コンピュータグラフィックスによる制御系の特性解析

正 員 小 野 治 (明治大)

1. ま え が き

本論文は、制御理論の中に常に基礎として存在してきた図示による特性表現手法について、改めて現代的な環境装置と観点から新しい手法を提案し、更にその制御系設計への応用を示している。古典から現代への制御理論を通して、図による特性、構造、評価は解析上重要な概念であり⁽¹⁾、最近のワークステーションの普及などの総合的な試作環境を考えると改めて基本的であると思われる^{(2)~(5)}。

本研究では、従来の複素周波数に基づいた設計手法に対し、最近、筆者が開発した複素写像の基本的性質に基づいたコンピュータグラフィックスによる制御系の特性解析および設計手法を明らかにする。はじめに、複素関数の基本的性質を根軌跡や極零点の配置などと関連させながら明らかにする。古典的な制御理論はもちろんのこと、近年の H^∞ 最適制御理論においても複素関数の制御理論への応用は依然として重要な位置を占めている。ここでもう一度複素関数の基本的概念にたちかえり、現代的立場から考察することは意味のあることと思う。次に、コンピュータグラフィックスを用いて複素関数の一つの表現を試みる。この表現手法は、むだ時間を含むシステムや Markov パラメータで表現されるような高次元のシステムも容易に表すことができる。コンピュータグラフィックスでは、高速しかも容易に実行することができ、新しい表現と設計手法が実現できる。最後に、数式処理言語を用いた場合の本手法の構成と、制御系設計 CAD システムへの組み込みについて考察する。

2. 複素写象としての伝達関数

複素周波数 s はよく知られているように振幅と角周

波数を同時に表現している。一方、複素数は変換 j から作られる一次式の線形変換 $\sigma + j\omega$ (σ, ω は実数) であり⁽⁶⁾、従って、複素変数の複素関数は、変換のいくつかの合成としてシステムを表現していることになる。ここでは初めに整級数について考察し、次に有理関数について調べる。それぞれ前者は特性方程式に対応し、後者は伝達関数に対応する。

特性多項式はその名のとおりに有界次元の多項式として捉えられるのが一般的であるが、これを拡張して整級数として捉えることもできる。例えば、フィードバック要素を収束半径 R の開円板 D_r 上で、

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n \dots\dots\dots (1)$$

と一般化できれば、この場合の特性方程式は、

$$D(s) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n N(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \dots\dots\dots (2)$$

となる。ただし、 $D(s)$ および $N(s)$ はそれぞれ伝達関数の分母、分子多項式である。例としてむだ時間要素を考えると f_n は

$$f_n = (-L)^n / n! \dots\dots\dots (3)$$

となり、収束半径 $R = +\infty$ で複素平面全体で定義される。

また、記述関数で近似できるような非線形要素をもつ制御系では非線形要素の入力正弦波および出力時間関数の基本波に対し、改めてラプラス変換を施すことによって、その入出力比を次式のような複素関数で示すことができる。

$$\left. \begin{aligned} Y e^{j\phi} \\ Y = \sqrt{a^2 + b^2} / X \\ \phi = \{\tan^{-1}(a/b)\} / \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 a, b は出力時間関数基本波のフーリエ係数から求められる。また、 X, ω は入力正弦波の振幅および角周波数である。このとき f_n は次式となる。

$$f_n = Y \phi^n / n! \dots\dots\dots (5)$$

(4)式からわかるように Y および ϕ は入力正弦波の

A Characteristic Analysis of Control Systems by Using Computer Graphics. By Osamu Ono, Member (Faculty of Engineering, Meiji University).

小野 治: 正員, 明治大学工学部電気工学科

振幅、角周波数の関数である。従って、それらがまた s の関数になると考えられる。整級数は定義域でコーシー・リーマンの条件を満足し正則であるから、その逆関数も正則で整級数に展開される。

一方、伝達関数は部分分数に展開でき、有限個の有理形関数の和と考えられる。各有理形関数は、有理関数でない超越関数も含む。そのとき零点については、Taylor 展開を用い、極については Laurent 展開を用いる。それぞれの係数は導関数および留数から求められる⁽⁶⁾。

また、根軌跡による設計法において伝達関数を複素写像と考えると、フィードバック制御系は次のような一次変換 (Möbius 変換) と伝達関数の合成写像となる。

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \frac{az+b}{cz+d}, \quad z=G(s) \\ G_F(s) &= F(G(s)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

フィードバック構造は一次変換の特別な場合で、そのパラメータは次の行列表現によって表される。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

この行列は z を射影座標で表したときの一次変換の表現である⁽⁶⁾。

フィードバックの構造を一次変換として捉えることによって等角写像の性質や零点の不動性がただちに求められると同時に、フィードバックによって不動な点が

$$G(s) = (k-1)/k \dots\dots\dots (8)$$

を満たす点として、零点以外にも存在することがわかる。

3. 近傍パターンのグラフィック表示

筆者は特異点近傍をその回りのパターンによって示す手法を明らかにした⁽⁷⁾。これは定義域にパターンを設定しこの伝達関数による写像パターンによってその特性を表示するものである。

本論文ではこの手法を拡張し、伝達関数の極と零点を同時に示す手法を明らかにする。伝達関数を一つの複素写像と考え、変換する対象を領域パターンとする。複素平面 C を次のような領域に分割し、それぞれにカラー属性を付加する。

$$\left. \begin{aligned} C(a+jb)^{++} &= \{x+jy \in C | x \geq a, y \geq b\} \\ C(a+jb)^{-+} &= \{x+jy \in C | x < a, y \geq b\} \\ C(a+jb)^{--} &= \{x+jy \in C | x < a, y < b\} \\ C(a+jb)^{+-} &= \{x+jy \in C | x \geq a, y < b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

いま、 $a+jb=0$ のときのカラー属性を以下のようにする。

$$\left. \begin{aligned} C(0)^{++} &\longrightarrow C_r 1 \\ C(0)^{-+} &\longrightarrow C_r 2 \\ C(0)^{--} &\longrightarrow C_r 3 \\ C(0)^{+-} &\longrightarrow C_r 4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

このような領域パターンが伝達関数の複素写像によって変換され、その得られたパターンから制御系の特性を抽出する。

ここでは、零点および極の近傍パターンについて考察する。零点近傍において伝達関数が次式のように、Taylor 展開されたとする。

$$G(s) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (s-a)^n \quad (k \geq 1, c_k \neq 0) \dots\dots (11)$$

ここで

$$c_n = G^{(n)}(a)/n! \quad (n \geq 1)$$

いま、 a の近傍を考えるために s に、 $a + r \exp(j\theta)$ を代入する。

$$G(a + r \exp(j\theta)) = c_k r \exp(jk\theta) + o(r, \theta) \dots\dots\dots (12)$$

同様にして極について Laurent 展開を行うと次式のようになり、

$$G(s) = \sum_{n=-l}^{\infty} c_n (s-b)^n \quad (l \geq 1, c_{-l} \neq 0) \dots\dots\dots (13)$$

極近傍 $b + r' \exp(j\theta')$ では次式になる。

$$\begin{aligned} G(b + r' \exp(j\theta')) \\ = c_{-l} r' \exp(-jl\theta') + o(r', \theta') \dots\dots (14) \end{aligned}$$

このように十分小さい r, r' をとると極と零点の区別を次の性質 1 のようにして行うことができ、更に各々の位数も同時に求められる。ただし、ここで交点とは、 $C_r 1, C_r 2$ と $C_r 3, C_r 4$ の境界によって作られる曲線と $C_r 1, C_r 4$ と $C_r 2, C_r 3$ の境界によって作られる曲線の交わる点をさすものとする。

《性質 1》

(i) 交点近傍において反時計回りに次のような順序でカラー属性領域が回ればその交点は零点である。

$$C_r 1 \rightarrow C_r 2 \rightarrow C_r 3 \rightarrow C_r 4$$

(ii) 交点近傍において反時計回りに次のような順序でカラー属性領域が回ればその交点は極である。

$$C_r 4 \rightarrow C_r 3 \rightarrow C_r 2 \rightarrow C_r 1$$

(iii) 各交点近傍において上記(i), (ii)のパターンが m 回繰り返すならばそれぞれ位数 m の極

図 1 伝達関数のパターン
Fig. 1. Pattern of transfer function.

あるいは零点である。

(証明)

簡単のために極と零点は複素平面上で分離しているものとする。伝達関数は極および零点の近傍において次式のように表現される。

$$G(s) = c_1 r \exp(j\theta) + o(r, \theta)$$

$$G(s) = c_{-1} r' \exp(-j\theta') + o(r', \theta')$$

θ と θ' が 0(rad) から 2π (rad) まで変化すると、対数関数 $\exp(j\theta)$ と $\exp(-j\theta')$ はそれぞれ反対向きに回転する。零点の回りでは反時計まわりに $Cr1 \rightarrow Cr2 \rightarrow Cr3 \rightarrow Cr4$ の順序になり、極の回りでは反対に $Cr4 \rightarrow Cr3 \rightarrow Cr2 \rightarrow Cr1$ の順序になる。更に位数が m であれば $\exp(j\theta)$ あるいは $\exp(-j\theta')$ が $\exp(jm\theta)$ あるいは $\exp(-jm\theta')$ に置き代わり同じパターンが m 回繰り返すことになる。(Q. E. D.)

以上のようにして極および零点を CRT ディスプレイ上に表示することができ、伝達関数の特性を一つのパターンとして示すことができる。例として次の伝達関数のパターンを図 1 に示す。

$$G(s) = \frac{s+4}{s^2+6s+18}$$

カラーパターンの交点は 3 点あり、そのうち 2 点は極を示し、1 点は零点を示している。

4. 根軌跡のパターン表現

よく知られているように、根軌跡は制御系の設計に用いられる実用的な手法の一つである。根軌跡を正確に求めるには、現在では計算機を用い数値計算を行うのが一般的であるが、重根をもつ場合や高次元になると計算に多くの時間を必要とする。一方本論文で明らかにした手法を用いれば、このような数値計算を行う必要がなく、直接にパターン表現によって根軌跡を示すことができる。また、開ループの極および零点と根軌跡の関係が明確に表示される。

次のような、一般的なフィードバック制御系を考え

る。

$$G'(x+jy, K) = \frac{KG}{1+KG} \dots\dots\dots (15)$$

ただし、ゲイン K は正とする。

上記の伝達関数を実部と虚部に分けそれぞれを x, y で表現すると、次のようになる。

$$G' = \frac{K}{|D'|^2} (G_a' + jG_b') \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} G_a' &= a_n a_d + b_n b_d + K(a_n^2 + b_n^2) \\ G_b' &= b_n a_d - a_n b_d + K(b_n a_n - a_n b_n) \\ &= b_n a_d - a_n b_d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 a_n, b_n, a_d, b_d は次式によって定義される x, y の実関数であり、

$$G(x+jy) = \frac{a_n(x,y) + j b_n(x,y)}{a_d(x,y) + j b_d(x,y)} \dots\dots (18)$$

D' は次式を意味する。

$$D' = (a_d + K a_n) + j(b_d + K b_n) \dots\dots\dots (19)$$

(17)式から、特に G_b' の符号がゲイン K の値に依存しないことがわかる。このことをパターン上でいけると K が変化しても $Cr1$ と $Cr4$ または $Cr2$ と $Cr3$ の境界が移動しないということを表している。すなわち、次のような性質 2 が求められる。

《性質 2》 制御系の根軌跡はパターン領域 $Cr1$ と $Cr4$ または $Cr2$ と $Cr3$ の境界に存在する。

したがって、一度パターンを構成すれば同時に根軌跡も表示していることになる。

この例を次のようなむだ時間を含む伝達関数について図 2 に示す。

$$G(s) = \frac{\exp(-s)}{s+1+0.5\exp(-s)}$$

ここでは、 $Cr1$ と $Cr4$ および $Cr2$ と $Cr3$ の境界が根軌跡になっており、更に反時計回りに $Cr4 \rightarrow Cr3 \rightarrow Cr2 \rightarrow Cr1$ とカラー属性領域によってかこまれる点

図 2 根軌跡のパターン(むだ時間系)
Fig. 2. Pattern of root locus (Time delay system).

が極である。一般にむだ時間制御系の根軌跡を求めるには多くの困難を伴うが、本手法によれば容易に表示することができ、また、画面入力装置（ライトペンあるいはマウスなど）を用いることによって軌跡上の点を抽出し、画面座標からゲイン K を逆算することができる。

5. 正実関数による非線形制御系のパターン

回路網の実現問題などで使われる正実関数は、一般に次のように定義されている。

$$Re[s] > 0 \longrightarrow Re[H(s)] > 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

これは、実部の符号のみを考えており、前述のパターンでいえば C_r1 と C_r4 あるいは C_r2 と C_r3 の区別をしていないことになる。従って、次のような性質3が求められる。

《性質3》 複素関数 $H(s)$ がパターン領域 C_r2 と C_r3 を第1象限または第4象限に持たなければ、それに正実関数である。

上述のことはパターンのうえで C_r2 と C_r3 のカラーが第1象限と第4象限に現れないことを意味し、正実関数に関する性質が、そのままパターン上で表現されている。このことを以下では、非線形制御系に適用する。一般的非線形システムを直接取り扱うことは複素関数の立場から制限されるが、特別な形の非線形システムについては考察することができる。その一つとしてポポフの安定判別法に関する拡張がある。ここでは非線形制御系として図3に示すようなシステムを考え、非線形特性を次式とする。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq f(\sigma)/\sigma \leq k \quad (k \leq \infty) \\ f(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

次のような複素関数 $P(s)$ を定義し、

$$P(s) = Z(s) \{G(s) + 1/k\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

この関数が正実関数となるような正実関数 $Z(s)$ が存在するかどうかを調べる。もし存在すれば極がすべて左半平面にある線形部 $G(s)$ からなる非線形制御系は絶対安定である。このことは前述の性質3を使い、各々の複素関数 $P(s)$, $Z(s)$ のパターンを表示することによって調べることができる。実際には $Z(s) = 1 + qs$ と

図3 非線形制御系

Fig. 3. Nonlinear control system.

おき、 q をパラメータとして逐次 $P(s)$ のパターンを表示し、その C_r2 と C_r3 のカラー属性領域が複素平面上において第1象限あるいは第4象限に存在するかどうかを調べる。

また、非線形特性が時間的に変動し、

$$k_1 \leq f(\sigma, t) \leq k_2, \quad (k_2 > 0, k_1 \neq k_2) \dots\dots\dots (23)$$

と表される場合には、次の不等式が安定の判別式になる。

$$Re\{G(j\omega)/(1+k_1G(j\omega))\} + 1/(k_2-k_1) > 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

この不等式をパターンによって考察するには、初めのカラー属性領域の構成を、次のようにする。

$$\left. \begin{aligned} C(-1/(k_2-k_1))^{++} &\longrightarrow C_r'1 \\ C(-1/(k_2-k_1))^{-+} &\longrightarrow C_r'2 \\ C(-1/(k_2-k_1))^{--} &\longrightarrow C_r'3 \\ C(-1/(k_2-k_1))^{+-} &\longrightarrow C_r'4 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ゲイン k_1 のフィードバック制御系

$$G_{k1}(s) = \frac{G(s)}{1+k_1G(s)} \quad \dots\dots\dots (26)$$

に対するパターンを構成する。(25)のカラー属性領域の定義から $C_r'2$, $C_r'3$ に含まれる複素点上の(26)式の値は明らかにその実部が $-1/(k_2-k_1)$ より小さい。従って、 $s=j\omega$ とすることによって(24)式から、安定判別法は虚軸上に $C_r'2$ および $C_r'3$ が現れないという条件に置き換えられる。すなわち、円板定理をポポフの安定判別の特別な場合としてパターン上で考察することができる。

6. 数式処理言語への組み込み

数式処理言語においては、変数を記号として取り扱うことができるので伝達関数の実部と虚部を x と y の関数として直接取り出すことができる。従って、虚部関数の等高線を考えればちょうど零のときの線が根軌跡に対応し、直ちに根軌跡を求めることができる。また、実部に対する等高線も考え同時に表示するとその交点が極または零点に対応する。グラフィックの処理については数式処理言語内のプロット用関数によって可能である⁽⁸⁾。その出力グラフ例を図4に示す。この例は図2におけるむだ時間を含む制御系と同じシステムについて実部関数および虚部関数を求めたのち出力したものである。

以上のことから、本手法は数式処理言語によって構成された制御系設計のためのCADシステムに対しても組み込むことが可能である。すなわち、従来の数値による評価にかわり、数式を直接グラフィックによっ

図 4 数式処理言語による出力グラフ

Fig. 4. Output graph by symbolic manipulation language.

て視覚化し、その構造評価を行うことができる。このことは、従来の対数伝達関数を複素ポテンシャルの流線図によって視覚化した概念に対応している⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

7. あとがき

本論文では制御系特性の解析を CRT ディスプレイ上のパターンによって行う一つの手法を示した。代数方程式を数値解析手法によって調べる従来の方法も重要であるが、現在の高度に発達した表示装置を使用すれば本論文で示したような新しいパターン表示手法も意味を持つものと思われる。極配置や応答波形によってシステム特性が評価されたのと同じように、パターンによる直感評価が十分備われば、一つの特性把握手法として確立されるものと思われる。制御系を級数の形で取り扱うこともできるのでシステム同定やモデル低次元化の評価にも使用することができる。また、システムパラメータの変動に応じていくつかのパターンを同時に表示できれば、ディスプレイ上の画面入力装置から値を抽出することによって、パラメータ感度を計算することも可能である。

このようなパターンによる解析手法は総合的な形で完成させることができよう。そのためには計算機周辺装置の発達が必要であり、より高速なグラフィック装置によって意味を持ってくるものと思われる。また、

エキスパートシステムに組み込むことができればパターンマッチングによって大量の画面データを直ちに比較、分類することが可能である。以上のような意味で古典的な複素関数による制御理論に対して、もういちど検討する必要があると思われる。次に本手法の特徴をまとめる。

- (a) 制御系の極および零点を通常の数値計算なしに近似的パターンによって示すことができる。
- (b) 極および零点の相違を近傍パターンの回転順序によって示すことができる。
- (c) 根軌跡を領域のゲインによって移動しない境界として示すことができる。
- (d) 正実関数をパターンの特別な配置として特徴付けることができる。
- (e) 非線形システムに対しても拡張することによって取り扱いが可能である。
- (f) 数式処理言語を使った CAD システムにも容易に組み込むことができる。

終わりに、日頃ご指導いただいている明治大学工学部都築旋二教授、西山栄枝教授にたいし深く感謝いたします。
(昭和 62 年 6 月 18 日受付)

文 献

- (1) H. H. Rosenbrock: "Computer Aided Control System Design" Academic Press, London (1974)
- (2) W. R. Evans: "Graphical Analysis of Control Systems" AIEE Trans. No. 66, 547/582 (1948)
- (3) W. R. Evans: "Control System Synthesis by Root Locus Method" AIEE Trans. No. 69, 66/69 (1950)
- (4) A. H. Spang: "Experience and Future Needs in Computer-Aided Control Design" IEEE Contr. Syst. Mag., 5, No. 1, 18/21 (1985)
- (5) D. K. Frederick, R. P. Kraft, & T. Sadeghi: "Computer-Aided Control Systems Analysis and Design Using Interactive Computer Graphics" IEEE Contr. Syst. Mag., 2, No. 4, 19/23 (1982)
- (6) 田村: 「解析関数」(昭 58) 裳華房
- (7) 小野: 「制御系極配置の近傍パターンによる表現手法」計測自動制御学会論文集 21, No. 6 (昭 60)
- (8) Zeta LISP Macsyma Reference Manual Version 2 Symbolics, Inc. (1986)
- (9) 高橋: 「自動制御の数学」(増補版) 320/324 (1961) オーム社
- (10) 高木: 「ベクトル軌跡の函数論的研究」早稲田電気学会雑誌 21, No. 3, 126/144 (昭 15)