汎関数展開可能な系に対する特性変動の検出

正員 沖田 豪 (山口大)

正員 横山 智広 (三菱重工)

正員 田中正 吾 (山口大)

1. 緒言

近年、大規模生産プロセスのように、複雑多様な非線形システムを取扱う機会が多くなってきている。それに伴い、システムの信頼性や安全性を確保するため、異常検出の重要性が高まっている^{(1)~(3)}。

従来、これに関して一般化尤度比検定法、逐次確率比検定法などを用いたシステムの異常検出法が報告されている^{(4)~(6)}。それらは、いずれもしきい値を必要とするが、その系統的な決め方はないようである。また、パラメータの推定値は、観測雑音のため確率的な振舞いを示すが、それらの検出法では、このゆらぎを具体的にとらえていない。他方、これまでに Bayes の定理を用いて確率システムのパラメータ変動を検出する研究がなされている^{(7)~(8)}。例えば、非定常確率過程について、突発的な統計量の変化を検出しているものがある⁽⁷⁾。また、遷移雑音のない線形系を対象とし、異常の検出を行っているものもある⁽⁸⁾。これらは主として、突発的な特性変動あるいは跳躍的な外乱などを対象としている^{(4)~(8)}。しかし、実際には化学反応装置の触媒劣化による異常のように、特性が連続的に変化するシステムも存在する。特に、連続的に変化する場合、初めは特性変動が小さくても、そのまま放置して運転すればシステムやプロセスの異常へと発展し、とりかえしのつかない故障や事故を招く恐れがある。そこで、故障に至る前に異常を早期に、かつ的確にとらえることが望まれる。

そこで、Duffing 形や双線形などを含む汎関数展開

可能な系を対象として⁽⁹⁾、遷移雑音および入出力の観測雑音に汚された観測値に基づいて、未知時刻で発生するシステムの特性変動を検出し、そのパラメータを推定する問題を考察する。

2. 問題の記述

対象とする系は、安定かつ有限項で汎関数展開可能であり、次式で表される⁽⁹⁾。

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_0^T(k) \mathbf{q}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + w(k) \\ \mathbf{x}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k-n_1+2) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-n_1+1)]^T$$

$$\mathbf{u}(k) = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_2+1)]^T$$

ここで、 $\mathbf{x}(k)$ は n_1 次元状態ベクトル、 $\mathbf{u}(k)$ は n_2 次元入力ベクトルである。また、システムパラメータ $\theta_0(k)$ およびベクトル関数 $\mathbf{q}(\cdot)$ は次のように定義される。

$$\theta_0(k) \triangleq [\theta_{01}(k), \theta_{02}(k), \dots, \theta_{0L}(k)]^T$$

$$\mathbf{q}(\cdot) \triangleq [q_1(\cdot), q_2(\cdot), \dots, q_L(\cdot)]^T$$

ただし、

$$q_l(\phi(k)) \triangleq \prod_{h=1}^{m(l)} \phi_{j_{h(l)}}(k)$$

$$1 \leq l \leq L$$

$$\phi(k) \triangleq [\mathbf{x}(k)^T, \mathbf{u}(k)^T]^T$$

である。ここで、 $m(l)$ は $\theta_{0l}(k)$ を係数とする展開項の次数 (degree) であり、 $\phi_{j_{h(l)}}(k)$ は展開項を構成する $\phi(k)$ の要素を表す。また、システムの構造は既知である。更に、遷移雑音 $w(k)$ は白色ガウス雑音 $N(0, \sigma_w^2)$ である。

一方、入出力の観測値 $z(k)$, $y(k)$ は次式で与えられる。

$$z(k) = u(k) + v(k) \quad k \geq 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Detection of Parameter Changes in Nonlinear System Described by Functional Expansion. By Tuyenoshi Okita, Member (Faculty of Engineering, Yamaguchi University), Yokoyama Tomohiro, Member (Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.) & Shyogo Tanaka, Member (Faculty of Engineering, Yamaguchi University).

沖田 豪: 正員, 山口大学工学部

横山智広: 正員, 三菱重工業(株)

田中正吾: 正員, 山口大学工学部

$$y(k) = x(k) + v(k) \quad k \geq 1 \dots\dots\dots (3)$$

また、観測雑音 $v(k)$ および $v(k)$ は、それぞれ白色ガウス雑音 $N(0, \sigma_v^2)$, $N(0, \sigma_w^2)$ である。更に、入力および各雑音は発生源が異なるため、互いに統計的に独立とする。

システムは、十分長い正常状態の後に未知時刻 k_0 でパラメータに変動を生ずる。このとき、観測値系列

$$Y_k = \{y(1), z(0), y(2), \dots, y(k), z(k-1)\}$$

に基づいて、システム特性変動を検出し、そのパラメータを推定する問題を考える。

3. 特性変動の検出

本章では、(1)式で表されるシステムを対象とし、未知時刻で生じる特性変動を検出する方法について述べる。

〈3.1〉 変動のモデル化 システム特性の変動は、パラメータの変化としてとらえることができる。一般に、特性変動の要因は一つとは限らず、それぞれの要因に応じてパラメータは変化する。従って、変化するパラメータと変化しないパラメータとに分けられ、これらの組合せから種々の変動モードが考えられる。またパラメータの変動形態として、突発的な故障を表す跳躍的な変化と経年変化による劣化を表す連続的な変化が考えられる。

このパラメータ変化分は、変動発生直後、時間についてテラー展開表現される。従って、推定すべきパラメータの個数も考慮し、変化分を主要項のみで次のように近似する。

$$\theta_i(k) = \theta + \Delta \theta_i(k - k_i + 1)^{m_i} U_1(k - k_i) \\ m_i \geq 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 i はモデルの番号、 k_i は変動発生時刻である。また、 θ は正常状態における既知のパラメータであり、 $U_1(\cdot)$ は単位段関数である。

このように、変動モードと変動形態および変動発生時刻の組合せにより複数の変動事象を考える。いま、変動を生じない事象 ($i=0$) と n 個の変動事象 ($i=1, 2, \dots, n$) を仮説する。これらのモデルは、(1)~(3)式に準じて次のように表される。

$$x_i(k+1) = \begin{bmatrix} \theta_i^T(k) q(x_i(k), u(k)) \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_i(k - m_i + 2) \end{bmatrix} \dots (5) \\ x_i(0) = x_0 \quad (i=1, \dots, n) \\ y_i(k) = x_i(k)$$

〈3.2〉 パラメータ推定 システム変動のモデル i が与えられるとき、そのパラメータ $\theta_i(k)$ を推定す

る。パラメータは連続量であり、先験分布が未知であるため、最尤法に基づきパラメータを推定する。

$$L(\hat{\theta}_i) = \max_{\theta_i} [\ln P(Y_k | \theta_i)] \\ = \min_{\theta_i} [I_i / (2 \sigma_0^2)] + \text{const.} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $\sigma_0^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2$

$$I_i = \sum_{k'=k_i+1}^k \{y(k') - y_i(k')\}^2 \\ = \sum_{k'=k_i}^{k-1} \{y^2(k'+1) - 2y(k'+1)q^T(x_i(k'), u(k')) \\ \times \theta_i(k') + \theta_i^T(k')q(x_i(k'), u(k')) \\ \times q^T(x_i(k'), u(k'))\theta_i(k')\}$$

である。

入力が完全観測で、遷移雑音 $w(k)$ が存在しない場合、非線形最適化手法により評価量 I_i は θ_i について最小化される。しかし、雑音 $v(k)$, $w(k)$ が存在する場合は、この方法を用いることはできない。そこで、データ数がパラメータ数 (L_i) に比べて十分大きいとき、評価量 I_i を近似し、最小化することを考える。まず、変動モデル (5) 式におけるベクトル関数 $q(x_i(k), u(k))$ を、観測値を用いて表そう。いま、 $q(x_i(k), u(k))$ に準じて $q(y(k), z(k))$ および $q(v(k), v(k))$ を定義する。(2), (3) 式の観測方程式を考慮すれば、次の関係を得る⁽¹⁰⁾。

$$q(y(k), z(k)) \\ = Bq(x_i(k), u(k)) + q(v(k), v(k)) \dots (7)$$

ただし、行列 B の (k, l) 要素は次のように表される。

$$b_{kl} = \begin{cases} 0 & (k < l) \\ 1 & (k = l) \\ \lambda(v, v) & (k > l) \end{cases}$$

なお、 $\lambda(v, v)$ は、二項定理より得られる $v(k)$, $v(k)$ の多項式である⁽¹⁰⁾。上式に対して、観測雑音について平均操作を施すと、 $\sum_{k'=k_i}^{k-1} \{q(x_i(k'), u(k'))\}$ は次式で表される。

$$\sum_{k'=k_i}^{k-1} \{q(x_i(k'), u(k'))\} \\ = \bar{B}^{-1} \sum_{k'=k_i}^{k-1} \{q(y(k'), z(k')) - E q(v(k'), v(k'))\}$$

ただし、記号 $\bar{\cdot}$ は $v(k)$, $v(k)$ についての期待値を示す。

従って、行列 B は対角要素に 1 をもつ三角行列であり、 $\bar{B}^{-1}$ は存在する。

同様に、次式を得る。

$$\sum_{k'=k_i}^{k-1} \{q(x_i(k'), u(k'))q^T(x_i(k'), u(k'))\} \\ = \bar{D}^{-1} \sum_{k'=k_i}^{k-1} \{[q(y(k'), z(k'))q^T(y(k'), z(k'))]\}$$

$$\begin{aligned} & -\bar{C}[\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))] \\ & -\{\bar{C}[\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))]\}^T \\ & -E[\mathbf{q}(\mathbf{v}(k'), \mathbf{v}(k'))\mathbf{q}^T(\mathbf{v}(k'), \mathbf{v}(k'))] \end{aligned}$$

ただし、3次テンソル $\bar{C}$ の (k, l, m) 要素および4次テンソル $\bar{D}$ の (k, l, m, n) 要素は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{c}_{klm} & \triangleq \bar{b}_{kl} q_{lm}(\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k)) \\ \bar{d}_{klmn} & \begin{cases} = 0 & (k < l \text{ or } m < n) \\ = 1 & (k = l \text{ and } m = n) \\ = \bar{b}_{kl} \bar{b}_{mn} & (\text{elsewhere}) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、上式に示されている $\bar{D}$ の性質より、4次のテンソル $\bar{D}^{-1}$ が存在する。

ところで、評価量 I_i は $\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k))$ の和で表されている。そこで、 $\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k))$ および $\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k))\mathbf{q}^T(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k))$ に平均操作を施した上式で表せば、 I_i は次のように近似される。

$$\begin{aligned} I_i & \triangleq \sum_{k'=k_i}^{k-1} [y^2(k'+1) - 2y(k'+1) \\ & \quad \times [\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))]\boldsymbol{\theta}_i^T(k') + \boldsymbol{\theta}_i^T(k') \\ & \quad \times [\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))\mathbf{q}^T(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))] \\ & \quad \times \boldsymbol{\theta}_i(k')] \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

(4)式でモデル化したパラメータ $\boldsymbol{\theta}_i(k-1)$ を考慮に入れて、上式を $\Delta\boldsymbol{\theta}_i$ について整理する。これは、 $\Delta\boldsymbol{\theta}_i$ に関して2次形式で表される。従って、評価量 I_i を $\boldsymbol{\theta}_i$ 、すなわち $\Delta\boldsymbol{\theta}_i$ について最小化すれば、パラメータの推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1)$ はほとんど確かに得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1) & = \boldsymbol{\theta} + \Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-k_i)^{m_i} U_1(k-k_i-1) \\ & \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_i & \triangleq \left[\sum_{k'=k_i}^{k-1} [\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))] \right. \\ & \quad \times \mathbf{q}^T(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))] (k' - k_i + 1)^{2m_i-1} \\ & \quad \times \left[\sum_{k'=k_i}^{k-1} [(\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))y(k'+1) \right. \\ & \quad \left. - [\mathbf{q}(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))\mathbf{q}^T(\mathbf{x}_i(k'), \mathbf{u}(k'))]\boldsymbol{\theta}] \right. \\ & \quad \left. \times (k' - k_i + 1)^{m_i} \right] \quad k - k_i \gg L_i \end{aligned}$$

である。上式中の逆行列は、データ数がパラメータ数 (L_i) に比べて十分大きい場合、ほとんど確実に存在する。

得られた $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k)$ は最尤推定量に準じ、周知のように $P(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i | Y_{k-1})$ は漸近的にガウス分布に従う⁽¹¹⁾。また、利用できる観測データは有限であるが、3次以上のモーメントは信頼性が低い⁽¹²⁾。従って、計算量などを考慮して、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ の分布をガウス分布で表す。

$$\begin{aligned} P(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i | Y_{k-1}) & = 1 / \{ (2\pi)^{L_i/2} |A_i|^{-1} \} \\ & \quad \times \exp \{ -1/2 \cdot (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_{i0})^T A_i^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_{i0}) \} \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_{i0} & = E[\hat{\boldsymbol{\theta}}_i | Y_{k-1}] \\ A_i^{-1} & = E \left\{ \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \right)^T \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i} \right\} \end{aligned}$$

である⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽¹¹⁾。

このようにして、仮説した変動モデルに対し、パラメータの推定値が得られる。

〈3.3〉 特性変動の検出 本節では、パラメータの推定値に基づき、(5)式で表される複数個の候補モデルの中から、変動事象を決定する。

いま、仮説した変動事象は付番かつ排反である。そこで、Bayesの定理を用いて、これらの事象 H_i に対する事後確率 $\Pi(i | Y_k)$ を求める。

$$\begin{aligned} \Pi(i | Y_k) & = \Pi(i | Y_{k-1}) \\ & \quad \times \{ P(y(k) | i, Y_{k-1}) / P(y(k) | Y_{k-1}) \} \\ \Pi(i | 0) & = P_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \\ \sum P_i & = 1 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} P(y(k) | i, Y_{k-1}) & = \int P(y(k) | i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i, Y_{k-1}) P(\hat{\boldsymbol{\theta}}_i | Y_{k-1}) d\hat{\boldsymbol{\theta}}_i \\ & \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(y(k) | Y_{k-1}) & = \sum_{i=0}^n \Pi(i | Y_{k-1}) P(y(k) | i, Y_{k-1}) \\ & \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

である。この事後確率 $\Pi(i | Y_k)$ が最大となる事象を生起した事象と考える。

事後確率を具体的に得るためには、(12)式の積分を実行する必要がある。データ数がパラメータ数に比べて十分大きい場合、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1)$ は $\boldsymbol{\theta}_{i0}$ の近傍にあると期待される。そこで、 $P(y(k) | i, Y_{k-1})$ の指数部を $\boldsymbol{\theta}_{i0}$ の周りで2次近似すれば、積分が可能となる⁽¹³⁾。

$$\begin{aligned} P(y(k) | i, Y_{k-1}) & \triangleq 1 / \{ (2\pi)^{1/2} \sigma_i \} \\ & \quad \times \exp \{ -\{y(k) - y_i(k) | \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_{i0}\}^2 / (2\sigma_i^2) \} \\ & \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 & = \sigma_v^2 + \sigma_w^2 + \mathbf{c}_i^T A_i \mathbf{c}_i + \hat{\boldsymbol{\theta}}_i^T(k-1) \Omega_i \hat{\boldsymbol{\theta}}_i(k-1) \\ \mathbf{c}_i^T & = \partial y_i(k) / \partial \boldsymbol{\theta}_i | \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_{i0} \\ \Omega_i & = E[(\hat{\mathbf{c}}_i - \mathbf{c}_{i0})(\hat{\mathbf{c}}_i - \mathbf{c}_{i0})^T] \\ & = B^{-1} \{ E[\mathbf{q}(\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k))\mathbf{q}^T(\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k))] \\ & \quad - E[\mathbf{q}(\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k))] E[\mathbf{q}^T(\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k))] \} B^{-1T} \end{aligned}$$

である。また、 $\boldsymbol{\theta}_{i0}$ は実際には未知であるため、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ の一実現値で置きなおす。従って、過去の故障率から適当な初期確率 P_i を与えれば、各事象の事後確率が(10)式より逐次求められる。

これらの事後確率について、Kullback の情報量お

よび確率の性質から次のことが言える。データ数の増加に伴い、システムの変動と同じモデルの事後確率は1に、他のモデルの事後確率は0に漸近する⁽¹⁴⁾。また、候補モデルの中にシステムの変動と同じモデルが存在しない場合、観測値との二乗平均予測誤差が最も小さいモデルの事後確率が1に、他のモデルの事後確率は0に漸近すると考えられる。

一般に、変動発生時刻は未知の場合が多い。このような場合には、各時刻ごとに可能な変動事象を仮説すれば、時刻の経過と共に膨大な計算量と記憶容量を要する。そのため、十分なデータ数で事後確率が小さくなった変動事象を棄却することが考えられる。そこで、事後確率 $\Pi(i|Y_k)$ および $\Pi(0|Y_k)$ の漸近的性質を知るため、次の量を定義する。

$$\alpha_i(k) \triangleq 1/(k-k_i) \log \{ \Pi(i|Y_k) / \Pi(0|Y_k) \} \quad \dots\dots\dots (15)$$

この $\alpha_i(k)$ は、システム特性が変動していないとき $E(\alpha_i(k)|0)$ に、また i なる変動事象が生じているとき $E(\alpha_i(k)|i)$ に各々漸近する⁽⁸⁾。 $\alpha_i(k)$ を利用したモデルの棄却条件を以下に示す。

- c-1) $\Pi(0|Y_k) > 0.5$
- c-2) $|\alpha_i(k) - E(\alpha_i(k)|0)| \leq |\alpha_i(k) - E(\alpha_i(k)|i)|$
- c-3) $\alpha_i(k) < E(\alpha_i(k)|i) - c \{ \text{var}[\alpha_i(k)|i] \}^{1/2}$

ただし、 c は誤って変動事象を棄却する危険率である。

これらの棄却条件から、モデル更新間隔 h の中で、変動が生じていないと判断できれば時刻 k^* で仮説した変動事象を棄却し、新たに時刻 k^*+h での変動事象を仮説する。逆に、変動が生じていると判断した場合は、事後確率の計算を継続する。なお、モデル更新時の時間間隔 h は、信頼性を考慮して、 $\text{var}[\alpha_i(k)|0]$ が $E(\alpha_i(k)|0)^2$ に比べ十分小さくなるように選ぶ。

しかし、実際の変動は、このように仮説した変動発生時刻 k^*+mh で生じるとは限らない。そこで、その発生時刻を推定することを考える。システム特性に変動を生じたとき、変動しない事象 H_0 の事後確率 $\Pi(0|Y_k)$ が小さくなる。このような変化に着目し、モデル更新間隔 h 内で $\Pi(0|Y_k)$ が 0.5 より小さくなったとき、システムに何らかの変動が生じているものと見なす。この時刻を変動検出時刻 kd と呼ぶ。変動発生時刻 k_0 は、この事後確率が低下し始めた時刻あるいはそれ以前と考えられる。一つは、変動幅が大きく雑音の小さいときのように、パラメータの変動がすぐに確率に現れる場合である。他の一つは、変動幅が小さいかあるいは雑音の大きいときのように、パラメータ

ータの変動が確率に直には現れにくい場合である。これらを考慮して変動発生時刻を推定しよう。事後確率のゆらぎを考慮して、 $\Pi(0|Y_k)$ の N 個の時間平均が低下し始める時刻 k^0 を算出する。そして、時刻 k_n ($=k^0 - ((N-1)/2)$, $k_n \geq k^*$) を変動発生時刻の候補とする。

後者の場合は、変動が生じてから事象 H_0 の事後確率が小さくなるまでの遅れを求めよう。この遅れはパラメータの推定誤差によるものと考えられる。これを検出の遅れ $(kd-k_n)$ およびパラメータ数 (L_i) で表すことにする。従って、もう一つの変動発生時刻の候補 k_m を次式で求める。

$$k_m = k_n - ((kd-k_n) + L_i)$$

以上のように、推定した発生時刻 k_m および k_n の変動事象を仮説することで、より正確にパラメータを推定し、変動事象を検出することが可能である。

4. 実験的考察

〈4.1〉 シミュレーションの概要 本方法の理論的正当性を検証するために、ディジタル・シミュレーションを行った。ここでは、工学、生物、経済などの分野でモデルとしてよく用いられる双線形系および Duffing 形系を対象とする。(1)~(3)式の定義に従い、ベクトル関数 $q(\cdot)$ およびパラメータ $\theta_0(k)$ を次に示す。

(1) 双線形系

$$\begin{aligned} q(\cdot) &= [x(k), x(k-1), u(k), x(k)u(k)]^T \\ \theta_0(k) &= \theta + \Delta\theta_0(k-k_0+1)^{m_0} U_1(k-k_0) \\ \theta &= [0.4, -0.3, 1.0, -0.8]^T \end{aligned}$$

(2) Duffing 形系

$$\begin{aligned} q(\cdot) &= [x(k), x(k-1), u(k), x(k)^2, x(k)^3]^T \\ \theta_0(k) &= \theta + \Delta\theta_0(k-k_0+1)^{m_0} U_1(k-k_0) \\ \theta &= [0.3, -0.7, 1.0, 0.2, 0.02]^T \end{aligned}$$

そこで、突発的な変動を表す跳躍的变化と連続的な変動を表す定速変化および指数状変化を考える。

変動1：跳躍の変動 ($m_0=0$)

$$\theta_0(k) = \theta + \Delta\theta_0 U_1(k-k_0)$$

変動2：定速変動 ($m_0=1$)

$$\theta_0(k) = \theta + \Delta\theta_0(k-k_0+1) U_1(k-k_0)$$

変動3：指数状変動

$$\theta_0(k) = \theta + \Delta\theta_0(\exp\{a(k-k_0+1)\} - 1) U_1(k-k_0)$$

ただし、変動発生時刻および変動幅は、次のとおりである。

*変動発生時刻 k_0

$$(1) \quad k_0 = 50 \quad (k^* + h/4)$$

$$(2) \quad k_0 = 60 \quad (k^* + h/2)$$

k^* : モデル更新時間 h : モデル更新間隔

*変動幅 $\Delta\theta_0$

$$\Delta\theta_0 = \eta\theta$$

変動1 (跳躍的) $\eta = \pm 0.3$

変動2 (定速状) $\eta = \pm 0.005, \pm 0.01, \pm 0.015$

変動3 (指数状) $\eta = 0.05, a = 0.1; \eta = 0.08, a = 0.02$

これらの特性変動に対し、次の変動形態を仮説する。

H_0 : 変動しない事象

H_1 : 跳躍的に変化する形態 ($m_1=0$)

H_2 : 定速状に変化する形態 ($m_2=1$)

H_3 : 定加速度状に変化する形態 ($m_3=2$)

ただし、初期確率 P_i は、 $P_0=0.97, P_i=0.01$ ($i=1, 2, 3$) とする。そこで、仮説した変動事象について、モデルを更新しながらシステムの特性変動を検出する。

更に、変動検出時刻 k_d 後、より正確に変動を知るため、〈3・3〉節の発生推定時刻 k_m, k_n に基づいて変動事象を仮説する。モデル更新時に仮説した $H_1 \sim H_3$ の変動形態に準じて、時刻 k_m で生じる変動事象 (H_1, k_m), (H_2, k_m) および (H_3, k_m) を仮説する。また、時刻 k_n で生じる事象 (H_1, k_n), (H_2, k_n) および (H_3, k_n) も仮説する。この場合、初期確率は時刻 k_n で各変動モデルに等確率 ($P_i=1/7, i=0, \dots, 6$) を与える。

また、入力、遷移雑音および観測雑音として、 $u(k) \sim N(0, 1), w(k) \sim N(0, \sigma_w^2), v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$ および $v(k) \sim N(0, \sigma_v^2)$ なる正規乱数を用いる。雑音の大きさは次のとおりである。

case 1; $\sigma_w = \sigma_v = 0.03, \sigma_v = 0.005$

case 2; $\sigma_w = \sigma_v = 0.1, \sigma_v = 0.01$

case 3; $\sigma_w = \sigma_v = 0.2, \sigma_v = 0.01$

以上の変動事象に対して、数種の乱数系列についてシミュレーションを行う。

〈4・2〉 シミュレーションの結果と考察 前節のシミュレーションの結果について述べ、考察を加える。

初めに、双線形系および Duffing 形系に対して変動モデルを更新するため、その更新間隔 h を決定しよう。そこで、変動していない事象の $\text{var}(\alpha(k)|0)$ を3種の乱数系列について計算する。その結果をそれぞれ図1に示す。これより、信頼性を考慮してこの間隔をともに $h=40$ とする。

まず、変動発生時刻 $k_0=50$ の場合について述べる。変動1 (跳躍的) で case 3 (雑音大) の場合、変動事象の事後確率を図2に示す。双線形系について最大確率の事象のパラメータ推定値を図3に示す。ただし、図中では、変動事象のモデル番号として、便宜上、時刻

図1 $\text{Var}(\alpha(k)|0)$ の一例

Fig. 1. Example of $\text{Var}(\alpha(k)|0)$.

図2 パラメータの跳躍的变化に対する事後確率

Fig. 2. Aposteriori probabilities in case of jumped parameters.

図 3 跳躍的に変化するパラメータの推定値
Fig. 3. Estimates of jumped parameters in bilinear system.

(a) Bilinear system

(b) Duffing system

図 4 パラメータの定速変化に対する事後確率
Fig. 4. A posteriori probabilities in case of constant speed change of parameters.

k_m のモデルを変動形態順に $i=1\sim 3$ とし、時刻 k_n でのモデルを $i=4\sim 6$ としている。図 2 (a) では、 $k^*=40$ でモデルを更新し、 $k_d=51$ で変動を検出している。推定した変動時刻は $k_m=39$, $k_n=47$ である。データ数の増加と共に事象 (H_1, k_n) を選定し、そのパラメータ推定値も真値に漸近している。

次に、変動 2 (定速) の結果について述べる。事後確率を図 4 に、Duffing 形についてパラメータ推定値を図 5 に示す。変動事象に最も近い (H_2, k_n) の確率が 1 に漸近している。

更に、変動 3 (指数状) についても事後確率を図 6 に双線形についてパラメータ推定値を図 7 に示す。この場合、候補モデルの中に同じ変動形態をもつモデルが存在しないが、時間の経過と共に特性が最も近い定加速度状の事象 (H_3, k_n) を選定している。その際、選定した事象のパラメータ推定値も最もよく真値に追従している。

なお、他の乱数系列についても、同様な結果も得ている。

以上 3 種の変動に対し、次のようなことが言える。

図 5 定速で変化するパラメータの推定値
Fig. 5. Estimates of parameters of constant speed change in Duffing system.

図 6 パラメータの指数状変化に対する事後確率

Fig. 6. Aposteriori probabilities in case of exponential change of parameters.

表 1 パラメータの跳躍的变化に対する推定発生時刻および検出データ数

Table 1. Estimated occurrence time and number of data for detection in case of jumped parameters.

(1) 双線形 $\eta=0.3$

case	k_m	k_n	$kd-k_0$	$kc-k_0$
1	36	46	2	13
3	40	49	5	14

(2) Duffing 形 $\eta=0.3$

case	k_m	k_n	$kd-k_0$	$kc-k_0$
1	38	48	2	9
3	45	59	18	25

まず、変動発生時刻 $k_0=50$ 以前では、常に H_0 の事後確率が最大となっており、変動が生じていないと決定している。変動発生後、候補モデル中に正確な変動形態が存在する場合、データ数の増加と共に正しい事象を選定し、パラメータの推定値も真値に漸近している。一方、候補モデルの中に存在しない変動形態が生じて、そのパラメータ推定値が真値に近い事象を選定している。

推定した変動発生時刻 k_m , k_n および正確なまたは

図 7 指数状に変化するパラメータの推定値

Fig. 7. Estimates of exponentially changed parameters in bilinear system.

表 2 パラメータの定速変化に対する推定発生時刻および検出データ数

Table 2. Estimated occurrence time and number of data for detection in case of constant speed change of parameters.

(1) 双線形 $\eta=0.01$

case	k_m	k_n	$kd-k_0$	$kc-k_0$
1	43	54	11	33
2	43	54	11	35
3	49	67	32	42

(2) Duffing 形 $\eta=0.01$

case	k_m	k_n	$kd-k_0$	$kc-k_0$
1	45	54	8	24
2	49	59	15	31
3	47	65	28	52

最も近い事象を選定した時刻 kc の平均値を変動別に表 1~3 に示す。これらの表より、 SN 比が良く変動幅が大きい場合、時刻 k_n での事象を選定している。逆に、 SN 比が悪く変動幅が小さい場合は、遅れを考

表 3 パラメータの指数状変化に対する
推定発生時刻および検出データ数

Table 3. Estimated occurrence time and
number of data for detection in case of
exponential change of parameters.

(1) 双線形 $\eta=0.05, a=0.1$

case	k_m	k_n	$kd-k_0$	$kc-k_0$
1	44	55	12	18
2	42	57	18	28
3	53	67	27	37

(2) Duffing 形 $\eta=0.08, a=0.02$

case	k_m	k_n	$kd-k_0$	$kc-k_0$
1	48	57	11	18
2	50	59	13	25
3	49	61	18	28

慮した時刻 k_m での事象が実際の変動に近い。同様に、 SN 比が良く変動幅が大きいほど、正確なまたは最も近い事象を選定する時刻が早くなっている。

なお、変動発生時刻をモデル更新間隔の中央 ($h/2$) である $k_0=60$ で、同様な特性変動を生起させ変動検出を行っている。これらの場合も、上記と同様な結果が得られている。

以上のことより、汎関数展開可能な非線形系について、本方法により特性変動を検出できることが検証された。

5. 結 言

汎関数展開可能な非線形系を対象とし、未知時刻で発生する特性変動を検出し、そのパラメータを推定する方法を提案した。

まず、特性変動を跳躍的变化および連続的变化でモデル化し、変動発生時刻や変動モードも考慮して、可能な変動事象を仮説する。次に、各モデルのパラメータを最尤法に基づく評価関数より、一意に得ている。これらの事象の事後確率は、Bayes の定理より求めら

れ、この確率が最大となる事象より変動を検出している。その際、事後確率の漸近的性質よりモデルを更新している。なお、変動検出後、より正確に変動事象を知るため、発生時刻を推定している。

シミュレーションの結果から次のことが言える。システムに変動が生じていない場合、仮説した変動事象を確実に棄却している。一方、システムに変動が生じている場合、その変動を検出している。また、候補モデルの中に、その変動事象が存在しない場合、特性の近い変動事象を選定している。

従って、本方法によりシステムの特性変動を検出し、故障を未然に防止することが期待される。

(昭和 62 年 11 月 16 日受付)

文 献

- (1) 渡辺：生産システムの異常診断入門，(昭 58) 日刊工業新聞社
- (2) 江本：「プロセス制御の安全性と高信頼性」，計測と制御，24，331 (昭 60)
- (3) 佐田，他：「設備診断技術の現状と将来」，同上，25，836 (昭 61)
- (4) T. T. Chan & M. B. Adams：「A Sequential Failure Detection Technique and Its Application」，IEEE Trans. Automatic Control, AC-21, 750 (1976)
- (5) 熊丸，他：「複数個の未知ジャンプパラメータを含む非線形系の識別同定法」，計測自動制御学会論，15，422 (昭 54)
- (6) 中溝，他：「システムの統計的故障検知法」，計測と制御，18，471 (昭 54)
- (7) 沖田，他：「統計量の変動検出と原料調合系への適用」，計測自動制御学会論，22，1305 (昭 61)
- (8) 沖田，他：「離散形線形系に対する特性変動の一検出法」，電学論 C，105，211 (昭 60-11)
- (9) E. G. Gilbert：「Functional Expansions for the Response of Nonlinear Differential Systems」，IEEE Trans. Automatic Control, AC-22, 909 (1977)
- (10) 沖田，他：「Kullback の情報量を用いた非線形系の一定定法」，信学論 D，60，655 (昭 52)
- (11) 添田，他：数理統計の基礎と応用，森北出版 (昭 55)
- (12) P. Hougard：「Parametrizations of Nonlinear Models」，J. R. Statist. Soc., B, 44, No. 2, 224 (1982)
- (13) 沖田，他：「Bayes の定理に基づく非線形系の一定定法」，電学論 C，104，149 (昭 59-6)
- (14) 沖田，他：「指数族の分布に従う雑音下での汎関数展開可能な系の同定」，同上 C，7，381 (昭 62-4)