有限整定オブザーバによるデジタル制御

正 員 川 路 茂 保 (熊本大)

1. ま え が き

マイクロコンピュータなどの急速な発達により、現代制御理論がさまざまな産業分野に利用されるようになってきている。とりわけ、メモリー容量の増加や演算の高速化などは眼をみはるものがあり、パソコンが実時間制御のコントローラとして用いられることは数年前には予想だにしなかった。これに伴い、その実現のために従来のアナログ制御に代わるデジタル制御の重要性がますます高くなっている。すなわち、連続時間の制御対象をサンプルして得られたモデルに、単に離散時間系に対する設計手法を適用するばかりでなく、コンピュータのフレキシビリティを念頭においた、新しい線形制御系の設計法の構築が必要となる。この場合、二通りのアプローチが考えられる。一つは多重周期による制御⁽¹⁾、周期係数出力フィードバック制御⁽²⁾、入出力データによる最適出力フィードバック制御⁽³⁾、などのように全く新しい発想によるものである。もう一つは、コンピュータのフレキシビリティを考慮して従来の設計理論の延長上に展開されるものである。前者は新しいタイプの設計法で、従来のものより高機能をもつ可能性がある。これに対して、後者は既に確立されている設計手法を背景に展開されるので制御系に関する豊富な情報がある点に特徴がある。そして、両者の関連が明確にできるならば、従来の設計手法を見直すことができ、更に発展した制御系設計法の体系ができて上と期待される。

本論文は、後者の立場から、レギュレータの基本的設計手法であるオブザーバ+状態フィードバック制御則を、コンピュータのフレキシビリティを背景に再展開し、新しいデジタル制御則へと発展させることにより美多の結果⁽³⁾⁽⁴⁾と等価なものが得られることを示す。なお、議論を簡単にするために、制御対象としては最もデジタル制御を用いる場合が多いと思われる

るメカニカルシステムに限定するが、基本的なことはおさえてあるので一般のシステムへの展開は容易である。

まず、第2章では連続系において線形化したメカニカルシステムを離散化して得られるシステムのもつ性質を示し、基本的設計である状態フィードバックによる有限整定制御と最適制御を述べる。第3章では、状態フィードバック制御を実現するために有限整定オブザーバの設計と、得られた状態の推定値を用いたフィードバックを有限整定制御と最適レギュレータの立場から展開する。そして、オブザーバの推定誤差が整定した後の制御則は美多の提案した補償公式となることを示す。第4章では、従来のオブザーバ理論では利用されなかったサンプル点間の出力情報をも取り入れることにより、未知入力形の有限整定オブザーバが構成される。これから導かれるデジタル制御則は出力情報のみに基づく強安定な補償公式となる。最後に、同様な展開を行って、最小次元の未知入力形有限整定オブザーバにより美多の論文では言及されていない新しい補償公式が導かれる。これは本論文の立場の重要性を示すものと考えられる。

2. メカニカルシステムの性質と基本設計

連続系において、ある平衡点のまわりで線形化したメカニカルシステムは、一般に入出力の次元を p とすると状態変数の次元は $n=2p$ で、次式で表される⁽⁵⁾。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ A_3^* & A_4^* \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^* \end{bmatrix} u(t) \\ \triangleq A_c x(t) + B_c u(t) \dots\dots\dots (1a)$$

$$y(t) = [C_1^* \ 0] x(t) \\ \triangleq C_c x(t) \dots\dots\dots (1b)$$

ただし、 $x \in R^n$ は状態、 $u \in R^p$ は入力、 $y \in R^p$ は出力で、 $\det B_2^* \neq 0$ 、 $\det C_1^* \neq 0$ である。このとき

$$\text{rank}[B_c \ A_c B_c] = n \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{rank}[C_c^T \ A_c^T C_c^T] = n \dots\dots\dots (3)$$

On the Digital Control using Dead-beat Observers. By Shige-yasu Kawaji, Member (Faculty of Engineering, Kumamoto University).

川路茂保：正員，熊本大学工学部電気情報工学科

であるので、システム(1)の可制御指数および可観測指数はともに2である。

このシステムを入力に対するサンプル周期 T の零次ホールドを用いて離散化し、 $x_i = x(iT)$, $y_i = y(iT)$ とおくと

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \dots\dots\dots (4a)$$

$$y_i = Cx_i \dots\dots\dots (4b)$$

となる。ただし、

$$A = e^{AcT}, B = \int_0^T e^{Ac^t} dt \cdot B_c, C = C_c \dots\dots (5)$$

となり、ほとんどすべてのサンプル周期 T に対して

$$\text{rank}[B \ AB] = n \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{rank}[C^T \ A^T C^T] = n \dots\dots\dots (7)$$

が成り立つ⁽⁶⁾。すなわち、離散化されたシステムの可制御指数、可観測指数ともに2である。

以降、システム(4)のレギュレータ問題を考えることにする。状態はシステムの挙動を決定するのに十分な情報量をもつので、すべての状態変数が測定可能な理想的な場合には、状態フィードバック

$$u_i = -Fx_i \dots\dots\dots (8)$$

が最も基本的制御則となる。(8)式を(1)式に代入すると、閉ループ系は

$$x_{i+1} = (A - BF)x_i \dots\dots\dots (9)$$

となり、その解は

$$x_i = (A - BF)^i x_0 \dots\dots\dots (10)$$

となる。(A, B) は可制御であるので、 $A - BF$ の極は任意に設定でき、安定化できる。そして、フィードバックゲイン F の決定法として次の二つがよく知られている。

(1) 有限整定制御 任意の初期状態 x_0 から出発して j 時刻以降状態を零、すなわち $x_i = 0 (i \geq j)$ とする制御で、システム(4)の可制御指数が2であるので、最小の j は2となる。すなわち、

$$(A - BF)^2 = 0 \dots\dots\dots (11)$$

を満たす F が存在する。

<補題1>

(11)式を満たす F は次式で与えられる。

$$F = [0 \ I_p] (B \ AB)^{-1} A^2 \dots\dots\dots (12)$$

(証明) (6)より $W \triangleq (B \ AB)$ は正則行列である。(11)式を展開した式

$$A^2 - ABF - BFA + BFBF = 0$$

の左から $W^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ をかけて $W^{-1}W = I_n$ を用いると

$$V_1 A^2 - FA + FBF = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$V_2 A^2 - F = 0 \dots\dots\dots (14)$$

が得られる。従って、(14)式より

$$F = V_2 A^2 = [0 \ I_p] W^{-1} A^2$$

となり、(12)式が導かれる。上式を(13)式の左辺に代入して $BV_1 + ABV_2 = I_n$, $V_2 AB = I_p$ なる関係式を用いると

$$\begin{aligned} V_1 A^2 - FA + FBF &= V_1 A^2 - V_2 A^2 A + V_2 A^2 B V_2 A^2 \\ &= V_1 A^2 - V_2 A^2 A + V_2 A (I - BV_1) A^2 \\ &= V_1 A^2 - V_2 AB V_1 A^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、(12)式は(13)式も満足する。

Q. E. D.

(ロ) 最適レギュレータ

システム(4)に対して、評価関数

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i\|_Q^2 + \|u_i\|_R^2, \quad Q \geq 0, R > 0 \dots\dots\dots (15)$$

を最小にする入力

$$u_i^* = -F_0 x_i \dots\dots\dots (16)$$

$$F_0 \triangleq (R + B^T P B)^{-1} B^T P \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。ただし、 P はリカッチ方程式

$$\begin{aligned} P &= Q + A^T P A - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} \\ &\quad \times B^T P A \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

の正定解である。また、閉ループ系は安定となることも知られている。ここで、評価関数(15)が

$$J = \|x_0\|_P^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \|u_i + F_0 x_i\|_N^2 \dots\dots\dots (19)$$

$$N \triangleq R + B^T P B \dots\dots\dots (20)$$

と変形されることに注意する。

以上は、すべての状態変数が測定可能であると仮定したが、実際にこの仮定が満たされるとは限らない。次章以降では、測定可能な入出力データをもとに有限整定状態オブザーバを構成し、その推定値に基づくディジタル制御について考察する。

3. 有限整定オブザーバによるディジタル制御

<3.1> 同一次元オブザーバ システム(4)に対して同一次元状態オブザーバを構成し、その推定値を用いたフィードバック制御

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1} = (A - KC)\hat{x}_i + Bu_i + Ky_i \dots\dots (21) \\ u_i = -F\hat{x}_i \dots\dots\dots (22) \end{cases}$$

を考える。これを「制御則Ⅰ」と呼ぶ。

推定誤差を

$$\varepsilon_i \triangleq \hat{x}_i - x_i \dots\dots\dots (23)$$

とすると、(4), (21)式より

$$\varepsilon_{i+1} = (A - KC)\varepsilon_i \dots\dots\dots (24)$$

となる、 (C, A) が可観測であるので $A-KC$ の極は任意に配置可能であるが、可観測指数が2であることに注意すると次の定理が成り立つ。

〔定理1〕 メカニカルシステム(4)に対して、ただか2サンプルの有限整定オブザーバ(21)が存在し、ゲイン K は

$$K = A^2 \begin{bmatrix} CA \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる。

(証明) 補題1と同様にして

$$(A-KC)^2 = 0 \dots\dots\dots (26)$$

から(25)式が得られる。すなわち、(7)より

$$S \triangleq \begin{bmatrix} CA \\ C \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

は正則であるので、 $S^{-1} = (Q_1 Q_2)$ を(26)式の右からかけると

$$A^2 Q_1 - K = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$$A^2 Q_2 - AK + KCK = 0 \dots\dots\dots (29)$$

従って、(28)式より(25)式を得る(このとき(29)式も満足される)。このように K を定めると(24)式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= (A-KC)\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \hat{x}_0 - x_0 \\ \varepsilon_{i+1} &= 0 \quad (i \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

となり、2サンプルで有限整定する。 Q. E. D.

(22), (23)式より

$$u_i = -Fx_i - F\varepsilon_i \dots\dots\dots (31)$$

と表される。よって、閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \varepsilon_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BF & -BF \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \quad (i \geq 1) \dots\dots\dots (32)$$

となり、 $A-BF$ の n 個の極と n 個の原点上の極をもつ。従って、 $(A-BF)^2 = 0$ となるように F を定めると(補題1)、4ステップで有限整定することができる。

また、評価関数(15)を最小にするように制御則Iを定めると、(31)式を(19)式に代入して

$$\begin{aligned} J &= \|x_0\|_P^2 + \|u_0 + F_0 x_0\|_{N^2} + \|u_1 + F_0 x_1\|_{N^2} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \|F_0 A^2 x_i + F_0 A B u_i + F_0 B u_{i+1} \\ &- F A^2 x_i - F A B u_i - F B u_{i+1}\|_{N^2} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

と表されるので、 $F=F_0$ と得られる。このとき、評価関数の劣化量 ΔJ_1 は

$$\Delta J_1 = \|F_0 \varepsilon_0\|_{N^2} + \|F_0 (A-KC)\|_{N^2} \dots\dots\dots (34)$$

となる。ただし、上式の K は定理1で与えられるものである。

以上の結果は線形制御系の設計理論をメカニカルシ

ステムに適用して得られたものである。ところが、(26)式を用いると(21)式より

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= (A-KC)\hat{x}_0 + B u_0 + K y_0 \\ \hat{x}_2 &= (A-KC)\hat{x}_1 + B u_1 + K y_1 \\ &= (A-KC)B u_0 + (A-KC)K y_0 \\ &\quad + B u_1 + K y_1 \\ &\vdots \\ \hat{x}_i &= (A-KC)B u_{i-2} + B u_{i-1} \\ &\quad + (A-KC)K y_{i-2} + K y_{i-1} \end{aligned}$$

そして(30)式より $\hat{x}_i = x_i$ ($i \geq 2$) となるので

$$\begin{aligned} x_i &= (A-KC)B u_{i-2} + B u_{i-1} \\ &\quad + (A-KC)K y_{i-2} + K y_{i-1} \quad (i \geq 2) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

が得られる。従って、オブザーバが有限整定した後は、

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= -F(A-KC)B u_i - F B u_{i+1} \\ &\quad - F(A-KC)K y_i - F K y_{i+1} \quad (i \geq 0) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

と表され、現在の入力力は2サンプル前までの入出力データにより決定できることがわかる。

そこで、制御則Iの代わりに、コンピュータの機能を活かして、2サンプル前までの入出力データを記憶しておくのみで最適な入力決定できる新しいデジタル制御則 I'

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= -G_1 u_i - G_2 u_{i+1} - H_1 y_i - H_2 y_{i+1} \\ &\quad (i \geq 0) \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

を採用することが考えられる。ただし、この場合 $u_0 \sim u_1$ は任意の初期値として取り扱うことになる。また、(36)式と比較して

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} &= F[(A-KC)K \quad K] \\ &= F A^2 \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \\ G_1 &= F(A-KC)B = F A B - H_2 C B \\ G_2 &= F B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

となる。(37)式に(4)、(38)式を代入すると

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= -(G_1 + H_2 C B)u_i - G_2 u_{i+1} \\ &\quad - (H_1 C + H_2 C A)x_i \\ &= -F A^2 x_i - F A B u_i - F B u_{i+1} \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

となるので、閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_{i+1} \\ u_{i+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -F A^2 & -F A B & -F B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

であるので、 $A-BF$ の n 個の極と $2p(=n)$ 個の原

点上の極をもち、制御則Ⅰと同じ極配置である。また、評価関数(15)に(39)式を代入すると最適な F は $F=F_0$ と求められ、劣化量 ΔJ_1 は

$$\Delta J_1 = \|u_0 + F_0 x_0\|_{N^2} + \|u_1 + F_0(Ax_0 + Bu_0)\|_{N^2} \dots (41)$$

となる。

(注) 美多は文献(4)で、制御則Ⅰ'を最初に与え、 G_1, G_2, H_1, H_2 を(40)式の閉ループ系が得られるように定めている。

ここで、制御則Ⅰはフィードバック制御の形であったが、制御則Ⅰ'は直列補償器の形であり、しかも(38)式より明らかなようにパラメータは与えられたプラントにより唯一的に決定されるので補償器自体の安定性(強安定性と呼ばれる)は必ずしも保証されていないことに注意する。

〈3・2〉 最小次元オブザーバ よく知られているように出力情報を利用するとオブザーバの次元を下げられる。更に同一次元オブザーバの場合に2サンプルで有限整定できたことから、1サンプルで有限整定する $(n-p)$ 次元オブザーバを構成し、得られた推定値を用いたフィードバック制御

$$\begin{cases} z_{i+1} = \hat{B}y_i + \hat{J}u_i & \dots (42a) \\ \hat{x}_i = \hat{C}z_i + \hat{D}y_i & \dots (42b) \\ u_i = -Fx_i & \dots (43) \end{cases}$$

を考える。これを「制御則Ⅱ」と呼ぶ。ただし、(42)、(43)式からわかるように現在の出力を用いて現在の入力決定されるので、コンピュータの演算は非常に高速で、演算時間は無視できるものとする。

〔定理2〕 メカニカルシステム(4)に対して1サンプルの有限整定オブザーバ(42)が存在し、そのパラメータは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{B} &= A_2, \quad \hat{J} = [I_{n-p} - A_1]SB \\ [\hat{C} \quad \hat{D}] &= S^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-p} & A_1 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

ただし、 S は(27)式で定義されて

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad CS^{-1} = [0 \quad I_p] \dots (45)$$

(証明) 推定誤差を

$$\xi_i \triangleq z_i - Ux_i \dots (46)$$

と定義すると(4)、(42)式より

$$\xi_{i+1} = (\hat{B}C - UA)x_i + (\hat{J} - UB)u_i \dots (47)$$

$$\hat{x}_i = (\hat{C}U + \hat{D}C)x_i + \hat{C}\xi_i \dots (48)$$

となるので、

$$(i) \quad \hat{B}C = UA \dots (49a)$$

$$(ii) \quad \hat{J} = UB \dots (49b)$$

$$(iii) \quad \hat{C}U + \hat{D}C = I_n \dots (49c)$$

を同時に満たす $U \in R^{(n-p) \times n}$ が存在するならば

$$\xi_{i+1} = 0 \quad (i \geq 0) \dots (50)$$

$$\hat{x}_i = x_i \quad (i \geq 1) \dots (51)$$

となり、システム(42)は1サンプルの有限整定オブザーバとなる。

そこで、メカニカルシステムでは(7)式が成立するので、行列 S で座標変換すると(45)式が得られる。

(iii)を満たすべく $U = [I_{n-p} \quad -A_1]S$ と選ぶと

$$[\hat{C} \quad \hat{D}] = \begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix}^{-1} = S^{-1} \begin{bmatrix} I_{n-p} & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{J} = UB = [I_{n-p} \quad -A_1]SB$$

$$\begin{aligned} \hat{B} &= UA \begin{bmatrix} U \\ C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} = [I_{n-p} \quad -A_1] \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\ &= A_2 \end{aligned}$$

とパラメータが決定される。 Q. E. D.

上述のように最小次元オブザーバを設計するとき、 $\hat{x}_i = x_i + \hat{C}\xi_i$ であるので

$$u_i = -Fx_i - F\hat{C}\xi_i \quad (i \geq 0) \dots (52)$$

となり、閉ループ系は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \xi_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BF & -BF\hat{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \xi_i \end{bmatrix} \quad (i \geq 0) \\ &\dots (53) \end{aligned}$$

と表され、 $A - BF$ の n 個の極と p 個の原点上の極をもつ。従って、 F を(12)式のように選ぶと3サンプルで有限整定する制御が実現される。また、(19)式に(52)式を代入すると

$$\begin{aligned} J &= \|x_0\|_{P^2} + \|F_0 x_0 - Fx_0 - F\hat{C}\xi_0\|_{N^2} \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \|F_0 x_i - Fx_i\|_{N^2} \dots (54) \end{aligned}$$

より評価関数(15)を最小にする最適な F は $F=F_0$ となる。このときの劣化量 ΔJ_1 は

$$\Delta J_1 = \|F_0 \hat{C}\xi_0\|_{N^2} \dots (55)$$

で与えられる。

以上のように、制御則Ⅱのパラメータを決定できたが、(42)、(43)式を用いると

$$\begin{aligned} u_i &= -F\hat{C}\hat{J}u_{i-1} - F\hat{C}\hat{B}y_{i-1} - F\hat{D}y_i \\ &(i \geq 1) \dots (56) \end{aligned}$$

と表せる。(49b)式の左から $\hat{C}$ を、(49c)式の右から A をかけると

$$\hat{C}\hat{J} = \hat{C}UB = B - \hat{D}CB \dots (57)$$

$$\begin{aligned} \hat{C}UA + \hat{D}CA &= \hat{C}\hat{B}C + \hat{D}CA \\ &= [\hat{C}\hat{B} \quad \hat{D}] \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = A \dots (58) \end{aligned}$$

となる。(57)、(58)式を(56)式に代入すると

$$u_i = -F(B - \hat{D}CB)u_{i-1} - FA \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_i \end{bmatrix} \quad (59)$$

なる表現で書ける。このように有限整定後は、現在の入力は現在の出力と1サンプル前の入出力データにより決定される。

そこで、制御則Ⅱの代わりに、新しいデジタル制御則Ⅱ'

$$u_{i+1} = -G_1 u_i - H_1 y_i - H_2 y_{i+1} \quad (i \geq 0) \quad (60)$$

を採用することが考えられる。ただし、 u_0 は任意の初期値として取り扱う。(59)式と比較すると

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix} = FA \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}, \quad G_1 = FB - H_2 CB \quad (61)$$

となる。(60)式に(4)式を代入すると

$$u_{i+1} = -(H_1 C + H_2 CA)x_i - (G_1 + H_2 CB)u_i = -FAx_i - FBu_i \quad (62)$$

となるので、閉ループ系

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ -FA & -FB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ u_i \end{bmatrix} \quad (63)$$

が得られ、 $A - BF$ の n 個の極と p 個の原点上の極をもち、制御則Ⅱと同じ極配置となる。また、評価関数(15)を最小にする F は $F = F_0$ と求められ、劣化量 $\Delta \tilde{J}_{II}$ は

$$\Delta \tilde{J}_{II} = \|u_0 + F_0 x_0\|_{N^2} \quad (64)$$

となる。

(注) 文献(3)では制御則Ⅱ'を先に与えてパラメータを閉ループ系が(63)となるように定めている。

同一次元オブザーバの場合と同様に、 G_1 が唯一に決定されるので制御則Ⅱ'を直列補償公式とみなした場合の強安定性は保証されない。

4. 未知入力形有限整定オブザーバによるデジタル制御

前章で、有限整定オブザーバを用いるフィードバック制御を行うとき、オブザーバが有限整定後は入出力データに基づく新しいデジタル制御とみなすことができることを示した。本章では、よりコンピュータの機能を活かして、入力の切り換え点をサンプル点と考えた場合、各サンプル点間の出力も測定できるとして未知入力形の有限整定オブザーバを設計する。そして得られた推定値を用いたフィードバック制御を考察し、強安定なデジタル制御則となることを示す。

図1に示すように、入力の切り換え点 iT に対して

図1 入出力関係

Fig. 1. Input-output relation.

mT ($0 < m < 1$) だけ進んだ時点での変数 $\tilde{x}_i = x(iT + mT)$, $\tilde{y}_i = y(iT + mT)$ は

$$\tilde{x}_i = \tilde{A}x_i + \tilde{B}u_i \quad (65a)$$

$$\tilde{y}_i = C\tilde{x}_i \quad (65b)$$

$$\tilde{A} = e^{Ac_mT}, \quad \tilde{B} = \int_0^{mT} e^{Ac_\tau} d\tau \cdot B \quad (65c)$$

で表される⁽⁶⁾。 y_i に加えて $\tilde{y}_i$ も測定可能とすると、制御対象は

$$\begin{cases} x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \end{cases} \quad (66a)$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_i = \tilde{C}x_i + \tilde{D}u_i \end{cases} \quad (66b)$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_i \triangleq \begin{bmatrix} y_i \\ \tilde{y}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ CB \end{bmatrix} \end{cases} \quad (66c)$$

となる。ところが、ほとんどすべての $mT \neq 0$ に対して $\det C\tilde{B} \neq 0$ であるので⁽³⁾、(66)式より u_i は $\tilde{y}_i$ と x_i の情報から決定できる。このことは未知入力形オブザーバが構成できることを示唆する。

〈4.1〉 同一次元オブザーバ システム(66)に対して、未知入力形オブザーバによるフィードバック制御

$$\dot{\hat{x}}_{i+1} = (A - K\tilde{C})\hat{x}_i + K\tilde{y}_i \quad (67)$$

$$u_i = -F\hat{x}_i \quad (68)$$

を考える。これを「制御則Ⅲ」と呼ぶ。

〔定理3〕 メカニカルシステム(4)においてサンプル点間の出力が測定可能ならば、2サンプルで有限整定する未知入力オブザーバ(67)が存在し、 K は

$$[(A - K\tilde{C})K \quad K]M = [A^2 \quad AB \quad B] \quad (69)$$

ただし、

$$M = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ C\tilde{A} & C\tilde{B} & 0 \\ CA & CB & 0 \\ C\tilde{A}\tilde{A} & C\tilde{A}\tilde{B} & C\tilde{B} \end{bmatrix} \quad (70)$$

の解で与えられる。

(証明) 推定誤差を $\varepsilon_i \triangleq \hat{x}_i - x_i$ とすると(66)、(67)式より

$$\varepsilon_{i+1} = (A - K\tilde{C})\varepsilon_i + (K\tilde{D} - B)u_i \quad (71)$$

となるので、パラメータ K を

$$(i) \quad (A - K\bar{C})^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (72a)$$

$$(ii) \quad K\bar{D} = B \quad \dots\dots\dots (72b)$$

を同時に満足するように定めると

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= (A - K\bar{C})\varepsilon_0 \\ \varepsilon_{i+2} &= 0 \quad (i \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (73)$$

と、2サンプルで有限整定する。次に(i), (ii)を同時に満足する K を求めると、条件(i)より

$$A^2 = (A - K\bar{C})K\bar{C} + K\bar{C}A$$

また、条件(ii)と $(A - K\bar{C})(K\bar{D} - B) = 0$ に注意すると

$$[(A - K\bar{C})K \quad K] \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{D} & 0 \\ \bar{C}A & \bar{C}B & \bar{D} \end{bmatrix} = [A^2 \quad AB \quad B]$$

すなわち、(69)式を得る。残る問題は(69)式の解の存在性であるが、文献(3)より係数行列 M はほとんどすべての $mT \neq 0$ について正則であるので、 K は唯一に決定される。 Q. E. D.

以上のようにオブザーバが設計されると、(73)式が成り立つので閉ループ系は

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \varepsilon_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF & -BF \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \quad (i \geq 1) \quad \dots\dots\dots (75)$$

で、当然のことながら制御則 I と同じダイナミクスとなる。また、

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 &= (A - K\bar{C})\hat{x}_0 + K\bar{y}_0 \\ \hat{x}_{i+2} &= (A - K\bar{C})K\bar{y}_i + K\bar{y}_{i+1} \quad (i \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (76)$$

従って、有限整定後は

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= -F(A - K\bar{C})K\bar{y}_i - FK\bar{y}_{i+1} \\ &= -F(A - K\bar{C})K \begin{bmatrix} y_i \\ \bar{y}_i \end{bmatrix} - FK \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ \bar{y}_{i+1} \end{bmatrix} \\ &\quad (i \geq 0) \quad \dots\dots\dots (77) \end{aligned}$$

となり、現在の入力が2サンプル前までのサンプル点ならびにサンプル点の出力のみにより決定されることがわかる。

そこで、制御則 III の代わりに新しいディジタル制御則 III'

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= -H_1 y_i - H_2 y_{i+1} - P_1 \bar{y}_i - P_2 \bar{y}_{i+1} \\ &\quad (i \geq 0) \quad \dots\dots\dots (78) \end{aligned}$$

を採用することができる。ただし、 $u_0 \sim u_1$ は任意の初期値とする。(77)式との比較により

$$[H_1 \quad P_1] = F(A - K\bar{C})K, \quad [H_2 \quad P_2] = FK \quad \dots\dots\dots (79)$$

となる。また、(78)式に(66)式を代入すると

$$u_{i+2} = -(H_1 C + H_2 CA + P_1 C \bar{A}$$

$$\begin{aligned} &+ P_2 C \bar{A} A)x_i - (P_1 C \bar{B} + H_2 C B \\ &+ P_2 C \bar{A} B)u_i - P_2 C \bar{B} u_{i+1} \\ &= -FA^2 x_i - FABu_i - FBu_{i+1} \\ &\quad \dots\dots\dots (80) \end{aligned}$$

と(39)式と同じものが得られる。

ここで注意すべきは、制御則 III' は出力データのみを用いているので強安定な直列補償公式となっていることである。美多は⁽³⁾、(78)式のかわりに

$$\begin{aligned} u_{i+2} &= -G_1 u_i - G_2 u_{i+1} - H_1 y_i - H_2 y_{i+1} \\ &\quad - P_1 \bar{y}_i - P_2 \bar{y}_{i+1} \quad (i \geq 0) \quad \dots\dots\dots (81) \end{aligned}$$

を与えて G_1, G_2 が自由パラメータとなるように他のパラメータを決定しているが、本章のはじめに述べたように u_i は $\bar{y}_i$ と x_i により決定できるので(81)式の u_i, u_{i+1} の項は冗長項となることは明らかである。

〈4・2〉 最小次元オブザーバ 第3章での議論と同様に、出力情報 $\bar{y}_i$ を有効に用いて最小次元オブザーバによるフィードバック制御

$$\begin{cases} z_{i+1} = \hat{B} \bar{y}_i \quad \dots\dots\dots (82a) \\ \hat{x}_i = \hat{C} z_i + \hat{D} \bar{y}_i \quad \dots\dots\dots (82b) \\ u_i = -F \hat{x}_i \quad \dots\dots\dots (83) \end{cases}$$

を考える。これを「制御則 IV」と呼ぶ。

(定理4) メカニカルシステム(4)においてサンプル点間の出力が測定可能ならば、1サンプルで有限整定する未知入力オブザーバ(82)が存在し、そのパラメータは、

$$[\hat{C} \hat{B} \quad \hat{D}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C \bar{A} & C \bar{B} \\ CA & CB \end{bmatrix} = [A \quad B], \quad \hat{D} = [\hat{D}_1 \quad 0] \quad \dots\dots\dots (84)$$

により与えられる。

(注) $\hat{C}, \hat{B}$ はその積が(84)式を満足するものであれば任意である。

(証明) $\xi_i = z_i - Ux_i$ とおくと(66), (82)式から

$$\xi_{i+1} = (\hat{B}\bar{C} - UA)x_i + (\hat{B}\bar{D} - UB)u_i \quad \dots\dots\dots (85)$$

$$\hat{x}_i = (\hat{C}U + \hat{D}\bar{C})x_i + \hat{D}\bar{D}u_i + \hat{C}\xi_i \quad \dots\dots\dots (86)$$

となるので、次の条件

$$(i) \quad \hat{B}\bar{C} = UA \quad \dots\dots\dots (87a)$$

$$(ii) \quad \hat{B}\bar{D} = UB \quad \dots\dots\dots (87b)$$

$$(iii) \quad \hat{C}U + \hat{D}\bar{C} = I_n \quad \dots\dots\dots (87c)$$

$$(iv) \quad \hat{D}\bar{D} = 0 \quad \dots\dots\dots (88d)$$

を同時に満たす $U \in R^{(n-p) \times n}$ が存在するならば、 $\hat{x}_i = x_i$ ($i \geq 1$) が成り立つので、システム(82)は1サンプルの有限整定オブザーバとなる。ここで、 $\hat{D} = [\hat{D}_1 \quad \hat{D}_2]$ とおき、 $C\bar{B}$ が正則であることを考慮すると

(88 d)式より $\hat{D}_2=0$ を得る。また、(87 c)式の右から A, B をかけて (87 a)式を用いると

$$\hat{C}UA + \hat{D}CA = \hat{C}\hat{B}\hat{C} + \hat{D}CA = A$$

$$\hat{C}UB + \hat{D}CB = \hat{C}\hat{B}B + \hat{D}CB = B$$

となるので、

$$(\hat{C}\hat{B} \ \hat{D}_1) \begin{bmatrix} C & 0 \\ C\hat{A} & C\hat{B} \\ CA & CB \end{bmatrix} = (A \ B) \dots\dots (89)$$

を得る。左辺の係数行列は (70)式の行列 M と $C\hat{B}$ の正則性より正則となるので、(89)式より $\hat{C}\hat{B}, \hat{D}_1$ が決定される。 Q. E. D.

以上のようにオブザーバが設計されると、閉ループ系は制御則Ⅱと同じダイナミクスとなり、また、

$$\hat{x}_i = \hat{C}\hat{B}\hat{y}_{i-1} + \hat{D}\hat{y}_i \dots\dots\dots (90)$$

従って、有限整定後は

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= -F\hat{C}\hat{B}\hat{y}_{i-1} - F\hat{D}\hat{y}_i \\ &= -F\hat{C}\hat{B}\hat{y}_{i-1} - F\hat{D}_1\hat{y}_i \quad (i \geq 0) \dots\dots (91) \end{aligned}$$

となり、現在の入力 u_i は現在の出力と1サンプル前のサンプル点およびサンプル点間の出力で決定される。そこで、新たにディジタル制御則Ⅳ'

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= -H_1\hat{y}_i - H_2\hat{y}_{i-1} - P_1\hat{y}_i \quad (i \geq 0) \\ &\dots\dots\dots (92) \end{aligned}$$

または G_1 を自由パラメータとして

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= -G_1u_i - H_1\hat{y}_i - H_2\hat{y}_{i+1} - P_1\hat{y}_i \quad (i \geq 0) \\ &\dots\dots\dots (93) \end{aligned}$$

を考えることができる。ただし、 u_0 は任意の初期値とする。この制御則Ⅳ'に関する設計論は制御則Ⅰ'～Ⅲ'の場合と同様に展開できるので省略する。

なお、制御則Ⅳ'はこれまで美多の論文でも言及されていない形であるが、制御則Ⅲ'の延長上にあるとの解釈も成り立つ。しかし、導出の過程からわかるように、従来の設計論を見直すことにより得られた点は重要と思われる。

5. あとがき

本論文では、コンピュータのフレキシビリティを念頭において従来の設計論を再展開することにより新しいディジタル制御則へと発展させる問題を考察した。その一例として、メカニカルシステムに対するオブザーバ+状態フィードバックによるレギュレータ問題を扱った。有限整定オブザーバあるいはサンプル点間の出力データを利用した未知入力形有限整定オブザーバが構成され、有限整定後は過去の入出力データのみにより現在の入力 u_i が決定できるディジタル制御則となることを示した。そして、未知入力形オブザーバに基づくディジタル制御則は強安定性をもつことが明らかになった。従来、有限整定オブザーバとレギュレータの設計が個々に研究されてきたのに対して、本論文のような統一のアプローチは重要と思われる。

今後の問題として、メカニカルシステム以外のシステムへの拡張、ロバスト性の検討などがある。また、サーボ問題など他の設計理論もコンピュータを有効に使うことを前提に再検討する価値があると考えられ、現在研究中である。

(昭和62年7月27日受付, 同62年11月16日再受付)

文 献

- (1) M. Araki et al.: "Pole assignment by multirate sampled-data output feedback", *Int. J. Control* **44**, 6, 1661 (1986)
- (2) T. Kaczorek: "Pole assignment for linear discrete-time systems by periodic output control", *Systems and Control Letters* **6**, 267 (1985)
- (3) 美多, 他: 「新しいディジタル最適出力フィードバック制御とメカニカルシステムの制御への応用」, 計測自動制御学会論文集, **22**, 12, 1262 (昭 61)
- (4) 劉, 他: 「ロボットのディジタル最適出力フィードバック制御」, 第4回日本ロボット学会学術講演会予稿集, 51 (昭 61)
- (5) 古田, 他: メカニカルシステム制御 (昭 59) オーム社
- (6) 美多: ディジタル制御理論 (昭 59) 昭晃堂