最小二乗推定における数値的不安定性

正 員 和 田 清 (九 州 大)
 非会員 矢 野 寿一郎 (九 州 大)
 正 員 江 口 三代一 (久留米工大)
 正 員 相 良 節 夫 (九 州 大)

1. ま え が き

システム同定の分野において最小二乗法は最も基本的な同定手法である⁽¹⁾⁽²⁾。最近、同定対象の構造や次数が既知で可同定性の条件が満たされ、一致推定値が得られる理想的な条件のもとでも、最小二乗法の正規方程式の係数行列が正則でなく解が不定になったり、推定誤差が大きくなったりする数値的な不安定性の問題が議論されている^{(3)~(5)}。このような現象は対象システムの極が単位円近くにある場合に起こることが、係数行列の条件数が大きくなることによって説明されている⁽³⁾。また、このような悪条件を考慮した最小二乗推定法も提案されている⁽⁶⁾。

離散時間システムのデータ生成モデルとして、通常 ARX モデルと伝達関数モデルがある⁽⁶⁾。物理的なシステムを記述する場合は後者の伝達関数モデルがよく用いられる。しかしながら、数値的不安定性の問題に対する今までの議論は、雑音がない場合か、あるいは雑音を考慮したシステムのモデルとして ARX モデルを用いた場合を対象としており、伝達関数モデルの場合に対する研究は見あたらないようである。

本論文では、ARX モデルと伝達関数モデルを统一的に取扱い、システムの極の位置および雑音構造の違いが正規方程式の係数行列の正則性に及ぼす影響を解析的に考察し、シミュレーションによって検証している。まず、雑音がない場合について正規方程式の係数行列の漸近的な性質を検討するため、単位パルス応答

列を用いた係数行列の陽表現を導いた。この表現を用いて2次および4次のシステムについて、シミュレーションにより係数行列が悪条件となり推定値に大きな変動が現れる条件を調べた。この結果、極が単位円に近いだけでなく出力の相関関数の絶対値の減衰が小さい場合⁽⁵⁾すなわち、極が $z = \pm 1$ に近い場合に悪条件となるということがわかった。次いで、雑音が存在する場合について、ARX モデルおよび伝達関数モデルによるシステムのパラメータを用いて係数行列の陽表現を与えた。この陽表現はシステム固有の特徴を表す部分と雑音の特徴を表す部分から成り立っている。前者によって雑音がない場合に述べた推定値に変動が現れる条件が、理論的に説明でき、後者によって二つのモデルから生成されるデータの持つ雑音特性が係数行列に及ぼす影響を雑音の共分散行列を用いて表現できる。これらを検証するためにシミュレーションによって数値的に考察した。この結果、ARX モデルから得られるデータによる係数行列はシステム自身の悪条件を継承するが、伝達関数モデルからのデータによる場合は、雑音の存在のために、推定値にバイアスを持つ代わりに雑音が存在しない場合に比べ悪条件が軽減されることがわかった。

2. 最小二乗法によるパラメータ推定⁽⁷⁾

同定対象から得られた入出力のデータに次のパラメトリックなモデルを当てはめる。

$$\eta_k = \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})} u_k \dots \dots \dots (1)$$

ここで、入力 u_k は k 時刻での入力、 η_k はモデルの出力である。また、 z^{-1} は $z^{-1}u_k = u_{k-1}$ なる遅延演算子であり、 z^{-1} の多項式 $\hat{A}, \hat{B}$ は次式で定義される。

$$\hat{A}(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$\hat{B}(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}$$

On the Numerical Instability for the Least-Squares Estimation.
 By Kiyoshi Wada, Member, Juichiro Yano, Non-member
 (Faculty of Engineering, Kyushu University), Miyoichi Eguchi,
 Member (Kurume Institute of Technology) & Setsuo Sagara,
 Member (Faculty of Engineering, Kyushu University).

和田 清: 正員, 九州大学工学部電気工学科

矢野寿一郎: 非会員, 九州大学工学部電気工学科

江口三代一: 正員, 久留米工業大学電子情報工学科

相良節夫: 正員, 九州大学工学部電気工学科

ここで、次数 n はあらかじめわかっているものとする。いま、観測出力を y_k で表すと、式誤差 ξ_k は

$$\xi_k = \hat{A}(z^{-1})y_k - \hat{B}(z^{-1})u_k = y_k - p_k^T \hat{\theta} \quad \dots\dots\dots (2)$$

のように定義される。ただし

$$p_k = [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}]^T \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n]^T \quad \dots\dots\dots (4)$$

最小二乗法によるパラメータ推定は、この式誤差の二乗和

$$J = \sum_{k=n+1}^N \xi_k^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

を評価関数とし、これを最小にする $\hat{\theta}$ をパラメータの推定値として求めることであり、次の正規方程式

$$\left[\sum_{k=n+1}^N p_k p_k^T \right] \hat{\theta} = \sum_{k=n+1}^N p_k y_k \quad \dots\dots\dots (6)$$

を解くことに帰着する。

3. 観測雑音がない場合

前節で述べたように、最小二乗推定値は(6)式の正規方程式と呼ばれる連立一次方程式を解くことによって得られる。良く知られているように、連立一次方程式の解が数値的に精度良く求められるかどうかは、この方程式の係数行列の条件数に依存する。そこで、本節では、同定の対象となるシステムが

$$y_k = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u_k \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}$$

で表されると仮定して、正規方程式の係数行列の漸近的な性質を検討することにする。ここで、入力 u_k は平均0、分散 σ_u^2 の白色雑音系列とする。この条件の下で理想的には最小二乗推定値 $\hat{\theta}_N$ は $N \geq 2n$ に対してパラメータの真値

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T \quad \dots\dots\dots (8)$$

を与える。

最小二乗推定値は(6)式の正規方程式を解くことで得られるので正規方程式について調べてみる。(6)式の極限を次式で表す。

$$M \hat{\theta}_\infty = m \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=n+1}^N p_k p_k^T : 2n \times 2n \quad \dots\dots (10)$$

$$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=n+1}^N p_k y_k : 2n \times 1 \quad \dots\dots (11)$$

である。(9)式より行列としての M の性質が正規方程式を解く上で問題となることがわかる。いま、ベクトル y_k, u_k を

$$y_k = [y_{k-1}, \dots, y_{k-n}]^T, \quad u_k = [u_{k-1}, \dots, u_{k-n}]^T$$

と定義すると、 $p_k = [-y_k^T, u_k^T]^T$ であることから

$$M = \begin{bmatrix} E(y_k y_k^T) & -E(y_k u_k^T) \\ -E(u_k y_k^T) & E(u_k u_k^T) \end{bmatrix} \quad \dots\dots (12)$$

となる。入力 u_k は白色雑音であるから

$$E(u_k u_k^T) = \sigma_u^2 I$$

であり、 $E(y_k y_k^T) = \sigma_u^2 G$ 、 $E(y_k u_k^T) = \sigma_u^2 \Gamma$

とおけば、 M は

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \Gamma & -\sigma_u^2 G \\ -\sigma_u^2 G^T & \sigma_u^2 I \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \Gamma & -G \\ -G^T & I \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

と表される。 $\{g_i\}, i=1, 2, \dots$ をシステムの単位パルス応答列とすると $y_k = \sum_{i=1}^{\infty} g_i u_{k-i}$ であるから、 G, Γ は各々次のようになる。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{n-1} \\ \cdot & 0 & g_1 & \dots & g_{n-2} \\ \cdot & \cdot & 0 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 γ_j は $\gamma_j = E(y_k y_{k-j})$ と定義される y_k の自己相関関数であり、 $\{g_i\}$ を用いて

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{\infty} g_i g_{i+j} \quad \dots\dots\dots (16)$$

と表される。また、 m も同様に

$$m = \begin{bmatrix} -E(y_k y_k) \\ E(u_k y_k) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (17)$$

と表されるから $E(y_k y_k) = \sigma_u^2 m_1$ 、 $E(u_k y_k) = \sigma_u^2 m_2$ とおくことにより

$$m = \begin{bmatrix} -\sigma_u^2 m_1 \\ \sigma_u^2 m_2 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} -m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。 m_1, m_2 も単位パルス応答列を用いて表すことができ

$$m_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \gamma_n \end{bmatrix}, \quad m_2 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

である。

以上のように、行列 M およびベクトル m の成分はすべて単位パルス応答列で表現できる。従って、正規方程式の性質はシステムの単位パルス応答列から検討できる。まず、システムの極が単位円付近にあり係数行列が悪条件になる⁽³⁾⁻⁽⁵⁾場合について単位パルス応答列 $\{q_i\}$ を見てみる。ここで同定対象として次のような二次システムを用いる。

(1) : 共役複素根の場合

$$a_1 = -1.723, a_2 = 0.990025, b_1 = 1.0, b_2 = 0.3$$

極の位置は図1において $r = 0.995, \phi = 30^\circ$ に相当

(2) : 重根の場合

$$a_1 = -1.99, a_2 = 0.99025, b_1 = 1.0, b_2 = 0.3$$

図1 システムの極と零点(2次)

Fig. 1. Poles and zeros of the 2nd order system.

(a) 共役根の場合

(b) 重根の場合

図2 単位パルス応答列

Fig. 2. Unit-pulse response series.

(a) 共役根の場合

(b) 重根の場合

図3 最小二乗推定値(2次)

Fig. 3. Least squares estimates of the 2nd order system.

極の位置は図1において $r = 0.995, \phi = 0^\circ$ に相当

システム(1),(2)の単位パルス応答列を図2に示す。図2(a)から(1)の場合単位パルス応答列は周期的に変化しており、その減衰は非常に遅くいつまでも0にならないことがわかる。図2(b)の(2)の場合では、単位パルス応答列は著しく長くのびており、出力 y_k の自己相関の減衰は小さく、 $\gamma_0 = 5.23533 E + 06, \gamma_1 = 5.23485 E + 06, \gamma_2 = 5.23409 E + 06$ でほぼ等しいと考えられる。

計算機シミュレーションによるシステム(1),(2)の最小二乗推定値を図3に示す。ただし、横軸にデータ個数をとっているため繰返しアルゴリズムを用いた結果にみえるが、本論文ではデータ個数ごとにオフライン計算により求めている。また、このときの $N = 3,000$ における係数行列 M およびベクトル m は表1のようになっている。システム(1)の場合、推定値は真値に一致している。しかし、システム(2)の場合は推定値に大きな誤差が見られ、推定不能の状態となることさえある。このことは係数行列 M の値を見ればわかるように、 $\gamma_0 \approx \gamma_1$ となっているために行列の正則性が失われたのが原因である。同じことを $r = 0.995$ 一定、 ϕ を変化させて行ったが、このように推定値の変動が観測されたのは $\phi = 0^\circ$ 、すなわち重根の場合の

表 1 係数行列 M とベクトル m の値
Table 1. Coefficient matrix M and vector m .

表 1 (a) システム (1) の場合

係数行列 M				m
2.750E+2	2.378E+2	6.313E-1	-3.184E-1	-2.379E+2
2.378E+2	2.749E+2	4.121E-1	6.320E-1	-1.369E+2
6.313E-1	4.121E-1	1.001E+0	8.608E-3	3.243E-1
-3.184E-1	6.320E-1	8.608E-3	1.002E+0	1.483E+0

表 1 (b) システム (2) の場合

係数行列 M				m
9.790E+6	9.790E+6	-1.348E+2	-1.355E+2	-9.791E+6
9.790E+6	9.790E+6	-1.349E+2	-1.346E+2	-9.790E+6
-1.348E+2	-1.349E+2	1.001E+0	8.608E-3	1.358E+2
-1.355E+2	-1.346E+2	8.608E-3	1.002E+0	1.367E+2

表 2 自己相関関数および行列 M の条件数
Table 2. Autocorrelation function and the condition number of M .

ϕ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
r_0	1.647E+6	686.9	72.9	40.7	72.9	686.9	1.647E+6
r_1	1.646E+6	603.0	37.0	0.0	-37.0	-603.0	-1.646E+6
r_2	1.640E+6	375.0	-34.1	-39.8	-34.1	375.0	1.640E+6
r_3	1.631E+6	65.8	-69.4	0.0	69.4	-65.8	-1.631E+6
条件数	8.438E+8	97840	3049	847	3049	97840	8.438E+8

みであった。

次に対象システムとして 4 次システムを考える。このシステムは原点に近い 1 次の零点を持ち、極は 2 組の複素共役根が互いに重なっていて、 $r=0.9$ 一定で ϕ を 0° から 180° まで 30° きざみで変化させる。各システムの出力の自己相関関数の理論値を表 2 に、最小二乗推定値 $\hat{a}_1$ を図 4 に示す。推定値の変動は $\phi=90^\circ$ の場合を中心に対称性が見られる。 $\phi=90^\circ$ のとき推定値は真値に一致しているが極が実軸に近づくにつれ変動は激しくなっている。出力の自己相関も $\phi=90^\circ$ を中心にして絶対値が対称となっており、実軸に近づくにつれ絶対値の減衰の割合が小さい。つまり自己相関関数の絶対値の減衰が小さいほど最小二乗推定の数値的不安定性が生じる。

4. ARX モデルと伝達関数モデル

前節では、雑音がない場合について検討したが、ここではシステムが雑音項を含んでいる場合の最小二乗推定の振舞いについて検討する。離散時間システムの入出力データの生成モデルとして、通常以下の二つがある。

(I) ARX モデル

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})u_k + e_k \quad \dots\dots\dots (20)$$

e_k は平均値 0、分散 σ_e^2 の白色雑音

(II) 伝達関数モデル (TF モデル)

$$x_k = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u_k, \quad y_k = x_k + v_k \quad \dots\dots\dots (21)$$

v_k はシステム出力 x_k に付加する雑音項

ここで、入力 u_k は雑音 e_k あるいは v_k と統計的に独立な平均 0、分散 σ_u^2 の白色雑音であり、 y_k は観測出力である。ARX モデルと TF モデルで、同じ A, B

を用いていること、およびシステムが ARX モデル、TF モデルのいずれで表されるかにかかわらず、最小二乗推定値は (6) 式の正規方程式を解くことによって求められることに注意されたい。システムが ARX モデルの場合 e_k が白色雑音であることから、最小二乗推定値 $\hat{\theta}_N$ は θ の一致推定値となり、一方、TF モデルの場合 $\hat{\theta}_N$ は漸近的にさえバイアスを持つことが知られている。このような性質は統計的な性質であるが、本稿で問題とするのは推定値の数値計算上の問題である。

システムの極すなわち多項式 $A_*(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$ の零点が単位円に極めて近い場合に、正規方程式の係数行列が悪条件になるという問題点について、上記 2 種のモデルの場合を比較検討する。TF モデルにおいて x_k, v_k を

$$x_k = [x_{k-1}, \dots, x_{k-n}]^T, \quad v_k = [v_{k-1}, \dots, v_{k-n}]^T$$

と定義すると、 $y_k = x_k + v_k$ 、 $p_k = [-y_k^T u_k^T]^T$ であり、 $E(x_k v_k^T) = 0$ であることより、 M は前節の (12) (13) 式を以下のように修正すればよい。

$$E(y_k y_k^T) = E(x_k x_k^T) + E(v_k v_k^T)$$

$$E(y_k u_k^T) = E(x_k u_k^T)$$

ここで、 $E(x_k x_k^T) = \sigma_u^2 \Gamma$ 、 $E(v_k v_k^T) = \sigma^2 R$ において

$$M = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \Gamma & -G \\ -G^T & I \end{bmatrix} + \sigma^2 \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。行列 G, Γ およびベクトル m の単位パルス応答列 $\{g_i\}$ による表現は前節と同じである。さて、これら新しく定義した行列、ベクトルを用いると (9) 式は次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \sigma_u^2 \Gamma + \sigma^2 R & -\sigma_u^2 G \\ -\sigma_u^2 G^T & \sigma_u^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_\infty \\ \hat{b}_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_u^2 m_1 \\ \sigma_u^2 m_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (23)$$

これより

図 4 最小二乗推定値 (4 次)

Fig. 4. Least squares estimates of the 4th order system.

$$(\sigma_u^2 \Gamma + \sigma^2 R) \hat{\mathbf{a}}_\infty - \sigma_u^2 G \hat{\mathbf{b}}_\infty = -\sigma_u^2 \mathbf{m}_1$$

$$-G^T \hat{\mathbf{a}}_\infty + \hat{\mathbf{b}}_\infty = \mathbf{m}_2$$

なる方程式が導かれる。これを解いて

$$\hat{\mathbf{a}}_\infty = (\sigma_u^2 P + \sigma^2 R)^{-1} [-\sigma_u^2 \mathbf{m}_1 + \sigma_u^2 G \mathbf{m}_2]$$

..... (24)

$$\hat{\mathbf{b}}_\infty = \mathbf{m}_2 + G^T \hat{\mathbf{a}}_\infty \quad \text{..... (25)}$$

を得る。ただし、 $P = \Gamma - GG^T$ である。

5. 係数行列の性質

$n \times n$ 行列 P を用いると (22) 式より M の行列式は

$$\det M = (\sigma_u^2)^n \det(\sigma_u^2 P + \sigma^2 R) \dots\dots\dots (26)$$

となる。この(26)式と(24)式から P と R の値が推定値の計算に大きく影響することがわかる。 C を $A_*(s)$ の同伴行列とすると P の陽表現は

$$P = B_*(C)Q^{-1}B_*(C^T) \dots\dots\dots (27)$$

で与えられる⁽⁷⁾。ただし

$$Q = A(H)A(H^T) - A_*(H)A_*(H^T)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} : n \times n$$

$$C = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} : n \times n$$

である。ここで(27)式中の Q^{-1} について調べてみる。二次モデルの場合 Q^{-1} を計算すると

$$Q^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1+a_2 & -a_1 \\ -a_1 & 1+a_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

$$\Delta = (1-a_2)\{(1+a_2)^2 - a_1^2\}$$

となる。もし、システムの極すなわち $A_*(s) = s^2 + a_1s + a_2$ の二つの零点が単位円の近くにあると Δ において $1-a_2 \approx 0$ が成立し、 Q^{-1} は確かに悪条件となる。しかしながら、更に極が重根となると $(1-a_2)^2 - a_1^2 \approx 0$ も成り立ち、 Q^{-1} の悪条件の度合は極めて強いものとなることが予想される。この Q^{-1} の悪条件は(27)式により P の悪条件を招くと考えられる。

次に R について考える。ARX モデルは TF モデルにおいて雑音 v_k が

$$A(z^{-1})v_k = e_k \dots\dots\dots (29)$$

なる自己回帰過程の場合に相当するので v_k の共分散行列は

$$\sigma^2 R = \sigma_e^2 Q^{-1} \dots\dots\dots (30)$$

であり⁽⁷⁾、 P と同様に Q^{-1} を含む。従って、ARX モデルの場合システムの極が単位円に近いとき、あるいは更に重根であると P, R 共に悪条件になってしまい推定値の数値的な不安定性の問題が生じることが考えられる。一方、TF モデルでは、 v_k が $v_k = e_k$ すなわち白色雑音であり R は

$$\sigma^2 R = \sigma_e^2 I \dots\dots\dots (31)$$

となるので、たとえ P が悪条件であっても、この R が対角線要素に加わることで係数行列 M の悪条件は軽減されるものと推測される。

6. シミュレーションによる検証

前節の議論を確かめるため、ARX モデルあるいは

(a) ARX モデルの場合

(b) TF モデルの場合

図 5 最小二乗推定値

Fig. 5. Least squares estimates.

表 3 係数行列 M とベクトル m の値

Table 3. Coefficient matrix M and vector m .

表 3(a) ARX モデルの場合

係数行列 M				m
1.633E+7	1.633E+7	-1.820E+2	-1.826E+2	-1.633E+7
1.633E+7	1.633E+7	-1.820E+2	-1.817E+2	-1.633E+7
-1.820E+2	-1.820E+2	1.001E+0	8.608E-3	1.830E+2
-1.826E+2	-1.817E+2	8.608E-3	1.002E+0	1.839E+2

表 3(b) TF モデルの場合

係数行列 M				m
1.196E+7	9.976E+6	-9.201E+1	-9.991E+1	-9.976E+6
9.976E+6	1.196E+7	-1.604E+2	-9.236E+1	-9.936E+6
-9.201E+1	-1.604E+2	1.001E+0	8.608E-3	1.001E+2
-9.991E+1	-9.236E+1	8.608E-3	1.002E+0	1.363E+2

TF モデルで記述されるシステムに対してパラメータ推定のシミュレーションを行った。対象は二次システムとし 3 節で用いた重根のシステムを用いる。二つのモデルでの SN 比を等しくするため、ARX モデルは $\sigma_e^2 = 1$ 、TF モデルは $A(z^{-1})v_k$ の分散が 1 となるように $\sigma_e^2 = 128.7$ とした。各々の場合の推定値のグラフを図 5 に、また、 $N = 3,000$ における M と m の値を表 3 に示す。

このシステムは、極が単位円に近い重根であるため

同定しにくいということは前節まで述べた。ARX モデルのデータによる推定値には確かに大きな誤差が生ずるか、あるいは推定不能の状態が現れている。しかし TF モデルの場合そのような現象は見受けられない。表 1(b) と表 3(a) を比較すると数値こそ違いますが、全体の形は類似しており ARX モデルから得られるデータは雑音がない場合に表れるシステム自身の悪条件を継承していることがわかる。一方、表 1(b) と表 3(b) を比べると、 M の悪条件は TF モデルによるデータにおいては軽減されている。

次に 3 節にあげた 4 次システムの ϕ を 30° きざみで変えたシステムについて同様のシミュレーションを行ったが、2 次の場合と同様の傾向を示す結果が得られた。

7. 結 論

最小二乗法の数値的不安定性の問題について調べた。一般に、システムが単位円近くに極を持つと、係数行列の性質が悪条件になり同定が難しいとされる。そこで、まず観測雑音を含まない 2 次および 4 次のシステムに関し、共役根の極を単位円に沿って変化させパラメータ推定のシミュレーションを行った。その結果、実際に推定値に変動が生じたのは極が ± 1 に近い重根で出力の自己相関の絶対値の減衰が小さい場合で

あった。次に雑音項を含むシステム、すなわち ARX モデルと TF モデルの 2 種に対し、雑音がない場合に数値的不安定が起こる極に配置して、パラメータ推定のシミュレーションを行った。その結果、ARX モデルから得られるデータはシステム自身の悪条件を継承するが、TF モデルからのデータの場合係数行列の悪条件は軽減されることがわかった。

(昭和 63 年 1 月 12 日受付)

文 献

- (1) 相良・秋月・中溝・片山:「システム同定」計測自動制御学会 (昭 56)
- (2) 日本自動制御協会編: システムと制御チュートリアル講座テキスト, 37/69 (昭 60)
- (3) 花崎・小池・秋月:「システム同定における数値計算上のパラメータ推定精度」計測自動制御学会論文集, Vol. 22, No. 10, 1043/1050 (昭 61)
- (4) 足立・和泉沢・佐野:「悪条件を考慮した伝達関数モデルの同定」信学会論, J70-A, No. 3, 410/418 (昭 62)
- (5) 足立・佐野:「入力相関行列の悪条件を考慮したインパルス応答の最小 2 乗推定」計測自動制御学会論文集, 22, No. 11, 1156/1161 (昭 61)
- (6) A. J. Jakeman and P. C. Young: "Advanced methods of recursive time-series analysis", *Int. J. Control*, 37, No. 6, 1291/1310 (1983)
- (7) 得丸他共編: 統計工学ハンドブック, pp. 296, (昭 62) 培風館
- (8) 児玉・須田:「システム制御のためのマトリクス理論」計測自動制御学会 (昭 53)