形式的線形化法の誤差限界について

正 員 高 田

等 (九州工業大)

1. まえがきと主結果

非線形システム

$$\Sigma_1: \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{D} \subset R^n$$

は形式的線形化法により線形システム

$$\Sigma_2: \dot{Z}(t) = AZ(t) + b \quad Z(0) = \phi(x_0) \in R^L$$

へ変換され、その解は Σ_2 の解から $x(t) = \phi^{-1}(Z(t))$ として求まる。ただし、 ϕ は関係式 $(D\phi(x))f(x) = A\phi(x) + b$ を満たす解関数であり⁽¹⁾⁽²⁾、 $n \leq L$ のとき $f(x) = (D\phi(x)^T D\phi(x))^{-1} (D\phi(x)^T (A\phi(x) + b))$ である。ここで $\cdot \triangleq d/dt$, f : 非線形ベクトル値関数, $\mathcal{D}$: 定義域, $A \in R^{L \times L}$, $b \in R^{L \times 1}$, $D \triangleq \partial/\partial x^T$, $\|X\|^2 = t^T X^T X$, T : 転置, $\triangleq$: 定義, -1 : 逆写像, $\wedge$: 近似, の記号を表す。

さて、近似が導入されたときの誤差伝播を知ることは適用上重要であり、本稿では形式的線形化法の統一的な誤差限界式を導出する。 ϕ の近似関数 $\hat{\phi}$ が用いられたときの、形式的線形化法による解は

$$\begin{aligned} \Sigma_3: \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{f}(\hat{x}(t)) \quad \hat{x}_0 = \hat{\phi}^{-1}(\hat{\phi}(x_0)) \in R^n \\ \hat{f}(\hat{x}) &= (D\hat{\phi}(\hat{x})^T D\hat{\phi}(\hat{x}))^{-1} (D\hat{\phi}(\hat{x})^T (A\hat{\phi}(\hat{x}) + b)) \end{aligned} \quad (1)$$

の解と等価である。よって次が得られる⁽³⁾。

$$\begin{aligned} \text{[誤差限界]} \quad f \text{ と } \hat{f} \text{ が } \mathcal{D} \text{ 上 } C^1 \text{ 級関数のとき} \\ \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| e^{Kt} + \varepsilon(e^{Kt} - 1)/K \end{aligned} \quad (2)$$

である。ただし

$$K = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|Df(x)\|, \quad \varepsilon = \sup_{x \in \mathcal{D}} \|f(x) - \hat{f}(x)\| \dots (3)$$

(証明) Σ_1 の解と Σ_3 の解の差は

$$\begin{aligned} x(t) - \hat{x}(t) &= (x_0 - \hat{x}_0) + \int_0^t (f(x) - \hat{f}(\hat{x})) d\tau \\ &\quad + \int_0^t (f(\hat{x}) - \hat{f}(\hat{x})) d\tau \end{aligned}$$

2項に平均値の定理を適用し、両辺のノルムをとり、(3)式を用いれば

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \int_0^t K \|x - \hat{x}\| d\tau + \varepsilon t$$

これは Gronwall の不等式⁽³⁾なので (2) 式が得られる。

2. 例題とまとめ

具体例 $\Sigma_1: \dot{x} = f(x) \triangleq x^2$, $x_0 = \hat{x}_0 \in \mathcal{D} \subset R$ ($n=1$) に対し、次の2種の形式的線形化法 (<1法>: 論文[1] 2章, <2法>: 論文[2] 5章) の誤差限界を調べる。

On an Error Bound of the Formal Linearization Method. By Hitoshi Takata, Member (Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology).

高田 等: 正員, 九州工業大学工学部情報工学科

<1法> $\hat{\phi}$ として N 次多項式列の

$\hat{\phi}_N(x) = [x, x^2/2!, \dots, x^r/r!, \dots, x^N/N!]^T$ ($L=N$) を選べば, $(D\hat{\phi}_N(x))x^2 \triangleq A\hat{\phi}_N(x) + b$ より

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 2 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & 0 & N-1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

である。ただし $\{a_i\}$ はテーラー展開, またはフーリエ直交多項式展開による x^{N+1} の N 次近似式: $x^{N+1} \triangleq$

$T(x^{N+1}) \triangleq \sum_{i=0}^N a_i x^i / i!$ の係数である。このとき (1) 式から, $|f(x) - \hat{f}(x)| = |(x^{N+1} - T(x^{N+1})) x^{N-1} / \{(N-1)!\}^2 \sum_{i=0}^{N-1} (x^i / i!)^2|$ よって $|y \triangleq x^{N-1} / (N-1)!|$, $|y / (1 + y^2)| \leq 1/2$ を用いれば $|f(x) - \hat{f}(x)| \leq |x^{N+1} - T(x^{N+1})| / 2((N-1)!)^2$ となる。 $x_0 = \hat{x}_0$ と $K = \sup_{x \in \mathcal{D}} 2|x|$ から (2) 式は

$$|x(t) - \hat{x}(t)| \leq \sup_{x \in \mathcal{D}} |x^{N+1} - T(x^{N+1})| (e^{Kt} - 1) / 2K((N-1)!)^2$$

すなわち, $\lim_{N \rightarrow \infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0$ である。これは論文

[1] 付録Bの結果を包含している。

<2法> $\mathcal{D} = (0.45, 0.55)$, $x_0 = \hat{x}_0 = 0.5$, $A = -1$, $b = 0$ ($L=n=1$) とする。 $\phi(x)$ を $x = 0.5$ のまわりのテーラー級数表現の $\phi(x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \bar{x}^r (\bar{x} \triangleq x - 0.5)$ とおき $(D\phi(x))x^2 = -\phi(x)$ を満たすように係数 $\{\alpha_i\}$ を低次から決めていく。 N 次近似式は $\hat{\phi}_N(x) = 1 + \sum_{r=1}^N \alpha_r \bar{x}^r$, ただし α_r が $r=1, 2, 3, \dots$ の順に $-4, 16, -58.7, 202.7, -669.9, \dots$ となった。従って, (2) 式の誤差限界は $|x(t) - \hat{x}(t)| \leq \varepsilon_N (e^{1.1t} - 1) / 1.1$, ただし ε_N が $N=1, 2, 3, \dots$ の順に $0.1, 0.05, 0.009, 0.002, 0.0004, \dots$ である。なお, 計算機数値実験からも, 各 N と $t(1 \leq N \leq 5, 0 \leq t \leq 0.1)$ について, 本不等式の成立が確かめられた。

以上, 形式的線形化法の各種計算手法に依存しない統一的な誤差限界式が導出された。誤差限界の知識は, 応用上最良な手法や $\hat{\phi}_N$ の選択, および適用範囲の制限などに有効な情報となるであろう。

(昭和62年9月4日受付)

文 献

- (1) H. Takata: "Transformation of a Nonlinear System into an Augmented Linear System", *IEEE Trans. Automatic Control* **24**, 5, 736 (1979)
- (2) 高田: 「非線形システムに対する非線形逆関数形の形式的線形化法」, 電学論C, **105**, 9, 177 (昭 60-9)
- (3) 竹之内: 常微分方程式 (昭 52-2) 秀潤社