指数族の分布に従う雑音下での 汎関数展開可能な系の同定

正員 沖田 豪 (山口大)
正員 中村 正紀 (TYS テレビ山口)
正員 田中 正吾 (山口大)

1. 緒言

近年、科学技術の発展や社会的要求から、対象とするシステムが広範囲に及ぶにつれて、複雑かつ多様な非線形系を取り扱う機会が多くなっている。これに伴い非線形系の同定が重要視されている。

現実には、種々の非線形系が存在するが、ここでは、Van der Pol 式や Duffing 式など広範な非線形系を含む有限項で汎関数展開可能な系を対象とする⁽¹⁾。

一般に、同定は入出力情報に基づいて行われるが、その際、システムは雑音に汚されている場合が多い。これまで、構造が未知であるシステムについて Bayes の定理により事後確率を求め、システムの構造決定を行う方法が提案されている^{(2)~(4)}。それらはいずれも、観測雑音を正規分布に限定して解析されている。しかし、この Bayes の定理において、観測雑音の分布は極めて重要な役割を果たしている。しかも、実際には非正規雑音も多く見られる。例えば、レーダなどで目標値の位置を測定する際、距離誤差はレイリー分布に従うことが知られている⁽⁵⁾。よって、正確な同定を行うためには、実際の雑音分布に基づいて行う必要がある。そこで、正規雑音を含むより一般的な指数族の分布⁽⁶⁾に従う雑音にシステムが汚されている場合を対象とする。従来、パラメータ推定には、最尤法がよく用いられている。しかし、これを指数族の分布に対して形式的に適用すると、システムとモデルの出力の偏差が分布の値域を超え、推定値が得られない場合がある。

一方、システムとモデルが一致した理想状態では、その偏差の分布は雑音の分布に等しいと考えられる。よって、これらを考慮して観測値より偏差の分布を推定し、Kullback の情報量⁽⁷⁾を最小にすることにより、パラメータを推定しよう。更に、指数族の分布に従う観測雑音について事後確率を具体的に算出し、システムの構造決定を行う。また、この確率は逐次的に与えられるため、データの増加と共にどのような振舞いを示すかは一見しただけでは明らかでない。このような確率の漸近的性質について、まだ十分な考察はなされていないようである⁽⁸⁾。従って、この事後確率の漸近的性質についても考察し、本同定法の理論的正当性を検証する。

2. 問題の設定

対象とするシステムは、Practical 安定かつ有限項で汎関数展開可能であり、次式で与えられる^{(1),(9)}。

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} \theta_0^T \mathbf{q}_0(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{x}(k) \\ \dots \\ \mathbf{x}(k-n_1+2) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-n_1+1)]^T$$

$$\mathbf{u}(k) = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_2+1)]^T$$

ここで、 $\mathbf{x}(k)$ は n_1 次元状態ベクトル、 $\mathbf{u}(k)$ は n_2 次元入力ベクトルである。また、システムパラメータ θ_0 、および、ベクトル関数 $\mathbf{q}_0(\cdot)$ は次のように定義される。

$$\theta_0 \triangleq [\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03}, \dots, \theta_{0L}] \dots\dots\dots (2)$$

$$\mathbf{q}_0(\cdot) \triangleq [q_{01}(\cdot), q_{02}(\cdot), \dots, q_{0L}(\cdot)]^T \dots\dots\dots (3)$$

但し、

Identification of Functionally Expanded System Distorted by Noise with Exponential Family Density. By Tuyoshi Okita, Member (Faculty of Engineering, Yamaguchi University), Masaki Nakamura, Member (TYS T.V. Yamaguchi, Ltd.) & Shyogo Tanaka, Member (Faculty of Engineering, Yamaguchi University).

$$q_{0i}(z(k)) \triangleq \prod_{h=1}^{m(i)} z_{jh(i)}(k) \quad 1 \leq i \leq L$$

$$z(k) \triangleq (x(k)^T, u(k)^T)^T$$

である。ここで、 $m(i)$ は θ_{0i} を係数とする展開項の次数 (degree) であり、 $z_{jh(i)}(k)$ は展開項を構成する $z(k)$ の要素を表わす。また、観測方程式は次式で与えられる。

$$y(k) = h^T x(k) + v(k) \quad k \geq 1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

但し、

$$h^T = [1, 0, 0, \dots, 0]; \quad n_1 \text{ 次元}$$

であり、観測雑音 $v(k)$ は白色かつ $u(k)$ と独立で、次の指数族 (exponential family) の密度関数を持つ^{(6), (10)}。

$$\begin{aligned} P v(v(k), \lambda_0) &= \exp \{ \phi^T(\lambda_0) \tau(v(k)) - \phi(\lambda_0) \} \\ &= \exp \{ \phi^T(\lambda_0) \tau(v(k)) \\ &\quad + \xi(\lambda_0) \ln v(k) - \phi(\lambda_0) \} \quad (5) \end{aligned}$$

但し、 λ_0 は統計量 (モーメント) であり、 $\tau(\cdot)$ は密度関数の形より定まり、 $\phi(\lambda_0)$ はその係数で、 $\phi(\lambda_0)$ は規格化定数である。また、 $\tau(\cdot)$ は $v(k)$ の有理関数である。また、 $Pv(\cdot)$ の値域は $(-\infty, \infty)$ あるいは $[0, \infty)$ である。更に、制御形モデルを考え、入力 $u(k)$ は完全観測とする。このとき、観測値系列

$$Y_k = \{y(1), u(0), y(2), \dots, y(k), u(k-1)\}$$

に基づいて、システムの構造を決定し、パラメータを推定する問題を考える。

3. システム同定

〈3・1〉 パラメータ推定 (1) 式のシステムに準じて、次の M 個のモデルを設定する。

$$x_i(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_i^T q_i(x_i(k), u(k)) \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_i(k-n_{1i}+2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$x_i(0) = x_{i0} \quad (i=1, \dots, M)$$

ここで、 i はモデルの識別番号であり、 θ_i 、および、 $q_i(\cdot)$ は L_i 次元である。また、モデルの出力 $y_i(k)$ は次式で与えられる。

$$y_i(k) = h_i^T x_i(k) \quad \dots\dots\dots (7)$$

対象とするシステムからの情報は、観測値 $y(k)$ を通して得られるが、 $y(k)$ は雑音 $v(k)$ に汚されている。雑音の値域が $(-\infty, \infty)$ の場合、パラメータ推定には、最尤法を用いればよい。しかし、(5) 式のように雑音の値域が半無限大の指数族の分布に従う場合、最尤法を形式的に用いると偏差 $e_i(k) (\triangleq y(k) - y_i(k))$ が分布の値域を超え、推定が困難な場合がある。例えば、観測雑音が指数分布の場合、値域を無視して対数尤度関数を最大化しようすると ∞ となり推定値が得られな

い。一方、システムとモデルの構造が等しい場合、その偏差 $e_i(k)$ の分布は観測雑音の分布と一致すると考えられる。そこで、パラメータ推定の評価量として、新たに Kullback の情報量を導入する⁽⁷⁾。

$$\begin{aligned} I(\hat{\theta}_i; \hat{\lambda}_i, \lambda_0) \\ = \int \log \{ Pe(\cdot) / Pv(\cdot) \} Pe(\cdot) de_i(k) \dots (8) \end{aligned}$$

但し、

$$\begin{aligned} Pe(\cdot) &= Pe(e_i(k); \hat{\lambda}_i), \quad Pv(\cdot) = Pv(e_i(k); \lambda_0), \\ e_i(k) &\triangleq y(k) - y_i(k) \end{aligned}$$

である。ここで、統計量 λ_0 は

$$\lambda_0 = \int r(v(k)) Pv(v(k)) dv(k)$$

であり、この推定量 $\hat{\lambda}_i$ は次式で与えられる。

$$\hat{\lambda}_i = 1/k \cdot \sum_{k'=1}^k r_i(e_i(k'))$$

但し、 $r_i(e_i(k'))$ は統計量 λ_i の定義より定められる。更に、 $Pe(\cdot)$ は $Pv(\cdot)$ と同じ関数形を持つ密度関数である。Kullback の情報量の定義より (8) 式は非負であり、 $Pe(\cdot)$ と $Pv(\cdot)$ が一致した場合のみ、零となる⁽⁷⁾。また、 $Pe(\cdot)$ を $Pv(\cdot)$ に近づけることは、 $e(k) \triangleq x(k) - x_i(k)$ を確率的に零に近づけることを意味する⁽¹¹⁾。これらより、(8) 式を最小にすることによりパラメータの推定値 $\hat{\theta}_i$ を得る。ここで、各モデルごとに、無限個のデータより得られるであろうパラメータ推定値 θ_{i0} を考える。

$$I(\theta_{i0}) = \min_{\theta_i} I(\theta_i; \lambda_{i0}, \lambda_0)$$

但し、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_i(k) = \lambda_{i0}$$

である。データ数が十分大なとき、 $\hat{\theta}_i$ は θ_{i0} 、 $\hat{\lambda}_i$ は λ_{i0} の近傍にあると期待できる。よって、(8) 式を θ_i について偏微分し、これを θ_{i0} 、 λ_{i0} のまわりでテラ展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial I}{\partial \theta_i} \right) \Big|_{\theta_i = \theta_{i0}} \\ & \triangleq \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda_i} \right) \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_i} \right) \Big|_{\theta_i = \theta_{i0}} \\ & \quad + (\hat{\theta}_i - \theta_{i0})^T \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \theta_i^2} \right) \Big|_{\theta_i = \theta_{i0}} \\ & \quad + \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda_i} \right) \Big|_{\theta_i = \theta_{i0}} \left(\frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \theta_i} \right) \\ & \quad + (\hat{\lambda}_i - \lambda_{i0})^T \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \lambda_i^2} \right) \Big|_{\lambda_i = \lambda_{i0}} \left(\frac{\partial \lambda_{i0}}{\partial \theta_i} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\hat{\theta}_i$ の最適条件より次式を得る。

$$(\hat{\theta}_i - \theta_{i0}) \triangleq - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \theta_i^2} \right) \Big|_{\theta_i = \theta_{i0}}^{-1}$$

$$\cdot \left[\left(\frac{\partial I}{\partial \lambda_i} \right) \bigg|_{\substack{\theta_i = \theta_{i0} \\ \lambda_i = \lambda_{i0}}} \left\{ \frac{1}{k} \cdot \sum_{k'=1}^k (\partial \mathbf{r}(\cdot) / \partial \theta_i) \right\} \right]^T$$

広義の中心極限定理より、 $(\hat{\theta}_i - \theta_{i0})$ は漸近的に平均 0、共分散 $A_i(k)$ の正規分布に従うとみなせる。但し、

$$A_i(k) \triangleq \text{Cov}(\hat{\theta}_i) \\ = (\partial^2 I / \partial \theta_i^2)^{-1} \Sigma_i (\partial^2 I / \partial \theta_i^2)^{-1}$$

ここで、 Σ_i は次のように推定される⁽¹¹⁾。

$$\Sigma_i = 1/k \cdot \{ \hat{R} - (\partial \hat{\lambda}_i / \partial \theta_i)^T (\partial I / \partial \lambda_i)^T \\ \cdot (\partial I / \partial \lambda_i) (\partial \hat{\lambda}_i / \partial \theta_i) \}$$

但し、

$$\hat{R} = 1/k \cdot \sum_{k=1}^N \{ (\partial I / \partial \lambda_i) (\partial \mathbf{r} / \partial \theta_i) \\ \cdot (\partial \mathbf{r} / \partial \theta_i)^T (\partial I / \partial \lambda_i)^T \}$$

である。

〈3・2〉 システム構造の決定 本節では、(6)式の候補モデルの中から、最適なモデルを決定する方法について述べる。

候補モデルが可付番かつ排反であることより、Bayes の定理を用いて、各モデルの事後確率 $\Pi(i|Y_k)$ を求めることができる。

$$\Pi(i|Y_k) = \Pi(i|Y_{k-1}) \\ \cdot \{ P(y(k)|i, Y_{k-1}) / P(y(k)|Y_{k-1}) \} \\ \Pi(i|0) = 1/M \quad (i=1, \dots, M) \dots\dots (9)$$

但し、

$$P(y(k)|i, Y_{k-1}) \\ = \int P(y(k)|i, \hat{\theta}_i, Y_{k-1}) P(\hat{\theta}_i|Y_{k-1}) d\hat{\theta}_i \\ \dots\dots\dots (10) \\ P(y(k)|Y_{k-1}) \\ = \sum_{i=1}^M \Pi(i|Y_{k-1}) P(y(k)|i, Y_{k-1}) \dots (11)$$

である。(9)式は時刻 k の推移と共に逐次計算され、この事後確率 $\Pi(i|Y_k)$ が最大となるものを最適モデルとする。

次に(9)式を具体的に算出しよう。このためには、(10)式の積分を実行する必要がある。データ数がパラメータ数に比べて十分大きい場合、 $\hat{\theta}_i$ は θ_{i0} の近傍にあると期待でき、 $P(y(k)|i, Y_k)$ の指数部を 2 次近似すれば、積分が可能となる。ここで、 $v(k)$ の値域が $(-\infty, \infty)$ の場合と $[0, \infty)$ の場合の 2 つに分けて考える。まず、値域が $(-\infty, \infty)$ の場合、 $P(y(k)|i, Y_{k-1})$ は次のように与えられる⁽¹²⁾。

$$P(y(k)|i, Y_{k-1}) \\ = P(v(y(k) - y_i(k; \theta_{i0})) \\ \cdot | -A A_i + I |^{-1/2} \exp \{ \mathbf{b}^T R^T \mathbf{b} \} \\ \dots\dots\dots (12)$$

但し、

$$A = \phi(\hat{\lambda}_i)^T \{ \partial^2 \mathbf{t} / \partial \hat{\theta}_i^2 \} \\ \mathbf{b} = \{ \phi(\hat{\lambda}_i)^T (\partial \mathbf{t} / \partial y_i) (\partial y_i / \partial \hat{\theta}_i) \} \\ R = (-A + A_i^{-1})^{-1}$$

である。次に、値域が $[0, \infty)$ の場合、 $P(y(k)|i, Y_{k-1})$ は次のように算出される。(付録参照)

$$P(y(k)|i, Y_{k-1}) \\ = \text{Con} \cdot \prod_{j=1}^l \{ {}_i C_j \cdot \{ d^{l-j} \exp(s^2 g^2) / ds^{l-j} \} \\ \cdot \{ d^l E f(sg) / ds^l \} \} \dots\dots\dots (13)$$

但し、

$$\{ d^n \exp(s^2 g^2) / ds^n \} = \exp(s^2 g^2) g^n H_n(sg) \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \\ \{ d^n E f(sg) / ds^n \} = -2(-1)^n / \sqrt{\pi} \\ \cdot \exp(-s^2 g^2) H_n(sg)$$

である。ここで、Con、および、 s は分布の統計量 λ_0 、および、偏差 $e_i(k)$ より定まる定数、 g は λ_0 より定まる定数であり、 $H_n(\cdot)$ は Hermite の多項式である⁽¹³⁾。また、この $P(y(k)|i, Y_{k-1})$ は連続な分布と考えることができる。

以上、複数の候補モデルを与え、Bayes の定理よりシステムの構造を決定する方法について述べた。しかし、候補モデルをいかに設定するかが問題となる。そこで、次に、候補モデルの設定法について若干考察する。

まず、システムの構造に関する先験情報が与えられ、構造の推測がある程度可能な場合は、推測に基づいて複数のモデルを設定すればよい。しかし、そのような先験情報がない場合、何らかの方法でシステムを分類し、その各分類に属する代表的なモデルの適合性を考慮して、候補モデルを設定する方法が考えられる。また、システムの分類法については、システムが汎関数展開可能という条件の下で展開項の振幅方向の次数 (degree) m 、および、時間方向の次数 (order) n_1, n_2 によりシステムを分類する方法が考えられる⁽²⁾。

〈3・3〉 事後確率の漸近的性質 システムと同じ構造を持つモデルを i 、他のモデル j ($j=1, \dots, M, j \neq i$) とし、それぞれの事後確率を $\Pi(i|Y_k)$ 、 $\Pi(j|Y_k)$ とする。これらについて、次の量を定義する。

$$\alpha_{ij}(k) \triangleq 1/k \cdot \log \{ \Pi(i|Y_k) / \Pi(j|Y_k) \} \\ = 1/k \left[\sum_{k'=1}^k \log \{ P_i(y(k') / P_j(y(k')) \} \right] \\ \dots\dots\dots (14)$$

但し、

$$P_i(y(k)) \triangleq P(y(k)|i, Y_{k-1}), \\ P_j(y(k)) \triangleq P(y(k)|j, Y_{k-1})$$

である。この $\alpha_{ij}(k)$ の漸近的振舞いから事後確率の漸近的性質を知ることができる。

k が十分大きい場合、パラメータの推定値 $\hat{\theta}_i$ は平均 θ_{i0} 、共分散 $A_i(k)$ なる正規分布に従うと考えられる。また、 $A_i(k)$ は k^{-1} のオーダーを持つので $\hat{\theta}_i$ の密度関数は次のようになる。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\hat{\theta}_i | Y_{k-1}) = \delta(\hat{\theta}_i - \theta_{i0}) \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数である。よって、 $P(y(k) | i, Y_{k-1})$ は次のように近似される。

$$\begin{aligned} P(y(k) | i, Y_{k-1}) &\doteq P v(y(k) | \theta_{i0}, Y_{k-1}) \\ &= P v(y(k) - y_{i0}(k)) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

これより、任意の小さな正の数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対して、すべての $k \geq k_0$ について

$$\begin{aligned} |P_i(y(k)) - P v(y(k) - y_{i0}(k))| \\ |P v(y(k) - y_{i0}(k))| < \varepsilon_1 \\ |P_j(y(k)) - P v(y(k) - y_{j0}(k))| \\ |P v(y(k) - y_{j0}(k))| < \varepsilon_2 \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となるランダムな正の整数 k_0 が存在する。また、 $P_i(y(k)), P_j(y(k))$ は値域において連続関数であり、 $0 < P_i(y(k)) < \infty, 0 < P_j(y(k)) < \infty$ である。よって、

$$0 < P_i(y(k)) / P_j(y(k)) < \infty$$

である。これより $\log \{P_i(y(k)) / P_j(y(k))\}$ は連続かつ有限な関数であると考えられる。(17)式より、次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \log \{ \{P v(y(k) - y_{i0}(k))(1 - \varepsilon_1)\} \\ / \{P v(y(k) - y_{j0}(k))(1 + \varepsilon_2)\} \} \\ < \log \{P_i(y(k)) / P_j(y(k))\} < \\ \log \{ \{P v(y(k) - y_{i0}(k))(1 + \varepsilon_1)\} \\ / \{P v(y(k) - y_{j0}(k))(1 - \varepsilon_2)\} \} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

ここで、 k が k_0 より大なるときの $\alpha_{ij}(k)$ に関して次の量を考える。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1/(k - k_0 + 1) \cdot \sum_{k'=k_0}^k \log \{P_i(y(k')) / P_j(y(k'))\}$$

ここで、 $\log \{P_i(y(k)) / P_j(y(k))\}$ は連続であり、 $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/(k - k_0 + 1) \cdot \sum_{k'=k_0}^k$ は平均の意味を持つ。よって、上式は次のように書き換えられる。

$$\int (\log \{P_i(y(k)) / P_j(y(k))\} \cdot P v(y(k) - y_{i0}(k))) dy(k)$$

これを(18)式の関係代入すると、次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \beta_{ij} + \log \{(1 - \varepsilon_1) / (1 + \varepsilon_2)\} \\ < \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{ij}(k) < \\ \beta_{ij} + \log \{(1 + \varepsilon_1) / (1 - \varepsilon_2)\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

但し、

$$\beta_{ij} \triangleq \int \log \{P v_i(\cdot) / P v_j(\cdot)\} P v_i(\cdot) dy(k)$$

$$P v_i(\cdot) \triangleq P v(y(k) - y_{i0}(k))$$

$$P v_j(\cdot) \triangleq P v(y(k) - y_{j0}(k))$$

である。ここで、 β_{ij} は Kullback の情報量であり、これに関する定理より正である。更に、小さな正の数 ε_3 に対して、すべての $k \geq k_0$ について

$$|\alpha_{ij}(k) - \beta_{ij}| < \varepsilon_3 \dots\dots\dots (20)$$

となるランダムな正の整数 k_0 が存在する。但し、

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \text{Max} \{ |\log \{(1 - \varepsilon_1) / (1 + \varepsilon_2)\}|, \\ |\log \{(1 + \varepsilon_1) / (1 - \varepsilon_2)\}| \} \} \end{aligned}$$

である。よって、 $\alpha_{ij}(k)$ の定義を(20)式に代入し整理すると次式を得る。

$$\Pi(i | Y_k) / \Pi(j | Y_k) > \exp \{k(-\varepsilon_3 + \beta_{ij})\}$$

k が十分大きい場合、 $-\varepsilon_3 + \beta_{ij} > 0$ より

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \{\Pi(i | Y_k) / \Pi(j | Y_k)\} = \infty \\ (j = 1, \dots, M, i \neq j) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

となる。一方、確率は次の条件を満たす必要がある。

$$\begin{aligned} 0 \leq \Pi(j | Y_k) \leq 1 \quad (j = 1, \dots, M) \\ \sum_{j=1}^M \Pi(j | Y_k) = 1 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

よって、上式および(21)式より次式が得られる。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{1 / \Pi(j | Y_k)\} = \infty \quad (j = 1, \dots, M, j \neq i)$$

従って、上式および(22)式より次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi(j | Y_k) = 0 \quad (j = 1, \dots, M, j \neq i) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi(i | Y_k) = 1 \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

これより、データ数の増加と共にシステムと同じ構造を持つモデルの確率が1に、他のモデルの確率が0に漸近する。よって、システムの構造を明確に識別することが可能である。

4. 実験的考察

〈4・1〉 シミュレーションの概要 本方法の理論的正当性を検証するためにディジタル・シミュレーションを行った。ここでは、工学、生物、経済などの分野でよく用いられる双線形系、および、非線形振動を表わす Duffing 形系を対象とし、(1)～(4)式の定義に従い、対象系を設定した。また、入力 $u(k)$ は $N(0, 1)$ なる正規乱数を用いた。ここで、対象系のシステムパラメータ θ_0 と構造を示すベクトル関数 $g_0(\cdot)$ は次のとおりである。

(1) 双線形系

$$g_0(\cdot) = [x(k), x(k-1), u(k), x(k)u(k)]^T$$

$$\theta_0 = [0.4, -0.3, 1.0, -0.8]^T$$

(2) Duffing 形系

$$q_0(\cdot) = (x(k), x(k-1), u(k), x(k)^2, x(k)^3)^T$$

$$\theta_0 = [0.3, -0.7, 1.0, 0.2, 0.02]^T$$

また、観測雑音 $v(k)$ は (5) 式に基づき、次の 5 つの密度関数を持つ白色で $u(k)$ と独立なものを用いた。

(a) 正規分布

$$Pv(v(k)) = 1/(\sqrt{2\pi}\lambda_2) \cdot \exp\{-(v(k)-\lambda_1)^2/(2\lambda_2)\} \\ (-\infty < v(k) < \infty)$$

(b) 指数分布

$$Pv(v(k)) = \lambda_1 \exp\{\lambda_1 v(k)\} \quad (0 \leq v(k) < \infty)$$

(c) ガンマ分布

$$Pv(v(k)) = \lambda_1^2 v(k)^{\lambda_1-1} / \Gamma(\lambda_1) \cdot \exp\{-\lambda_1 v(k)\} \\ (0 \leq v(k) < \infty)$$

(d) χ^2 分布

$$Pv(v(k)) = (v(k)/2)^{\lambda_1/2-1} / \{2\Gamma(\lambda_1/2)\} \\ \cdot \exp\{-v(k)/2\} \quad (0 \leq v(k) < \infty)$$

(e) レイリー分布

$$Pv(v(k)) = 2v(k)/\lambda_1^2 \cdot \exp\{-v(k)/\lambda_1^2\} \\ (0 \leq v(k) < \infty)$$

システムの構造を決定する際、システムに類似したモデルほど識別が難しいと考えられる。そこで、ここでは、システムと同じ構造を持つモデル、低次の構造のモデル、および、冗長な構造のモデルを設定し、シミュレーションを行った。具体的には、(1), (2) のシステムに対して、それぞれ次のモデルを設定した。双線形系に対するモデル

モデル 1

$$q_1 = [x_1(k), u(k)]^T$$

モデル 2

$$q_2 = [x_2(k), x_2(k-1), u(k)]^T$$

モデル 3

$$q_3 = [x_3(k), x_3(k-1), u(k), x_3(k)u(k)]^T$$

モデル 4

$$q_4 = [x_4(k), x_4(k-1), u(k), x_4(k)u(k), x_4(k)^2]^T$$

Duffing 形系に対するモデル

モデル 1

$$q_1 = [x_2(k), x_1(k-1), u(k)]^T$$

モデル 2

$$q_2 = [x_2(k), x_2(k-1), u(k), x_2(k)^3]^T$$

モデル 3

$$q_3 = [x_3(k), x_3(k-1), u(k), x_3(k)^2, x_3(k)^3]^T$$

モデル 4

$$q_4 = [x_4(k), x_4(k-1), u(k), x_4(k)^2, \\ x_4(k)^3, x_4(k)x_4(k-1)]^T$$

モデル 5

$$q_5 = [x_5(k), x_5(k-1), u(k), x_5(k)^2, x_5(k)^3, \\ x_5(k)x_5(k-1), x_5(k)^2x_5(k-1)]^T$$

各モデルのパラメータ θ_i は、 q_i と同次元であり (8) 式の評価関数を最小にすることにより求めた。その最適化にあたっては、初期設定値を零とし、Fletcher-Powell 法を用いた⁽¹⁴⁾。

〈4.2〉 シミュレーションの結果と考察 前節の

シミュレーションの結果について述べ、考察を加える。

各々の分布の観測雑音に対して各モデルの事後確率 $\Pi(i|Y_k)$ を求めた。双線形系の事後確率を図 1 に、また、Duffing 形系の確率を図 2 に示す。これらの図より、双線形系、Duffing 形系いずれの場合も次のようなことが言える。データ数が比較的小さいとき、双線形系で観測雑音が χ^2 分布、および、ガンマ分布の場合、高次のモデルを選定しているものがあるが、全体としては、低次のモデルを選定する傾向がある。更に、データ数が増加すると正しい構造を持つモデルの事後確率が 1 に漸近し、システムの構造を明確に識別

図 1 双線形系の事後確率 $\Pi(i|Y_k)$ の一例

Fig. 1. A posteriori probability for bilinear system.

図 2 Duffing 系の事後確率 $\Pi(i|Y_k)$ の一例

Fig. 2. A posteriori probability for Duffing system.

している。これは、〈3・3〉節で考察した事後確率の漸近的性質とも一致している。

また、データ数が少ない場合に選定されたモデルの妥当性を確認するために、次の量 J を導入する。

図 3 システム構造の識別に要したデータ数の一例

Fig. 3. An example of data for discriminating system structure.

表 1 モデルの予測誤差 J

Table 1. Predicted error of models, J .

Duffing 形系				
指数分布 SN=3.6				
区 間	10~21	22~107	108~200	
モデル 1	@ 6.64	113.72	71.35	
モデル 2	14.92	@ 27.86	10.31	
モデル 3	35.15	115.30	@ 5.56	
モデル 4	56.60	93.85	5.57	
モデル 5	266.78	87.50	5.57	
ガンマ分布 SN=6.2				
区 間	10~19	20~36	# 37~63	64~200
モデル 1	@ 4.76	45.74	44.91	87.55
モデル 2	5.20	@ 6.78	@ 12.98	13.92
モデル 3	22.54	9.05	0.70	@ 1.35
モデル 4	469.26	10.24	1.96	1.38
モデル 5	1.04×10^5	33.70	2.03	1.51
\$x^2\$ 分布 SN=10.4				
区 間	10~14	19~32	# 33~57	58~200
モデル 1	@ 3.91	4.003	84.71	88.38
モデル 2	10.20	@ 0.182	@ 13.89	15.18
モデル 3	26.74	0.183	1.62	@ 0.42
モデル 4	19.83	0.398	21.54	0.34
モデル 5	17.20	0.485	23.26	0.34
レイリー分布 SN=8.3				
区 間	10~13	# 14~26	27~77	78~200
モデル 1	@ 1.23	6.34	88.53	84.75
モデル 2	1.91	0.65	@ 19.07	11.54
モデル 3	203.06	@ 2.42	54.47	@ 1.56
モデル 4	633.51	0.34	56.41	1.56
モデル 5	1064.05	0.34	81.47	1.41

注) 区間で # は過渡状態を表す。

@ は確率が最大のモデルを表す。

$$J \triangleq \sum \{x(k) - x(k|k-1)\}^2$$

但し、 Σ の区間はモデルのうちに最大の事後確率が継続している区間であり、過渡状態とは確率最大のモデルが移り変わる区間である。この J は予測誤差であ

図4 双線形系のパラメータ推定値の一例

Fig. 4. Estimated parameters of bilinear system.

り、システムとモデルの差異を表す目安と考えられる。この一例を表1に示す。これによると、それぞれ確率が高い区間の J の値が最も小さく、事後確率と J の振舞いが対応しており、妥当性がうかがえる。

更に、種々の SN 比についてシステムの構造を識別するのに要したデータ数の一例を図3に示す。これより明らかなように SN 比が悪いほどシステムを識別するために多くのデータを要すると言える。

次に双線形系、Duffing 形系のシステムと同じ構造を持つモデルに対するパラメータの推定値の一例を図4に示す。これより、データ数が増加すると共に、パラメータの推定値は真値に漸近している。これらのことは、事後確率の振舞いとも一致している。

最後に、候補モデルの中にシステムと同じ構造を持つモデルがない場合、データ数が少ない場合は低次のモデルを選定し、データ数が増加すると冗長なモデルの中で最低次なものを選定する傾向がある。

以上のことより、汎関数展開可能な非線形系について、観測雑音が指数族の場合、本方法によりシステム同定が可能であることが検証された。

5. 結 言

汎関数展開可能な系が指数族の分布に従う雑音に汚されている場合について、その同定法を考察した。パラメータ推定には、最尤法がよく用いられるが、雑音が指数族の分布に従い、その値域が半無限大の場合には推定が困難である。そこで、Kullback の情報量に基づく評価量を導入し、パラメータ推定を行った。次に、構造の異なる複数個のモデルを候補とし、Bayes

の定理により各モデルの事後確率を求め、その確率を構造決定のための評価量とした。更に、この事後確率の漸近的性質について考察し、データ数が増加すると共にシステムと同じ構造を持つモデルの確率が1に漸近し、システム構造を明確に識別できることを示した。

本方法によれば、観測データが比較的少ない場合は、システムより低次のモデルを選定する傾向があり、データ数の増加に伴いシステムの構造を明確に識別することが可能である。

今後の課題として、候補モデルのより適切な設定法を考える必要がある。

(昭和61年8月4日受付)

文 献

- (1) E.G. Gilbert: "Functional Expansions for the Response of Nonlinear differential systems" *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-22, No. 6, p. 909 (1977)
- (2) 沖田・田中・丸井・吉田: 「Bayes の定理に基づく非線形系の一同定法」 *電学論 C*, 104, p. 149 (昭59-6)
- (3) G.E.P. Box & W.J. Hill: "Discrimination Among Mechanistic Models" *THECHNOMETRICS*, 9, No. 1, p. 57 (1967)
- (4) W.J. Hill & W.G. Hunter: "A Note on Desings for Model Discrimination: Variance Unknown Case" *ibid*, 11, No. 2, p. 396 (1969)
- (5) L. Maisel (佐藤平八訳): "Probability, Statistics and Random Processes" 森北出版 (1980)
- (6) O. BARNDORFF-NIELSEN: "Information and Exponential Families In Statistical Theory" John Wiley (1978)
- (7) Kullback & Solomon: "Information Theory and Statistics" John Wiley (1959)
- (8) R.M. Hawkes and J.B. Moore: "Performance Bounds for Adaptive Estimation" *Proc. IEEE*, 64, No. 8, p. 1143 (1976)
- (9) J. La Salle & S. Lefschetz (山本稔訳): 「リヤプノフの方法による安定性理論」 (昭50) 産業図書
- (10) P. Hougaard: "Parametrizations of non-linear models" *J.R. Statist. Soc. B*, 44, No. 2, p. 244 (1982)
- (11) 沖田・中島・太田: 「構造未知な非線形システムの一同定法」 *電学論 C*, 99, p. 199 (昭54-9)
- (12) 沖田・小林・日高: 「統計量の変動検出と原料割合系への適用」 *計測自動制御学会論文集*, 22, No. 12 (昭61)
- (13) 大井: 「特殊関数」 (昭37) 岩波書店
- (14) 志水: 「システム制御と数理計画法」 (昭51) コロナ社
- (15) R. V. Churchill (洪四方次訳): "Operational Mathematics" (1950) 彰国社
- (16) 道脇義正他: 「工科のための微積分入門」 東京図書株式会社 (1978)

付 録

(13)式の導出 まず、システムとモデルが同じ構造をもつ場合を考える。

データ数がパラメータ数に比べて十分大きい場合、 $\hat{\theta}_i$ は θ_{i0} のまわりであると期待できる。そこで、偏差 $e_i(k)$ を次のように近似する。

$$\begin{aligned} e_i(k) &\triangleq y(k) - y_i(k) \\ &\triangleq \mathbf{h}^T \mathbf{x}(k) + v(k) - \mathbf{h}^T \mathbf{x}_{i0}(k) \\ &\quad + \mathbf{h}^T (\partial \mathbf{x}_i / \partial \boldsymbol{\theta}_i) (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_{i0}) \\ &= v(k) + w(k) \dots\dots\dots (\text{付 1}) \end{aligned}$$

但し, $\mathbf{x}_{i0}(k)$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}_{i0}$ をもつモデルの状態変数であり,

$$\begin{aligned} w(k) &= \mathbf{h}_i^T C^T (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_{i0}) \\ C^T &= (\partial \mathbf{x}_i / \partial \boldsymbol{\theta}_i)^T \end{aligned}$$

である。これより (10) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(y(k)|i, Y_{k-1}) \\ &= \int Pw(e_i(k)|v(k), i, Y_{k-1}) P v(v(k)) dv(k) \\ &= \int Pw(e_i(k) - v(k)|i, Y_{k-1}) P v(v(k)) dv(k) \\ &\dots\dots\dots (\text{付 2}) \end{aligned}$$

ここで, パラメータの推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ は漸近的に $N(\boldsymbol{\theta}_{i0}, \Lambda_i)$ の正規分布に従うとみなせるので, $Pw(\cdot)$ も $N(0, \sigma_w^2)$ の正規分布に従うと考えられる。但し,

$$\sigma_w^2 = \mathbf{h}_i^T C^T \Lambda_i C \mathbf{h}_i$$

である。また, $Pv(\cdot)$ を次のように v_0 のまわりで近似する。(ここで, 簡単のため, k は省略する。)

$$\begin{aligned} P v(v) &\triangleq \exp \{a' + b'(v - v_0) + c(v - v_0)^2 + \Delta(v) \\ &\quad + \xi(\lambda_0) \ln v - \phi(\lambda_0)\} \\ &= \exp \{a + bv + cv^2\} v^{\xi(\lambda_0)} \exp \{\Delta(v)\} \\ &\dots\dots\dots (\text{付 3}) \end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned} a' &= \phi^T(\lambda_0) \tau(v_0) \\ b' &= \phi^T(\lambda_0) (\partial \tau(v_0) / \partial v) \\ c &= \phi^T(\lambda_0) (\partial^2 \tau(v_0) / \partial v^2) \\ a &= a' - b'v_0 + cv_0^2 - \phi(\lambda_0) \\ b &= b' - 2cv_0 \end{aligned}$$

である。なお, (付 2) 式の積分を考慮すれば, v_0 は $e_i(k) < 0$ の場合は 0, $e_i(k) > 0$ の場合は $e_i(k)$ するとよい近似が得られる。ここで, $\xi(\lambda_0) = \kappa + \nu$ (κ : 自然数) とし $v^{\xi(\lambda_0)} \exp \{\Delta(v)\}$ を次のように近似する。

$$\begin{aligned} v^{\xi(\lambda_0)} \exp \{\Delta(v)\} &\triangleq v^* \sum_{i=0}^n \beta_i v^i \\ v^i &= 1/i! \cdot d^i v^* \exp \{\Delta(v)\} / dv^i \end{aligned}$$

但し, n は近似の精度により決定する。よって, $Pv(v)$ は次式のように与えられる。

$$Pv(v) = \exp \{a + bv + cv^2\} \sum_{i=0}^n \beta_i v^{*+i}$$

これらより, $P(y(k)|i, Y_{k-1})$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(y(k)|i, Y_{k-1}) \\ &= K' \cdot \sum_{i=0}^n \beta_i v^{*+i} \exp \{\omega v^2 + \rho v\} dv \\ &\dots\dots\dots (\text{付 4}) \end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned} K' &= 1/\sqrt{2\pi}\sigma_w \cdot \exp \{(-e_i(k)^2 + a)/2\sigma_w^2\} \\ \omega &= c + 1/2\sigma_w^2, \quad \rho = e_i(k)/\sigma_w^2 + b \end{aligned}$$

である。

また, 次の関係が知られている⁽¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} 1/(\sqrt{\pi}g) \cdot \int_0^\infty v^m \exp \{-v^2/4g^2 - sv\} dv \\ = (-1)^m \cdot d^m L(s)/ds^m \dots\dots\dots (\text{付 5}) \end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned} L(s) &= \exp(s^2 g^2) Ef(sg) \\ Ef(sg) &\triangleq \text{erfc}(sg) = 2/\sqrt{\pi} \int_{sg}^\infty \exp(-\eta) d\eta \end{aligned}$$

である。ここで, (付 4), (付 5) 式において, $\omega = -1/4g^2$, $\rho = -s$ を対応させると, 次式を得る。

$$P(y(k)|i, Y_{k-1}) = \text{Con} \cdot \sum_{i=0}^n \beta_i (-1)^i d^{i+*} L(s)/ds^{i+*}$$

但し,

$$\text{Con} = \sqrt{\pi}gK'$$

である。更に, ライプニッツの公式より次式を得る⁽¹⁶⁾。

$$\begin{aligned} P(y(k)|i, Y_{k-1}) \\ &= \text{Con} \cdot \sum_{j=1}^l i C_j \{d^{l-j} \exp(s^2 g^2)/ds^{l-j}\} \\ &\quad \cdot \{d^i Ef(sg)/ds^i\} \dots\dots\dots (\text{付 6}) \end{aligned}$$

但し,

$$\begin{aligned} \{d^n \exp(s^2 g^2)/ds^n\} &= \exp(s^2 g^2) g^n H_n(sg) \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \\ \{d^n Ef(sg)/ds^n\} &= -2(-1)^n/\sqrt{\pi} \\ &\quad \cdot \exp(-s^2 g^2) H_n(sg) \end{aligned}$$

であり, $H_n(\cdot)$ は Hermite の多項式である⁽¹³⁾。

次に, システムとモデルの構造が異なる場合, (付 1) 式に $\mathbf{h}^T \mathbf{x}(k) - \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}_{i0}(k)$ がバイアスとして現われ, これは $e(k) \triangleq y(k) - y_i(k)$ に反映される。よって, 先の場合と同様に議論される。