観測方向ベクトルと推定精度の構造的関係を明らかにし、それに基づいて、高精度化のために観測方向をどう取るべきかを示すことが本論文の目的である。

本論文では、まず、推定誤差共分散行列 P の固有値、固有ベクトルと観測方向ベクトルの関係を明らかにする。すなわち、 P^{-1} の固有値が固有ベクトルと観測方向ベクトルの 2 乗和で与えられることを示す。次に、この事実に基づき、推定精度を上げるために観測方向をどの方向に取るかに関して一つの定理を導く。更に、固有値、固有ベクトルと観測方向ベクトルの関係から、推定誤差共分散行列すなわち逆行列演算をしないで GDOP を求める方法を提案し、その妥当性を衛星選択シミュレーションで確認する。

2. 測位問題における観測方向ベクトルと GDOP の関係

〈2・1〉 測位問題における最適な観測方向選択問題

GPS などの測位システムでは、複数のあらかじめ位置のわかっている基準点 (x_i, y_i, z_i) と、測位の対象となる移動体の位置 (x, y, z) 間の測距離 R_i を音波、あるいは電波の伝搬時間を測定して求める

$$\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} = R_i + n_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

なる観測方程式に基づいて、移動体の位置を計算している。(1)式は、非線形方程式であるが、多くの測位問題では、事前に移動体の位置に関するおおよその位置情報 (x_a, y_a, z_a) が利用できる場合が多い。この場合、(1)式を線形近似して、直接 (x, y, z) を求めるかわりに、 $\Delta x = x - x_a$, $\Delta y = y - y_a$, $\Delta z = z - z_a$ を未知数とした線形方程式

$$y = Hx + n \quad \dots\dots\dots (2)$$

A Geometrical Interpretation of GDOP (Geometric Dilution of Precision) by an Eigenvalue Approach. By Michitaka Kosaka, Member (Systems Development Laboratory, Hitachi Ltd.).

小坂満隆：正員，日立製作所システム開発研究所

に対して線形推定問題を解くのが一般的である。ここで、 $\mathbf{x}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 。行列 H は、移動体から i 番の基準点への単位方向ベクトル $\mathbf{h}_i$ から成り立っており、 n 個の基準点を使用した場合

$$H = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

と表現できる。観測誤差ベクトル $\mathbf{n}=(n_1, n_2, \dots, n_n)$ は、 n_i が平均 0、分散 σ_i^2 の無相関白色雑音と仮定する。以後の議論では $\mathbf{h}_i$ を観測方向ベクトルと呼ぶことにする。

本論文で議論の対象とする測位問題における観測方向選択問題とは、ハードウェアなどの制約から、多くの候補となる基準点から n 個の基準点を選んで未知パラメータの推定問題を解く場合、最良の推定精度を与える n 個の基準点を選択する問題である。以下では、単に上述のように最も簡単な測位問題だけでなく種々の推定問題への応用の可能性をもつことから、未知パラメータ $\mathbf{x}$ の次元を m として、一般化した議論を進めることにする。

〈2.2〉 観測方向選択の評価規範としての GDOP

(2)式で与えられる線形化された観測方程式に基づく最小 2 乗推定量 $\hat{\mathbf{x}}$ に対する推定誤差共分散行列 P 、 $P=E\{(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^T\}$ は、

$$P=(H^T V^{-1} H)^{-1} \dots\dots\dots (4)$$

で与えることができる。 V は、観測誤差ベクトル $\mathbf{n}$ の共分散行列で、

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

である。すなわち、測位問題では、推定誤差の大きさは、観測誤差の影響 V だけでなく、測位対象となる移動体と位置のわかっている基準点との幾何学的関係 H に大きく左右されることになる。そこで、通常の測位システムでは、推定誤差共分散行列 P のトレースの平方根を、GDOP と定義し、

$$\text{GDOP} = \sqrt{\text{trace}(P)} \dots\dots\dots (5)$$

これを最小にするような観測方向ベクトルを選択するようにしている。行列 V が対角要素のみであることに注目して、観測方向ベクトル $\mathbf{h}_i$ を観測誤差の標準偏差 σ_i で正規化し、 $\hat{\mathbf{h}}_i = \mathbf{h}_i / \sigma_i$ とおき直せば、GDOP は $(H^T H)^{-1}$ のトレースの平方根となる。すなわち、正規化した観測行列 H が GDOP に関するすべての情報量を含んでいることになる。

〈2.3〉 $(H^T H)$ 行列の固有値と GDOP の関係

まず、第 3 章以下の議論の基本となる $(H^T H)$ 行列の固有値と GDOP の関係について述べる。 $(H^T H)$ 行列の固有値を $\lambda_i (i=1, \dots, m)$ とし、固有値を大きい順に $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ とする。更に λ_i に対応する固有ベクトルを ξ_i とする。このとき、線形代数の理論⁽⁶⁾から

$$\text{trace}(H^T H) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{trace}(H^T H)^{-1} = \sum_{i=1}^m 1/\lambda_i \dots\dots\dots (7)$$

の関係が成立する。すなわち、 $H^T H$ の固有値が与えられれば、 $H^T H$ の逆行列を計算することなしに、GDOP が計算できる。

次に、固有値 λ_i と観測方向ベクトル $\mathbf{h}_j, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ の関係を明らかにする。 $(H^T H)$ は実対象行列だから、直交行列 U が存在して、 $(H^T H)$ 行列を対角化できる。すなわち、

$$U^T H^T H U = D \dots\dots\dots (8)$$

である。ここで、 D は対角要素が固有値 λ_i であり、他の要素が 0 の行列であり、 U は固有ベクトル $\xi_i, (i=1, \dots, m)$ からなる行列である。 ξ_i をたてベクトルとすると、

$$U = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \dots\dots\dots (9)$$

であるから、(8)式を成分ごとに書き下せば、

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n (\mathbf{h}_j \cdot \xi_i)^2 \quad (i=1, \dots, m) \dots\dots\dots (10)$$

$$0 = \sum_{j=1}^n (\mathbf{h}_j \cdot \xi_i) \cdot (\mathbf{h}_j \cdot \xi_k) \quad (i \neq k) \dots\dots\dots (11)$$

なる関係を得ることができる。上式を解釈すれば、 $(H^T H)$ 行列の固有値 λ_i は各観測方向ベクトルの固有ベクトル ξ_i への内積の 2 乗和で与えられ、各観測方向ベクトルの固有ベクトルへの内積の積の和は 0 であるということができる。

さて、固有値に対する最大原理から、最大固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル ξ_1 は、(10)式、すなわち

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{h}_j \cdot \xi)^2 \dots\dots\dots (12)$$

を最大にしななければいけない。すなわち、 ξ_1 は、観測方向ベクトル $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ が与えられたとき、これらのベクトルとの内積の 2 乗和を最大にする方向にとられる。更に、この方向が、最もよく観測できることを示している。固有ベクトルの性質から、残りの固有ベクトル $\xi_2, \dots, \xi_m$ は、 ξ_1 に直交する。よって、 $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ の観測方向ベクトルのうち、 ξ_1 に直交する成分が、 $\xi_2, \dots, \xi_m$ 方向の観測情報量である。すなわち、

ξ_1 に直交する空間 S^{n-1} に存在する各観測方向ベクトルの観測情報量 $\tilde{h}_i^{(1)}$ を使って、(12)式を最大にするものが ξ_2 となる。ここで、

$$\tilde{h}_i^{(1)} = h_i - (h_i \cdot \xi_1) \cdot \xi_1 \dots\dots\dots (13)$$

である。この手続きを逐次続けていくことによって、 ξ_i を求める場合、 S^{n-i+1} に含まれる

$$\tilde{h}_i^{(k-1)} = h_i - \sum_{j=1}^{k-2} (h_i \cdot \xi_j) \cdot \xi_j \dots\dots\dots (14)$$

なる観測情報量を使って、固有ベクトル $\xi_3, \dots, \xi_m$ が逐次的に計算できる。このことは、観測方向ベクトル $h_1, h_2, \dots, h_n$ が与えられた場合、観測情報量の多い方向から順に固有ベクトル方向が決められることを意味している。すなわち、 ξ_m の方向が最も観測が難しいことを示している。GDOP は、 $(H^T H)$ 行列の固有値の逆数で与えられる。すなわち、最小固有値 λ_m が GDOP の値に最も大きい影響を与えることになる。固有値の和が一定であるような場合には、各固有値が等しくなるように観測方向ベクトルを設定することが、GDOP を小さくするために必要である。

3. 逐次推定における最適な観測方向に関する考察

〈3・1〉 観測方向ベクトルの推定精度への寄与率

前章では、 n 個の観測方向ベクトルを使用した場合の推定問題における観測行列 H の作る $(H^T H)$ 行列の固有値と GDOP の関係について述べた。この関係を利用すれば、カルマンフィルタのように、観測データを逐次的に使用して未知パラメータの推定量を更新していく逐次推定においても、次にとるべき最良の観測方向がどの方向であるかを理論的に明らかにできる。まず、観測方向ベクトル $(h_1, \dots, h_n)$ を使用した推定量に対して、 $n+1$ 番目の観測 h_{n+1} が観測方向のとり方によって推定精度への寄与が非常に異なってくることを概念的に示すことにする。

GDOP (n) を n 個の観測 $(h_1, \dots, h_n)$ を使用して得られた GDOP とする。 h_{n+1} を最大固有値 $\lambda_1^{(n)}$ に対応する固有ベクトル $\xi_1^{(n)}$ 方向にとると仮定する。このとき、 $(h_1, \dots, h_{n+1})$ との内積の2乗和を最大にする方向は、 $\xi_1^{(n)}$ であるから、 h_{n+1} をこの方向に加えても固有ベクトル方向は変わらない。よって、(7)、(10)式から

$$\begin{aligned} \text{GDOP}^2(n) - \text{GDOP}^2(n+1) \\ &= \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} - \frac{1}{\lambda_1^{(n)} + |h_{n+1}|^2} \\ &= \frac{|h_{n+1}|^2}{\lambda_1^{(n)}(\lambda_1^{(n)} + |h_{n+1}|^2)} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

である。同様に、 h_{n+1} を最小固有値 $\lambda_m^{(n)}$ に対応する固有ベクトル方向にとるものとする。〈3・2〉節で述べる定理から、この場合についても固有ベクトル方向は変わらず、

$$\begin{aligned} \text{GDOP}^2(n) - \text{GDOP}^2(n+1) \\ &= \frac{|h_{n+1}|^2}{\lambda_m^{(n)}(\lambda_m^{(n)} + |h_{n+1}|^2)} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

なる関係を得る。よって、 $\xi_m^{(n)}$ の方向に観測方向ベクトル h_{n+1} をとった方が、 $\xi_1^{(n)}$ の方向にとるより、

$$\frac{\lambda_1^{(n)}(\lambda_1^{(n)} + |h_{n+1}|^2)}{\lambda_m^{(n)}(\lambda_m^{(n)} + |h_{n+1}|^2)} \dots\dots\dots (17)$$

倍だけ GDOP の平方の値を減少させることができる。更に、 $\lambda_1^{(n)}$ と $\lambda_m^{(n)}$ の大きさの差が大きい方がこの効果は大きい。このことから、固有値の小さい方向に観測方向ベクトルを配置することが有効であることがわかる。次節でこれを定理の形で述べる。

〈3・2〉 最適な観測方向 最適な観測方向とは GDOP を最小にする方向とした場合、固有値と GDOP の関係から以下の定理が成立する。

〔定理〕

観測方向ベクトル $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ からなる観測行列を H_{n-1} とする。 $(H_{n-1}^T H_{n-1})$ 行列の固有値と固有ベクトルを $(\lambda_1^{(n-1)}, \xi_1^{(n-1)}), \dots, (\lambda_m^{(n-1)}, \xi_m^{(n-1)})$ とする。このとき、次の観測 h_n と固有値および固有ベクトルの間に以下の関係が成り立つ。

(1) h_n が $\xi_m^{(n-1)}$ の方向、すなわち、最小固有値に対応する固有ベクトルの方向に取られたとする。このとき、 $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ からなる観測行列 H_n の作る $(H_n^T H_n)$ 行列の固有ベクトルは、 $(H_{n-1}^T H_{n-1})$ 行列の固有ベクトルと一致する。更に、 $(H_n^T H_n)$ の最小固有値は、 $\lambda_{m-1}^{(n-1)}$ もしくは $\lambda_m^{(n-1)} + |h_n|^2$ である。

(2) h_n の最適な観測方向は $\xi_m^{(n-1)}$ の方向である。

〔証明〕

(1) の証明

$$\begin{aligned} H_{n-1} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} \\ U_{n-1} &= (\xi_1^{(n-1)}, \dots, \xi_m^{(n-1)}) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

である。これから、(10)、(11)式を使い

$$\lambda_j^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n-1} (h_i \cdot \xi_j^{(n-1)})^2 \dots\dots\dots (19)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (h_i \cdot \xi_j^{(n-1)}) \cdot (h_i \cdot \xi_k^{(n-1)}) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

の関係が成り立つ。 $\mathbf{h}_n$ の方向が $\xi_m^{(n-1)}$ の方向に等しければ、 $(H_n U_{n-1})^T (H_n U_{n-1})^T$ の (j, k) 成分 ($j \neq k$) は、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i \cdot \xi_j^{(n-1)}) (\mathbf{h}_i \cdot \xi_k^{(n-1)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_j^{(n-1)}) (\mathbf{h}_i \cdot \xi_k^{(n-1)}) \\ &+ (\mathbf{h}_n \cdot \xi_j^{(n-1)}) (\mathbf{h}_n \cdot \xi_k^{(n-1)}) \dots (21) \end{aligned}$$

となる。右辺の第1項は、(20)式より0である。右辺の第2式は、 $\mathbf{h}_n$ が $\xi_m^{(n-1)}$ の方向にとられたから、 $(\mathbf{h}_n \cdot \xi_j^{(n-1)})$ か $(\mathbf{h}_n \cdot \xi_k^{(n-1)})$ の少なくともいずれか一方が0である。よって $U_{n-1}^T H_n^T H_n U_{n-1}$ 行列の対角以外の成分は0であり、 U_{n-1} は $(H_n^T H_n)$ を対角化することができる。このとき、 $(H_n^T H_n)$ の固有値は、 $(\lambda_1^{(n-1)}, \lambda_2^{(n-1)}, \dots, \lambda_{m-1}^{(n-1)}, \lambda_m^{(n-1)} + |\mathbf{h}_n|^2)$ であり、 $|\mathbf{h}_n|^2$ の大きさに従い、最小固有値は、 $\lambda_{m-1}^{(n-1)}$ もしくは $\lambda_m^{(n-1)} + |\mathbf{h}_n|^2$ のいずれかである。

(2)の証明

(a) $\lambda_m^{(n-1)} + |\mathbf{h}_n|^2 < \lambda_{m-1}^{(n-1)}$ の場合

(GDOP)² が各固有値の逆数の和であるから、GDOP が小さくなるためには、最小固有値が大きくなる必要がある。すなわち、 $\mathbf{h}_n$ を $\xi_m^{(n-1)}$ の方向にとった場合、最小固有値が $\lambda_m^{(n-1)} + |\mathbf{h}_n|^2$ となり最大となる。よって、GDOP を最小とするためには、 $\mathbf{h}_n$ を $\xi_m^{(n-1)}$ の方向にとらなければならない。

(b) $\lambda_m^{(n-1)} + |\mathbf{h}_n|^2 > \lambda_{m-1}^{(n-1)}$ の場合

(i) $\mathbf{h}_n$ が $\xi_{m-1}^{(n-1)}$ と $\xi_m^{(n-1)}$ で作る空間にある場合を考える。このとき $(\xi_1^{(n-1)}, \dots, \xi_{m-2}^{(n-1)})$ は $H_n^T H_n$ の固有ベクトルとなっている。更に、(19)式の関係から、 $\mathbf{h}_n$ により固有値が変化する $\lambda_{m-1}^{(n-1)}$ と $\lambda_m^{(n-1)}$ は、

$$\lambda_{m-1}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_{m-1}^{(n)})^2 + (\mathbf{h}_n \cdot \xi_{m-1}^{(n)})^2 \dots (22)$$

$$\lambda_m^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_m^{(n)})^2 + (\mathbf{h}_n \cdot \xi_m^{(n)})^2 \dots (23)$$

となる。固有値に対する最大原理から、 $\lambda_{m-1}^{(n)}$ を最大とするような方向を $\xi_{m-1}^{(n)}$ とする必要がある。

(b)の条件から $\xi_{m-1}^{(n)}$ が $\mathbf{h}_n$ の方向に一致するとき $\lambda_{m-1}^{(n)}$ が最大となる。このとき

$$\lambda_{m-1}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_{m-1}^{(n)})^2 + |\mathbf{h}_n|^2 \dots (24)$$

$$\lambda_m^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_m^{(n)})^2 \dots (25)$$

である。すなわち、 $\xi_{m-1}^{(n)} = \xi_m^{(n-1)}$ 、 $\xi_m^{(n)} = \xi_{m-1}^{(n-1)}$ となる。このことから、 $\mathbf{h}_n$ の方向を最小固有値に対

応する固有ベクトル $\xi_m^{(n-1)}$ の方向に一致させる必要がある。

(ii) $\mathbf{h}_n$ が $\xi_m^{(n-1)}$ 、 $\xi_{m-1}^{(n-1)}$ 、 $\xi_{m-2}^{(n-1)}$ で作られる3次元空間にある場合を考える。

$\lambda_{m-2}^{(n-1)} > \lambda_{m-1}^{(n-1)} + |\mathbf{h}_n|^2$ の場合、最小の GDOP を得るためには、 $\mathbf{h}_n$ が $\xi_{m-1}^{(n-1)}$ と $\xi_{m-2}^{(n-1)}$ の作る2次元空間にある必要がある。(i)の議論から、この場合、最適な観測方向は、最小固有値に対応した固有ベクトルの方向である。

$\lambda_{m-2}^{(n-1)} \leq \lambda_m^{(n-1)} + |\mathbf{h}_n|^2$ の場合

$$\lambda_{m-2}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_{m-2}^{(n)})^2 + |\mathbf{h}_n|^2 \dots (26)$$

$$\lambda_{m-1}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_{m-1}^{(n)})^2 \leq \lambda_{m-2}^{(n-1)} \dots (27)$$

$$\lambda_m^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{h}_i \cdot \xi_m^{(n)})^2 \leq \lambda_{m-1}^{(n-1)} \dots (28)$$

である。GDOP を最小にするためには $\lambda_{m-2}^{(n)}$ を最小化し、 $\lambda_m^{(n)}$ を最大化する必要がある。このためには、 $\xi_{m-2}^{(n)} = \xi_m^{(n-1)}$ 、 $\xi_{m-1}^{(n)} = \xi_{m-2}^{(n-1)}$ 、 $\xi_m^{(n)} = \xi_{m-1}^{(n-1)}$ とおく必要がある。すなわち、 $\mathbf{h}_n$ は最小固有値に対応する固有ベクトルの方向にとる必要がある。

(iii) 以上の考え方を m 次元まで続けていけば、すべての場合に、 $\mathbf{h}_n$ を最小固有値に対応する固有ベクトルの方向にとる必要のあることが証明できる。

(証明終)

4. GDOP の近似計算法とその応用

〈4・1〉 GDOP の近似計算法 第2章で述べた GDOP と固有値の関係から、推定誤差共分散行列を求めることなしに、観測方向ベクトルから直接 GDOP を近似的に計算する方法を提案する。〈2・2〉節で述べたような逐次的な固有値および固有ベクトルの計算方法で最も困難な点は、(12)式の最大化である。そこで、ここでは(12)式を最大にするベクトルを

$$\xi = \frac{1}{\left| \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_i \right|} \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_i \dots (29)$$

で近似する。これは、 $\sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i \cdot \xi)$ を最大にするが、(12)式の $f(\xi)$ を最大にはしていない。しかしながら、〈4・3〉節の数値例で示すように、よい近似を与えることがわかる。(29)式の近似式を使うと、GDOP の近似計算アルゴリズムは、以下のように与えることができる。

(GDOP 近似計算アルゴリズム)

Step 1:

$$\xi_1 = \frac{1}{\left| \sum_{i=1}^n h_i \right|} \sum_{i=1}^n h_i \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^n (h_i \cdot \xi_1)^2 \quad \dots\dots\dots (31)$$

Step 2

$(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ が与えられていると仮定する。このとき、Gram-Schmit の直交化法を使用して、 $(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$ の固有ベクトル群に直交する空間 S^{n-k+1} に含まれる観測方向ベクトルの観測情報量を

$$\tilde{h}_i^{(k-1)} = h_i - \sum_{j=1}^{k-2} (h_i \cdot \xi_j) \cdot \xi_j \quad \dots\dots\dots (32)$$

で計算する。

Step 3:

$\tilde{h}_i^{(k-1)}$ が同一方向を向くよう $\tilde{h}_*^{(k-1)} = \max_i |\tilde{h}_i^{(k-1)}|$ を基準に、 $(\tilde{h}_*^{(k-1)}, \tilde{h}_i^{(k-1)}) > 0$ となるように、 $\tilde{h}_i^{(k-1)}$ の符号を調整する。

Step 4:

$$\xi_k = \frac{1}{\left| \sum_{i=1}^n \tilde{h}_i^{(k-1)} \right|} \sum_{i=1}^n \tilde{h}_i^{(k-1)} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^n (h_i \cdot \xi_k)^2 \quad \dots\dots\dots (34)$$

を計算し、 $k=m$ ならば Step 5 へ、その他の場合は、Step 2 へ進む。

Step 5:

計算された固有値を使って、GDOP は、

$$\text{GDOP} = \{1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \dots + 1/\lambda_m\}^2 \quad \dots (35)$$

で計算できる。

〈4・2〉 GPS 衛星選択問題への応用

〈4・1〉節で提案した GDOP の近似計算方法を GPS 衛星選択問題へ応用する。GPS 測位システムは、1990 年代にフル稼働が予定されているが、この場合常時 5 つ以上の衛星が可視範囲にあるので、(1) 式における自己位置の 3 パラメータと自己クロックバイアス 1 パラメータの 4 パラメータを推定するのにどの 4 つの衛星を使用するかが課題となっている⁽¹⁾。この場合、 $n=m=4$ として GDOP 近似計算アルゴリズムを適用し、GDOP を最小にする 4 つの衛星を選択すればよい。更に、GPS の場合、固有値の和が一定、すなわち、 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_T$ で一定であることに注目すれば、固有値をすべて計算しなくても GDOP の大小関係の判定が可能となり、処理時間を短縮できる。すなわち、 $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ までの固有値がわかっているとき、 $G(i)$ を以下のように定義する。

$$G(i) = \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_i} + \frac{(4-i)^2}{\lambda_T - \sum_{j=1}^i \lambda_j} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\frac{1}{\lambda_{i+1}} + \dots + \frac{1}{\lambda_m} > (4-i) \left\{ \frac{1}{\left(\lambda_T - \sum_{j=1}^i \lambda_j \right) / (4-i)} \right\} \quad \text{なる関}$$

係があるので、 $G(i) \leq (\text{GDOP})^2$ である。それゆえ、新しく候補となる GPS 衛星の組合せが現状の選択された衛星組合せよりも良いかどうかのチェックは以下のように、固有値を一つ一つ計算するごとに行うことができる。 G_c は、現状で選択されている GPS 衛星を用いて求めた GDOP の平方である。

〔衛星選択アルゴリズム〕

Step 1:

GDOP 計算アルゴリズムの Step 1 と同じ。

Step 2:

もし $G(i) \geq G_c$ ならば、現状維持 (Stop)。

もし $(G(i) \leq G_c)$ かつ $(i < 3)$ ならば Step 3 へ、それ以外の場合は代替候補を選択 (Stop)。

Step 3:

GDOP 計算アルゴリズムの Step 2, Step 3, Step 4 と同じ。

〈4・3〉 数値実験 提案方法の妥当性を確認するために、24 個の衛星 (63° の軌道傾斜角、8 個の衛星を同一軌道に配置) を仮定し、 15° 以上の傾斜角の場合、ユーザにとって衛星が可視であると仮定して GPS⁽¹⁾ のような衛星を用いた測位システムにおける

表 1 衛星選択シミュレーション例

Table 1. Examples of satellite selection simulation.

No.	可視衛星	真の GDOP による選択	提案方法による 選択	(GDOP) ² の差
1	2, 3, 4, 10, 11, 18, 19	2, 3, 4, 18	2, 3, 4, 18	0.066
2	2, 3, 4, 10, 11, 18, 19	2, 3, 4, 11	2, 3, 4, 11	
3	2, 3, 4, 10, 11, 17, 18, 19	2, 4, 11, 17	2, 10, 17, 18	
4	2, 3, 4, 10, 11, 17, 18, 19	2, 10, 17, 18	2, 10, 17, 18	
5	2, 3, 4, 10, 11, 17, 18, 19	3, 4, 11, 19	3, 4, 11, 19	
6	2, 3, 4, 10, 11, 17, 18, 19	3, 4, 11, 19	3, 4, 11, 19	
7	2, 3, 4, 10, 11, 17, 18, 19	4, 10, 17, 19	3, 4, 11, 19	
8	2, 3, 10, 11, 17, 18, 19	10, 17, 18, 19	10, 17, 18, 19	0.281
9	2, 3, 10, 11, 17, 18, 19	3, 17, 18, 18	3, 17, 18, 19	
10	2, 3, 9, 10, 11, 17, 18, 19	2, 9, 10, 17	2, 9, 10, 17	
11	2, 3, 9, 10, 11, 17, 18, 19	2, 9, 10, 17	2, 9, 10, 17	
12	2, 3, 9, 10, 11, 17, 18, 19	3, 11, 18, 19	3, 11, 18, 19	
13	2, 3, 9, 10, 11, 17, 18	2, 9, 10, 11	2, 9, 10, 11	
14	2, 3, 9, 10, 11, 17, 18	9, 10, 11, 18	9, 10, 11, 18	
15	1, 2, 3, 9, 10, 11, 17, 18	1, 9, 11, 18	1, 2, 9, 17	0.233
16	1, 2, 3, 9, 10, 11, 17, 18	1, 2, 9, 17	1, 2, 9, 17	
17	1, 2, 3, 9, 10, 11, 17, 18	1, 2, 9, 17	1, 2, 9, 17	
18	1, 2, 3, 9, 10, 11, 17, 18	3, 10, 11, 18	3, 10, 11, 18	
19	1, 2, 3, 9, 10, 11, 17, 18	1, 3, 11, 17	3, 10, 11, 18	
20	1, 2, 3, 9, 10, 17, 18	1, 2, 3, 17	1, 2, 3, 17	
				0.135

表 2 固有値の近似計算誤差統計量
Table 2. Approximation error statistics of the proposed method.

固有値 No.	平均誤差	標準偏差
#1	0.00967	0.01506
#2	0.02338	0.03762
#3	0.02317	0.03780
#4	0.00613	0.00957

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$$

衛星選択実験を行い、提案方法の近似誤差を調べた。表 1 に、4 分ごとに衛星選択を行い、提案方式と真の GDOP を使った場合の結果を示している。衛星番号 1~8, 9~16, 17~24 が、同一軌道面にある衛星である。いくつかのケースで選択結果が異なるが、異なる衛星選択を行った場合でも、その GDOP の値は、真の GDOP を選択基準として選択された衛星の組合せの GDOP の値に非常に近いことがわかる。100 回の衛星選択処理に対して、78 回の選択が一致し、選択誤差があった場合も、二つの衛星選択の GDOP の平方の差は 0.3 以下である。更に、表 2 に、5985 回の計算での固有値の近似誤差統計量を示す。固有値の大きい順に、#1, #2, #3, #4 とし、平均誤差と標準偏差を比較した。最大固有値と最小固有値の標準偏差は小さいが、#2, #3 ではやや大きくなっている。しかしながら、観測方向ベクトルから、推定誤差共分散行列を求めずに、最良の推定精度の得られる方向、すなわち、最大固有値の固有ベクトル方向や最も推定精度の悪い方向を近似的に求める方法としては、表 1 の応用例からわかるように、十分有効であると思われる。

5. 結 言

測位問題などで有効な規範となっている GDOP を固有値および固有ベクトルとの関係から論じること

によって、観測ベクトルの方向と推定精度の関係を明らかにすることができた。また、この考え方に基づき、第 4 章で GDOP を計算する方法を提案したが、数値例のように推定すべきパラメータの次元数 m が 4 と小さい場合には、逆行列を計算して直接 GDOP を求めても処理時間はそれほど変わらないと思われる。むしろ、第 4 章での計算例は、第 2 章における GDOP と固有値の関係に関する議論の妥当性を示すものとして重要である。

本論文で示した考え方は、測位問題にかぎらず、広く一般の状態推定問題に応用できる。特に、直交射影により、逐次、観測情報量の多い順に方向を求めてゆく方法は、測位問題において観測方向ベクトルと推定精度との幾何学的構造関係を明らかにするうえで重要である。

最後に、本研究を進めるにあたり御指導いただいたテキサス大学 B. D. Tapley 教授、ならびに日頃から御指導いただいている当所、川崎 淳所長、井原廣一副所長、春名公一郎長、当社研究開発部宮本捷二主任技師に深く感謝の意を表します。

(昭和 61 年 1 月 28 日受付)

文 献

- (1) R. J. Milliken & C. J. Zolkr: "Principle of Operation of Navstar and System Characteristics" *Navigation* 25, No. 2, 95 (1978)
- (2) H. B. Lee: "A Novel Procedure for Assessing the Accuracy of Hyperbolic Multilateration Systems", *IEEE Trans. AES.*, AES-11, No. 1, 2 (1975)
- (3) B. T. Fang: "Geometric Dilution of Precision in Global Positioning System Navigation", *AIAA Journal of Guidance and Control*, 4, No. 1, 92 (1981)
- (4) P. S. Noe & K. A. Myers: "A Position-Fixing Algorithm for the Low Cast GPS Receiver", *IEEE Trans. AE S.*, AES-12, 295 (1976)
- (5) G. Strang: "Linear Algebra and its Application", Academic Press (1980)
- (6) 小坂: 「異種測位アルゴリズム組合せによる測位精度の向上」電気学会論文誌 C 分冊, 8 (掲載決定) (1986)