スプライン関数発生器

正 員 寅 市 和 男 (筑波大)
 非会員 鎌 田 賢 (筑波大)
 非会員 森 亮 一 (筑波大)

1. ま え が き

近年デジタルシステムがあらゆる分野において使われるようになってきていることに伴って、離散時間信号を連続時間信号に変換するための技術が特に重要になっている。そのようなことの一例として、音声のPCM録音が挙げられる。そこにおいて、標準化周波数は1割以上も冗長にとられており、量子化レベルも聴覚の分解能を越える16ビットという精度まで精密化されている。このような高精度なデジタル処理を最終的に生かすために、同様な高精度の下で離散時間信号を連続時間信号に変換することが必要である。

最も古くから行われている変換方法は、ホールド回路⁽¹⁾を用いる方法であり、一般に使われているのは、階段状関数を発生する0次ホールド回路、折れ線関数を発生する一次ホールド回路である。これらによって得られる連続時間信号は、滑らかでない微分不可能な関数である。二次以上の高次ホールド回路は、その出力が標本点において依然として微分不可能である一方、振動を生じてしまうという問題点を持っているため、使われていない。

0次または一次ホールド回路によって得られる連続時間信号を滑らかにするためには、受動形および能動形アナログフィルタが用いられている。しかし、この方法は、アナログフィルタが位相ひずみを生じるという問題点を持っている。

上記二つの方法における問題点を軽減するために、デジタル内蔵フィルタの研究が行われている⁽²⁾⁽³⁾が、その出力は依然として離散時間信号である。その

ため最終的には、上記二方法のいずれかが併用される。

これらの従来の方法の問題点を解決する関数発生器を開発することが本論文のテーマである。そのような関数発生器として本論文では、(i)出力が、滑らかでかつ振動が生じにくい、連続時間信号であること、(ii)出力が、離散時間信号を構成している標本値列を正確に通る、補間結果であること、(iii)実時間システムであること、の三項目の条件を満たすものを設定する。

本論文において、このような関数発生器は、次の手順で設計される。条件(i)に適合する連続時間信号として、区分的多項式に滑らかさを要請することによって導出されたスプライン関数⁽⁴⁾が採用される。次に、条件(ii)に従って、離散時間信号を入力として出力にスプライン関数を用いた補間結果を得るようなシステムが定式化される。このシステムを条件(iii)の下で回路化するために、実時間性とS/Nとの関係が理論的に解析される。

その結果として、本関数発生器は、連続時間的に変化する係数を持つFIR (finite impulse response) 型デジタルフィルタとして構成される。理論的解析の結果によれば、本関数発生器は位相ひずみを生ぜず、また、そのフィルタとしての段数は要請されるS/Nの対数に比例している。最後に、試作と実験結果により、本関数発生器の原理が検証される。

本関数発生器により、与えられた離散時間信号を正確に通る、滑らかでかつ振動を生じにくい連続時間信号が、発生可能となる。この滑らかさと振動を生じにくいこととは、スプライン関数を用いることによって、初めて達成されたことである。本論文では、この関数発生器をスプライン関数発生器と呼ぶことにする。

2. 準 備

本章では、スプライン関数発生器への入力となる離

A Spline Function Generator. By Kazuo Toraiichi, Member & Ryoichi Mori, Nonmember (Institute of Information Sciences and Electronics, University of Tsukuba), & Masaru Kamada, Nonmember (Doctoral Program in Engineering, University of Tsukuba).

寅市和男：正員，筑波大学電子・情報工学系

鎌田 賢：非会員，筑波大学工学研究科

森 亮一：非会員，筑波大学電子・情報工学系

散時間信号と、出力として得られる連続時間信号を表現するための入・出力空間を定義する。

離散時間信号の標本化間隔を h とすれば、標本点列は、時間軸上における点列 $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $(t_k \triangleq kh, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ となる。各標本点 t_k において与えられる標本値を v_k とすれば、これによって構成される離散時間信号は、 $v \triangleq \{v_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ となる。本関数発生器を電子回路で構成する際に、電子回路は有限な電圧だけを取り扱えるということに着目すれば、離散時間信号の全体の成す入力空間は、ノルムが、

$$\|v\|_{l_\infty} \triangleq \sup_{-\infty < k < \infty} |v_k| \quad \dots\dots\dots (1)$$

で定義された Banach 空間の一例である

$$l_\infty \triangleq \{v \mid \sup_{-\infty < k < \infty} |v_k| < +\infty\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

と見なし得る。

同様に、本関数発生器の出力と成り得る連続時間信号の全体は、ノルムが、

$$\|s\|_{L_\infty} \triangleq \sup_{-\infty < t < \infty} |s(t)| \quad \dots\dots\dots (3)$$

で定義された Banach 空間の一例である

$$L_\infty(R) \triangleq \{s \mid \sup_{-\infty < t < \infty} |s(t)| < +\infty\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と見なし得る。ここに、 R は実数の全体を表すとする。

第1章に示されているように、出力である連続時間信号には、滑らかでかつ振動を生じにくいという条件が課せられている。空間 $L_\infty(R)$ において、このような条件に適合する基底関数として、二次スプライン関数⁽⁴⁾が最適となる。二次スプライン関数は、時間軸上全区間において連続微分可能な区分的多項式であり、与えられた標本値列を滑らかでありながら短い曲線で結ぶという性質を持っている⁽⁵⁾。

二次スプライン関数を与える区分的多項式において、時間軸上における各区分の継ぎ目は、節点列と呼ばれている。文献(5)によれば、二次スプライン関数による補間時間は、各節点が二つの隣合う標本点の midpoint に置かれたときに、最も振動を生じにくくなる。そこで、節点列 $\{\xi_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ は、時間軸上に

$$\xi_l \triangleq (l-3/2)h, l=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots\dots\dots (5)$$

と置くことにすると、このような節点列を持つ二次の B-スプライン関数系は、

$$\begin{aligned} (b)\phi_l(t) &\triangleq 3h^{-2} \sum_{p=0}^3 (t-\xi_{l+p})^2/p!(3-p)!, \\ l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

但し、

$$(t-a)_+^2 \triangleq \begin{cases} (t-a)^2; & t > a \\ 0; & t \leq a \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

として定義される。これによって張られる空間

$$S \triangleq \{(b)\phi_l(t)\}_{l=-\infty}^{\infty} \quad \dots\dots\dots (8)$$

が、出力空間と考えられる。空間 S は、 $L_\infty(R)$ の部分空間になっていて、その任意の元 $s(t)$ は、

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda(l) \times (b)\phi_l(t), \lambda(l) \in R \quad \dots\dots\dots (9)$$

の形で、一意に表される。

入・出力信号の間を結び付ける作用素としての関数発生器が持つべき基本的条件について考察を加える。第1章に示されているように、本関数発生器の出力として得られるべき連続時間信号は、離散時間信号を構成している標本値列を正確に通る補間結果である。これにより、離散時間信号 $v = \{v_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ から連続時間信号 $s(t)$ を決定するための補間条件は、

$$s(t_k) = v_k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。

本章では、スプライン関数発生器への入力となる離散時間信号と、出力となる連続時間信号が定式化され、それらの間を関係づける補間条件が与えられた。

3. スプライン関数発生器の設計

本章では、スプライン関数発生器の設計法について論じる。

第1章に示されているように、本関数発生器は、実時間システムである必要性を持っている。この実時間性を満足し、回路構成を簡潔にするための基本となる関数発生方式について検討を行う。本関数発生器は、単位パルス系列を入力したときの出力として定義される単位パルス応答によって、特性付けられる。このとき、出力としての連続時間信号は、時々刻々と入力される標本値によって重み付けされた単位パルス応答を各標本点において発生し、それらを重ね合わせることによって得られる。そこで本論文では、この方式を関数発生方式の基本として採用する。

〈3・1〉節では、単位パルス応答が解析的に導出され、その特性が時間領域並びに周波数領域において解析されている。この単位パルス応答を、本論文では、理論的単位パルス応答と呼ぶことにする。

〈3・2〉節では、理論的単位パルス応答を有限区間で打ち切ることににより、FIR 形デジタルフィルタの形式の関数発生方式が設計されている。要請される S/N と打ち切り区間との関係は、理論的に解析されている。

〈3・3〉節では、設計された関数発生方式に従って、スプライン関数発生器の構成が成されている。

〈3・1〉 理論的単位パルス応答の解析 本節では理論的単位パルス応答の特性を時間領域並びに周波数

図 1 スプライン関数発生器の理論的単位パルス応答

Fig. 1. Theoretical unit-pulse response of a spline function generator.

領域において解析する。

理論的単位パルス応答は、任意の連続時間信号 $s(t) \in S$ に対して

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k) \times {}_{(s)}\phi(t-t_k) \dots \dots \dots (11)$$

を満足する関数 ${}_{(s)}\phi(t)$ として定義される。このような ${}_{(s)}\phi(t)$ は、

$${}_{(s)}\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-3+2\sqrt{2})^{|l|} \times {}_{(b)}\phi_l(t) \dots \dots \dots (12)$$

と求められ、図 1 に示されるような関数となっている。この理論的単位パルス応答を用いれば、離散時間信号 $v = \{v_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ に対する補間結果として得られる連続時間信号は、(10)式、(11)式により

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \times {}_{(s)}\phi(t-t_k) \dots \dots \dots (13)$$

と表現される。(12)式に示されるように、理論的単位パルス応答は、時間軸上全区間にわたって、原点で軸対称な減衰振動波形となっている。一方、図 1 に示されているように、その振幅は急速に減衰している。

理論的単位パルス応答の周波数応答は、理論的単位パルス応答 ${}_{(s)}\phi(t)$ のフーリエ変換

$${}_{(s)}\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_{(s)}\phi(t) \times \exp(-j2\pi ft) dt \dots \dots \dots (14)$$

で与えられ、

$${}_{(s)}\Psi(f) = h \{ \sin(\pi fh) / \pi fh \}^3 \times \{ 4 / (3 + \cos(2\pi fh)) \} \dots \dots \dots (15)$$

と計算される。これから、振幅特性と位相特性は、図 2 のようになり、二次スプライン関数を発生するシステムの伝達関数が低域通過形の振幅特性を持つことを示している。その遮断周波数は、標準化間隔 h の離散時間信号に対応する、ナイキスト周波数 $1/2h$ に一致している。図 2 (b) から直線位相性を持つシステムであることがわかる。

〈3・2〉 関数発生方式の設計 〈3・1〉節で示されて

(a) 振幅特性

(b) 位相特性

図 2 理論的単位パルス応答に対応する周波数応答

Fig. 2. Frequency response corresponding to the theoretical unit-pulse response.

いるように、理論的単位パルス応答は時間軸上全区間にわたって存在し、その振幅は急速に減衰している。そのため、実際に用いられる単位パルス応答は、実用範囲の S/N の下で近似的に有限区間だけの減衰振動波形として取り扱える。この近似的な単位パルス応答を有限単位パルス応答と呼ぶことにする。本節では、要請される S/N を満足するような有限単位パルス応答を明確にして、それを用いた関数発生方式を設計する。

設計の第一段階として、理論的単位パルス応答を有限区間で打ち切ることが必要となる。打ち切り区間が、 $-(K/2)h, (K/2)h$ なる原点について対称な区間であれば、理論的単位パルス応答の直線位相性が保存される。また、スプライン関数は、各隣合う節点の間である節点区間において単一の多項式で与えられるので、関数発生器の構成にとって適切な打ち切り区間は、節点区間を単位として構成される。そこで、 K は奇数となる。この区間で打ち切られた単位パルス応答を ${}_{(s)}\hat{\phi}(t)$ で表せば、それは、

$${}_{(s)}\hat{\phi}(t) = \begin{cases} {}_{(s)}\phi(t); & t \in [-(K/2)h, (K/2)h] \\ 0 & ; \text{その他の場合} \end{cases} \dots \dots \dots (16)$$

となる。これを用いて得られる連続時間信号は、

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \times {}_{(s)}\hat{\phi}(t-t_k) \dots \dots \dots (17)$$

となる。

単位パルス応答の打ち切りが、連続時間信号に及ぼす誤差を評価する。そこでは、理論的単位パルス応答の絶対値の上界を求めることによって、誤差が評価しやすくなる。次の命題は、その一つの上界を示している。

〔命題 1〕

$$U(t) \triangleq (11/2)(\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})^{t/h} \quad (18)$$

とすれば、任意の時刻 t に対して、

$$|_{(s)}\psi(t)| \leq U(t) \quad (19)$$

が成り立つ。

〔証明略〕

命題 1 は、理論的単位パルス応答 $_{(s)}\psi(t)$ の絶対値が指数関数的に減衰すること、並びに $U(t)$ がその一つの上界であることを示している。この関係を用いることにより、理論的単位パルス応答を打ち切ることを原因として、出力である連続時間信号に生じる誤差の上限が求められる。次の命題は、その結果を示している。

〔命題 2〕

$$\| \hat{s} - s \|_{L^\infty} / \| \mathbf{v} \|_{l^\infty} \leq (11/2)(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{K/2} \quad (20)$$

〔証明〕 (13), (17) 式より、 $\hat{s}(t)$ と $s(t)$ との誤差 $\| \hat{s} - s \|_{L^\infty}$ は、次のように分解できる。

$$\begin{aligned} \| \hat{s} - s \|_{L^\infty} &= \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \{_{(s)}\hat{\psi}(t-t_k) - _{(s)}\psi(t-t_k)\} \right| \\ &\leq \left\{ \sup_{-\infty < t < \infty} |v_k| \right\} \times \left\{ \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{_{(s)}\hat{\psi}(t-t_k) - _{(s)}\psi(t-t_k)\} \right| \right\} \\ &= \| \mathbf{v} \|_{l^\infty} \times \left\{ \sup_{-\infty < t < \infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{_{(s)}\hat{\psi}(t-t_k) - _{(s)}\psi(t-t_k)\} \right| \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

区間 $[-(K/2)h, (K/2)h]$ において $_{(s)}\hat{\psi}(t) = _{(s)}\psi(t)$ であり、それ以外の区間においては $_{(s)}\hat{\psi}(t) = 0$ であるから、(18), (19), (21) 式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \| \hat{s} - s \|_{L^\infty} / \| \mathbf{v} \|_{l^\infty} &\leq \sup_{-\infty < t < \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{[t/h-K/2]} U(t-kh) + \sum_{k=[t/h+K/2]}^{\infty} U(t-kh) \right\} \\ &= (11/4)(3-2\sqrt{2}) \left(\sup_{-\infty < t < \infty} \right. \end{aligned}$$

図 3 打ち切り区間の長さ (K) と打ち切り誤差 ($\| \hat{s} - s \|_{L^\infty} / \| \mathbf{v} \|_{l^\infty}$) との関係

Fig. 3. Relation between length (K) of truncation interval and truncation error ($\| \hat{s} - s \|_{L^\infty} / \| \mathbf{v} \|_{l^\infty}$).

$$\begin{aligned} &\times \{ (3-2\sqrt{2})^{t/h-[t/h-K/2]} \\ &+ (3-2\sqrt{2})^{-t/h+[t/h+K/2+1]} \} \quad \dots (22) \end{aligned}$$

ここに、 $[a]$ は、 a を越えない最大の整数を表す。ここで、恒等式

$$\begin{aligned} &\{t/h - [t/h - K/2]\} \\ &+ \{-t/h + [t/h + K/2 + 1]\} = K + 1 \quad (23) \end{aligned}$$

と不等式

$$K/2 \leq t/h - [t/h - K/2] < K/2 + 1 \quad (24)$$

に注意すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \| \hat{s} - s \|_{L^\infty} / \| \mathbf{v} \|_{l^\infty} &\leq (11/4)(3-2\sqrt{2}) \{ (3-2\sqrt{2})^{(K+1)/2} \\ &\times \{ 3-2\sqrt{2} \}^{-1/2} + \{ 3-2\sqrt{2} \}^{1/2} \} \\ &= (11/2)(2+\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{K/2} \quad (25) \end{aligned}$$

従って、(20) 式が成り立つ。〔証明終〕

命題 2 は、打ち切り区間の長さ K と、連続時間信号において生じる誤差との関係を表している。打ち切り区間の長さは、誤差の対数に比例しており、この関係は、図 3 により明確になる。これにより要請される S/N を達成するために十分な打ち切り区間の長さを決定することができる。

打ち切られた単位パルス応答 $_{(s)}\hat{\psi}(t)$ は、区間 $[-(K/2)h, (K/2)h]$ において理論的単位パルス応答と同じ値をとり、それ以外の区間で恒等的に零となっている。そこで設計の第二段階として、 $_{(s)}\hat{\psi}(t)$ を時間 $(K/2)h$ だけ遅延することによって、区間 $(-\infty, 0)$ において零となる有限単位パルス応答が得られる。このようにして決定される有限単位パルス応答を $_{(s)}\tilde{\psi}(t)$ で表せば、それは、

$$_{(s)}\tilde{\psi}(t) = _{(s)}\psi(t - (K/2)h) \quad (26)$$

となる。これを用いた関数発生方式によって得られる

表 1 単位パルス応答と連続時間信号との関係

Table 1. Relations between unit-pulse responses and continuous-time signals.

単位パルス応答	連続時間信号
$\phi(t)$ 理論的単位パルス応答	s (離散時間信号 $v = \{v_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ に対する、二次スプライン関数を用いた補間結果)
$\phi(t)$ 打ち切られた単位パルス応答	$\hat{s}$ (打ち切り誤差: $\ \hat{s} - s\ _{L_\infty} / \ v\ _{l_\infty} \leq (11/2)(2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})K/2$)
$\phi(t)$ 有限単位パルス応答	$\hat{s}(\hat{s}(t) = \hat{s}(t - Kh/2))$

連続時間信号は、

$$\hat{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \times \phi(t - t_k) \quad \dots\dots\dots (27)$$

と表せる。(27)式が、本関数発生器における関数発生方式である。

以上で、スプライン関数発生器のための、有限単位パルス応答と、それを用いた関数発生方式が与えられた。その設計過程で現れた種々の単位パルス応答とそれを用いて発生される連続時間信号との関係は、表1のようになっている。有限単位パルス応答 $\phi(t)$ に従って発生される連続時間信号 $\hat{s}(t)$ は、理論的単位パルス応答による連続時間信号 $s(t)$ に対して、時間 $(K/2)h$ だけ遅れており、また、振幅については、 $(11/2)(2 + \sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})K/2$ 以下の打ち切り誤差を含んでいる。この S/N としての打ち切り誤差は、命題2の結果を用いて K を選ぶことにより、任意に設定できる。

〈3・3〉 スプライン関数発生器の構成 本節では、〈3・2〉節で設計された関数発生方式に従って決定されるスプライン関数発生器の構成を示す。

(27)式に示される関数発生方式を区分的多項式の形で表現することにより、本関数発生器の回路化が可能となる。その関数発生方式は、図4のようになる。

この区分的多項式表現は、次のようにして導出される。区間 $[0, Kh]$ 以外において $\phi(t) = 0$ であるので、(27)式は、各区分 $[t_k, t_{k+1})$, $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ において

$$\hat{s}(t) = \sum_{l=0}^{K-1} v_{k-l} \times \phi(t - (k-l)h) \quad \dots\dots\dots (28)$$

と書換えられる。ここで、任意の整数 k に対して

$$\lfloor t/h \rfloor = k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad \dots\dots\dots (29)$$

が成り立つことから、任意の時刻 t における連続時間信号 $\hat{s}(t)$ は、

$$\hat{s}(t) = \sum_{l=0}^{K-1} v_{\lfloor t/h \rfloor - l} \times \phi(t - (\lfloor t/h \rfloor - l)h) \quad \dots\dots\dots (30)$$

図 4 関数発生方式とその区分的多項式表現との関係 ($K=5$ の場合)

Fig. 4. Generating system and its representation by piecewise polynomials (in the case $K=5$).

と表現できる。図4上段に示されているように、 $\phi(t)$ は、点列 $t = lh$, $(l=0, 1, \dots, K-1)$ を節点とする二次スプライン関数となっている。そこで、各節点区間 $(lh, (l+1)h)$, $(l=0, 1, \dots, K-2)$ において、 $\phi(t)$ は二次の多項式によって表現できる。その各区分を

$$\phi_l(t) = \phi(t - (\lfloor t/h \rfloor - l)h), \quad l=0, 1, \dots, K-1 \quad \dots\dots\dots (31)$$

とおけば、(30)式は、

$$\hat{s}(t) = \sum_{l=0}^{K-1} v_k \times \phi_l(t) \quad \dots\dots\dots (32)$$

と書換えられる。(32)式が、区分的多項式表現による関数発生方式である。

スプライン関数発生器の構成は、(31)式と(32)によ

図 5 スプライン関数発生器の構成

Fig. 5. Block diagram of a spline function generator.

って得られた関数発生方式の区分的多項式表現に基づいて決定できる。(32)式に示される関数発生方式は、一つの FIR 形デジタルフィルタの動作を記述していると解釈される。従って、この関数発生方式を実現するスプライン関数発生器の構成は、図5のように決定される。

本章では、スプライン関数発生器のための関数発生方式が設計され、それによって本関数発生器が、連続時間的に変化する係数を持つ FIR 形デジタルフィルタの形で構成されることが示された。

4. 実現と実験

本章では、前章で示されたスプライン関数発生器の基本原理を検証するための一例として、音声帯域の信号を取り扱うスプライン関数発生器を試作する。

回路を構成するにあたり、その精度は、信号処理における最低限の S/N として、電話伝送程度に十分な 40 dB とする。打ち切り誤差が -40 dB 以下になるためには、図3より、打ち切り区間の長さ K は9とすれば十分である。

このとき、有限単位パルス応答の各区分は、(31)式より、次のように計算される。

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= 0.00508 + 0.00144(t/h - [t/h]) \\ &\quad - 0.00490(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_1(t) &= -0.00296 - 0.00837(t/h - [t/h]) \\ &\quad + 0.0286(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_2(t) &= 0.0173 + 0.0488(t/h - [t/h]) \\ &\quad - 0.167(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_3(t) &= -0.101 - 0.284(t/h - [t/h]) \\ &\quad + 0.971(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_4(t) &= 0.586 + 1.66(t/h - [t/h]) \\ &\quad - 1.66(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_5(t) &= 0.586 - 1.66(t/h - [t/h]) \\ &\quad + 0.971(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_6(t) &= -0.101 + 0.284(t/h - [t/h]) \\ &\quad - 0.167(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_7(t) &= 0.0173 - 0.0488(t/h - [t/h]) \\ &\quad + 0.0286(t/h - [t/h])^2, \\ \psi_8(t) &= -0.00296 + 0.00837(t/h - [t/h]) \\ &\quad - 0.0049(t/h - [t/h])^2 \dots\dots (33) \end{aligned}$$

また(32)式より、連続時間信号 $\tilde{s}(t)$ の発生方式は、

$$\tilde{s}(t) = \sum_{i=0}^8 \psi_i(t/h - i) \times \psi_i(t) \dots\dots (34)$$

となる。

次にこれらの(33)、(34)式に従って構成されるスプ

図6 単位パルス応答発生回路の構成例

Fig. 6. A unit-pulse response generator.

ライン関数発生器の、一回路方式を示す。

有限単位パルス応答の各区分は、図6に示されるような回路によって発生でき、これを単位パルス応答発生回路と呼ぶことにする。図6において、定電圧源と鋸歯状波発生回路は、それぞれ定数値 $\pm 1V$ と一次の項 $g(t) \triangleq t/h - [t/h]$ (V) を発生し、アナログ乗算器の出力は、二次の項 $g(t)^2$ (V) となっている。鋸歯状波の掃走時間は、鋸歯状波発生回路を構成するオペアンプのスルーレートによって制限され、ここでは $0.4 \mu s$ となっている。有限単位パルス応答の各区分は、図6右側の各オペアンプによる荷重平均演算

$$\begin{aligned} \psi_i(t) &= \sigma_{i0}(-R_f/R_{i0}) + \sigma_{i1}(-R_f/R_{i1})g(t) \\ &\quad + \sigma_{i2}(-R_f/R_{i2})g(t)^2 \dots\dots (35) \end{aligned}$$

によって発生される。ここで、 σ_{i0} , σ_{i1} , σ_{i2} は ± 1 の値を取り、各項の符号を表す。(35)式において基準抵抗 R_f を $1 k\Omega$ とするならば、各抵抗の値とそれに対応する符号は、(33)式と(35)式より、表2のように求められる。

表2 単位パルス応答発生回路における抵抗の値 (kΩ) と符号

Table 2. Value (kΩ) and sign of resistances in unit-pulse response generator.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
σ_{i0}, R_{i0}	-1970	+338	-58.0	+9.95	-1.71	-1.71	+9.95	-58.0	+338
σ_{i1}, R_{i1}	-694	+120	-20.5	+3.52	-0.604	+0.604	-3.52	+20.5	-120
σ_{i2}, R_{i2}	+204	-35.0	+6.01	-1.03	+0.604	-1.03	+60.1	-35.0	+204

図 7 スプライン関数発生器の構成例

Fig. 7. A trial spline function generator.

この単位パルス応答発生回路を用いることにより、(34)式を満足するスプライン関数発生器の一回路方式は、図7のように構成される。図7において、離散時間信号を構成する標本値列 $\{v_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ は、時間間隔 h のクロックパルス $k=[t/h]$ に同期して、一つずつシフトレジスタに入力される。この回路において各標本値は、その絶対値 8 ビットと符号ビットで表現されている。シフトレジスタ中の各標本値 $\{v_{k-i}\}_{i=0}^8$ と単位パルス応答発生回路によって発生される各区分 $\{\phi_i\}_{i=0}^8$ とが、乗算形 D-A 変換器と符号変換回路によって乗じられ、その後、その積は加算器によって総和される。こうして得られる加算器の出力が、目的の連続時間信号 $s(t)$ となっている。

本試作器の構成素子は、市販の TTL、スルーレート $5\text{ V}/\mu\text{s}$ のオペアンプ・アナログ乗算器、変換時間 180 ns の D-A 変換器である。鋸歯状波発生回路、符号変換回路は、それぞれ二つのオペアンプ、一つのオペアンプと一つのアナログスイッチで構成されている。

次は、以上のようにして試作したスプライン関数発生器の機能を検証するための実験について述べる。

図8と図9は、正弦波発振器によって発生される原信号を A-D 変換器で標本化・量子化して得られる離散時間信号を本試作器への入力とし、出力として得られる連続時間信号と原信号を合せてオシロスコープ上で観測した結果の例である。A-D 変換のダイナミックレンジは -1 V から 1 V とし、量子化レベルは絶対値 8 ビットと符号ビットとした。標本化間隔は、

図 8 単一の正弦波入力に対するスプライン関数発生器の出力

Fig. 8. Output of the trial spline function generator for sinusoidal input.

図 9 二つの正弦波の合成を入力したときのスプライン関数発生器の出力

Fig. 9. Output of the trial spline function generator for hybrid sinusoidal input.

$25\mu\text{s}$ とした。図8は単一の周波数に対する結果であり、本図における入・出力の遅れ時間から本試作器の位相遅れが評価できる。図9は異なる二つの周波数の合成に対する結果であり、本図において出力が入力に対して相似形であることは、本関数発生器の主要な特徴である直線位相性を表しているといえる。

この直線位相性をより詳しく実証するために、図8

図 10 スプライン関数発生器の位相遅れ
Fig. 10. Phase delay of the trial spline function generator.

図 11 スプライン関数発生器の S/N を検証するためのテスト信号と入・出力の誤差波形
Fig. 11. Test signal for verification of S/N of the trial spline function generator and the error.

の方法により、直流から 20 kHz まで 1 kHz 間隔で位相遅れを測定した結果、図 10 が得られた。図 10 において、位相遅れを記した点が ± 0.2 rad の精度で直線に当てはまっていることから、本試作器の位相は、3.2% の精度で直線的であるといえる。

本試作器の設計仕様とした $S/N \geq 40$ dB を検証するために、直流から 20 kHz までの各周波数成分を -40 dB 以上含んだ孤立波形

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (4h/3) \{ \sin(\pi fh) / \pi fh \}^3 \times e^{-j3\pi fh} \times e^{j2\pi ft} df$$

$$= \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ (2/3)(t/h)^2 & , 0 \leq t \leq h \\ -(1/3)(t/h - 3/2)^2 + 1 & , h \leq t \leq 2h \\ (2/3)(-t/h + 3)^2 & , 2h \leq t \leq 3h \\ 0 & , 3h \leq t \end{cases}$$

($h = 25 \mu s$)

をテスト信号として用いる。テスト信号 $x(t)$ の標本値をマイクロコンピュータ制御により本試作器に入力して得られた出力を標本化間隔 $0.2 \mu s$ ・量子化レベル 12 ビットの高速 A-D 変換器で得たデータと、理論値との比較をマイクロコンピュータで行った結果、図 11 が得られた。図 11 において、誤差波形の最大振幅は、理論値の最大振幅の 1% 以下であり、このことは、本試作器が設計仕様の $S/N \geq 40$ dB を実現していることを実証している。

最後に、本試作器が動作し得る最小の標本化間隔について述べる。標本化間隔は、節点における鋸歯状波の帰走時間や、その後段にある各オペアンプのスループレートによって制限される。本試作器のそれは、 $20 \mu s$ 以上となっている。

本章では、スプライン関数発生器の原理的機能が、具体的な一回路方式によって実証された。

5. む す び

本論文では、離散時間信号を入力として、出力に二次スプライン関数を用いた補間結果が得られる関数発生器を設計し、一つの具体的な回路構成例によってその原理を実証した。FIR 形ディジタルフィルタの形式で構成された本関数発生器は、その単位パルス応答を連続時間的に発生させることによって、スプライン補間を実現している。

今後の課題の一つは、本関数発生器の集積回路化を行うことである。

(昭和 61 年 6 月 26 日受付)

文 献

- (1) 岡田：「高次ホールド回路の伝達関数に関する考察」，信学論 A, 64, 259 (昭 56-3)
- (2) J. A. Cadzow: "An Extrapolation Procedure for Band-Limited Signals", *IEEE ASSP Trans.* 27, 1, 4 (1979-2)
- (3) M. S. Sabri & W. Sttenaart: "An Approach to Band-limited Signal Extrapolation—The Extrapolation Matrix", *IEEE Trans. on CAS* 25, 2, 74 (1978-2)
- (4) I. J. Schoenberg: "Contribution to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions", *Quart. Appl. Math.* 4, 45, 112 (1946)
- (5) 寅市・片岸・高山・森・森田：「滑らかな線画による立体表示」，電学論 C, 103, 10, 225 (1983-10)
- (6) 「スプライン関数発生器」，特許 (申請中)