むだ時間を含む系の最適レギュレータにおける むだ時間に誤差が生じた場合の安定条件

正員 内田 健康 (早稲田大)

正員 示村 悦二郎 (早稲田大)

非会員 阿部 直人 (早稲田大)

1. はじめに

有限次元系においては、最適レギュレータが円条件を満足し、大きな安定余有をもつことはよく知られている。状態にむだ時間を含む系の最適レギュレータについても、有限次元の場合と同様に円条件を満足し⁽⁵⁾⁽⁹⁾、大きな安定余有をもつこと⁽⁶⁾⁽⁹⁾が最近著者らによって明らかにされた。

実際に最適レギュレータを構成しようとする、一般には、同定された数式モデルに対して最適なフィードバックゲインを計算し、これを実際のシステムに適用することになる。そのとき、最適レギュレータは大きな安定余有をもっているから、数式モデルの係数パラメータにある程度の同定誤差があっても、構成された閉ループ系の安定性は達成されるであろう。しかしながら、むだ時間を含む系にはむだ時間という有限次元系にはない特有のパラメータがあり、このパラメータに同定誤差がある場合には、たとえ、その誤差が微小であっても大きな安定余有はもちろんのこと安定性すら保証されないことがある⁽⁷⁾。ここに、どのような条件が満たされれば、むだ時間に同定誤差が生じた場合の閉ループ系の安定性、更には大きな安定余有が保証されるだろうかという問題が生じる。

このようなむだ時間の誤差に対する最適レギュレータの安定性については、入力にむだ時間を含む系に関する研究⁽¹⁰⁾、むだ時間を含む系を有限次元系とみなした場合の研究⁽³⁾、状態にむだ時間を含む系に関するナ

イキスト安定判別法を用いた著者らの研究がある⁽¹¹⁾。ここでは状態にむだ時間を含む系に対して、無限次元 Riccati 方程式の解によって構成されるリアプノフ関数を用いて、むだ時間に誤差が生じた場合の安定条件を導く。次に得られた安定条件からむだ時間に誤差が生じた場合の安定余有を評価する。更に、むだ時間に誤差が生じて最適レギュレータの特徴である円条件が満足されるための条件、すなわち、大きな安定余有が保証されるための条件、についても考察する。

2. 問題の定式化

制御対象として、次のように状態に1種類のむだ時間 $h > 0$ を含む線形系を考える。

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t) \dots (1)$$

ここで、 A_0, A_1 は $n \times n$ 次元定数行列であり、 B は $n \times m$ 次元定数行列である。この系に対して最適レギュレータを構成したいが、そのためにはむだ時間 h の値やパラメータ A_0, A_1, B の値が正確にわかっていなければならない。しかし、むだ時間やパラメータの値を正確に同定することは一般に困難である。そこで、実システム(1)を同定した結果、むだ時間 h とむだ時間項の係数パラメータ A_1 に誤差を含む数式モデル(2)が得られたとしよう。

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \hat{A}_1 x(t-\theta) + Bu(t) \dots (2)$$

初期状態は $(x(0), x(\beta)) = (\phi^0, \phi^1(\beta))$, $-\theta \leq \beta < 0$ で与えられ、 $\phi \triangleq (\phi^0, \phi^1) \in M_2 \triangleq R^n \times L^2(-\theta, 0; R^n)$ とする。ここで、 $L^2(-\theta, 0; R^n)$ は $[-\theta, 0]$ 上で定義された2乗可積分 n 次元ベクトル関数を表している。

《定義》

制御入力 $u(t)$ が $(K_0, K_1) \in R^{m \times n} \times L^2(-\theta, 0; R^{m \times n})$ によって線形状態フィードバック形式

Stability Condition of the Optimal Regulator for System with Time-delay Under Identification Error. Kenko Uchida, Member, Etsujiro Shimemura, Member and Naoto Abe, Non-member (Waseda University).

内田健康: 正員, 早稲田大学理工学部電気工学科
示村悦二郎: 正員, 早稲田大学理工学部電気工学科
阿部直人: 非会員, 早稲田大学理工学部電気工学科

$$u(t) = K_0 x(t) + \int_{-\theta}^0 K_1(\beta) x(t+\beta) d\beta$$

で与えられるとき、任意の初期状態 ϕ に対して、システム (2) の唯一解 $x(t; \phi)$ が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x'(t; \phi) x(t; \phi) dt < \infty$$

を満たすならば、システムは L^2 安定であるという。ここで ' は転置を表す。また、与えられた初期状態 ϕ に対して、システムが L^2 安定となる (K_0, K_1) が存在するとき、システムは安定化可能という。この場合、 L^2 安定ならば漸近安定である⁽¹⁾。

実システムに対する安定化可能性も、同様に定義される。ここで、実システムと数式モデルはともに安定化可能であると仮定して、最適レギュレータを構成しよう。与えられるのは数式モデル (2) であるから、最適フィードバックゲインはこれに基づいて決定される。いま数式モデル (2) に対して次の 2 次形式評価関数を考えよう。

$$J = \int_0^{\infty} (x'(t) Q x(t) + u'(t) R u(t)) dt \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 Q と R はそれぞれ $n \times n$ 次元、 $m \times m$ 次元正定対称行列である。数式モデル (2) は安定化可能なので、評価関数 (3) を最小にする制御則は、無限次元 Riccati 方程式

$$\begin{aligned} & A_0' P_0 + P_0 A_0 + \hat{A}_1' P_1'(0) + P_1(0) \hat{A}_1 \\ & - P_0 B R^{-1} B' P_0 + Q = 0 \\ & - \frac{\partial}{\partial \beta} P_1(\beta) + A_0' P_1(\beta) + \hat{A}_1 P_2(0, \beta) \\ & - P_0 B R^{-1} B' P_1(\beta) = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \\ & - \frac{\partial}{\partial \alpha} P_2(\alpha, \beta) - \frac{\partial}{\partial \beta} P_2(\alpha, \beta) \\ & - P_1'(\alpha) B R^{-1} B' P_1(\beta) = 0 \\ & P_0 = P_1(-\theta), \quad P_1(\beta) = P_2(-\theta, \beta), \\ & P_2(\alpha, \beta) = P_2'(\beta, \alpha) \\ & -\theta \leq \alpha \leq 0, -\theta \leq \beta \leq 0 \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

の唯一の非負解 $P_0, P_1(\beta)$ を用いて次のように与えられる⁽¹⁾。

$$\begin{aligned} u(t) &= -R^{-1} B' K(z(t)) \\ K(z(t)) &\triangleq P_0 x(t) + \int_{-\theta}^0 P_1(\beta) \hat{A}_1 x(t+\beta) d\beta \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $z(t) \triangleq (x(t), x(t+\beta))$, $-\theta \leq \beta \leq 0$ である。制御則 (6) によって数式モデル (2) は漸近安定となる⁽¹⁾。なお、Riccati 方程式 (4), (5) の解 $P_0, P_1(\beta)$

および $P_2(\alpha, \beta)$ が非負であるとは任意の $y = (x^0, x^1(\cdot)) \in M_2$ に対して次の汎関数が非負となることを意味する。

$$\begin{aligned} V(y) &\triangleq x^0' P_0 x^0 + 2 x^0' \int_{-\theta}^0 P_1(\beta) \hat{A}_1 x^1(\beta) d\beta \\ &+ \int_{-\theta}^0 \int_{-\theta}^0 x^{1'}(\alpha) \hat{A}_1' P_2(\alpha, \beta) \\ &\times \hat{A}_1 x^1(\beta) d\alpha d\beta \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

さて、最適制御則 (6) は実システム (1) に適用されるから、以下のような閉ループ系が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \hat{A}_1 x(t-\theta) \\ &- B R^{-1} B' K(z(t)) \\ &+ A_1 x(t-h) - \hat{A}_1 x(t-\theta) \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

問題は、この閉ループ系が漸近安定となるための条件を導出し、安定余有を評価することである。ここで閉ループ系 (8) は、(2) および (6) で与えられる漸近安定な最適閉ループ系に $A_1 x(t-h) - \hat{A}_1 x(t-\theta)$ なる外乱が加わった形となっていることに注意しておこう。

3. 安定条件

実システムの閉ループ系 (8) を次のように表す。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \hat{A}_1 x(t-\theta) + v(t) \\ v(t) &= -B R^{-1} B' K(z(t)) \\ &+ A_1 x(t-h) - \hat{A}_1 x(t-\theta) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

この閉ループ系に対して、(7) の形式のリアプノフ関数を考えることにより、むだ時間 h と θ に依存した次のような安定条件を導くことができる。

《定理 1》

ある定数 $\rho > 0$ が存在し、不等式 (10) が成り立てば、閉ループ系 (9) は漸近安定である。

$$\begin{aligned} Q + F^*(j\omega) B R^{-1} B' F(j\omega) \\ + (\hat{A}_1' e^{j\omega\theta} - A_1' e^{j\omega h}) F(j\omega) \\ + F^*(j\omega) (\hat{A}_1 e^{-j\omega\theta} - A_1 e^{-j\omega h}) \geq \rho I \quad \forall \omega \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで

$$F(j\omega) = P_0 + \int_{-\theta}^0 P_1(\beta) \hat{A}_1 e^{j\omega\beta} d\beta \quad \dots\dots\dots (11)$$

(証明) 付録 1 参照 □

定理 1 で導かれた安定条件から導かれるいくつかの十分条件を示そう。本節では以下むだ時間にのみ誤差が生じた場合、すなわち、むだ時間項の係数に誤差がない ($\hat{A}_1 = A_1$) 場合について考察する。まず次の補題に注意しよう。

《補題 1》

任意の $n \times n$ 次元正定行列 W に対して、次の不等式が成り立つ。

$$(e^{j\omega\theta} \hat{A}_1' - e^{j\omega h} A_1') F(j\omega) + F^*(j\omega) (\hat{A}_1 e^{-j\omega\theta} - A_1 e^{-j\omega h}) \geq -W \\ - (1 - \cos \omega(h - \theta)) F^*(j\omega) (A_1 W^{-1} A_1' + \hat{A}_1 W^{-1} \hat{A}_1') F(j\omega) \dots\dots\dots (12)$$

(証明) 次の不等式

$$\{W^{-1/2} (\hat{A}_1' e^{j\omega\theta} - A_1' e^{j\omega h}) F(j\omega) - W^{1/2}\}^* \{W^{-1/2} (\hat{A}_1 e^{j\omega\theta} - A_1 e^{j\omega h}) F(j\omega) - W^{1/2}\} \geq 0 \dots\dots\dots (13)$$

を展開すると (12) となる。 □

《系 1》

$\hat{A}_1 = A_1$ の場合、次の不等式が成り立てば、閉ループ系 (9) は漸近安定である。

$$Q + F^*(j\omega) B R^{-1} B' F(j\omega) - 2 \left(\|A_1\|_2 \|F\|_\infty I + \frac{F^*(j\omega) A_1 A_1' F(j\omega)}{\|A_1\|_2 \|F\|_\infty} \right) > 0 \quad \forall \omega \dots\dots (14)$$

ただし、

$$\|A\|_2 \triangleq \{\lambda_{\max}(A'A)\}^{1/2}, \\ \|F\|_\infty \triangleq \sup_{\omega} \{\lambda_{\max}(F^*(j\omega) F(j\omega))\}^{1/2}$$

$\lambda_{\max}(M)$ は行列 M の最大固有値を表す。

(証明)

$$W = \{2(1 - \cos \omega(h - \theta))\}^{1/2} \|A_1\|_2 \|F\|_\infty I \dots\dots\dots (15)$$

とおくと、補題 1 より次の関係が得られる。

$$(e^{j\omega\theta} - e^{j\omega h}) A_1' F(j\omega) + F^*(j\omega) A_1 (e^{-j\omega\theta} - e^{-j\omega h}) \\ \geq - \{2(1 - \cos \omega(h - \theta))\}^{1/2} \left(\|A_1\|_2 \|F\|_\infty I + \frac{F^*(j\omega) A_1 A_1' F(j\omega)}{\|A_1\|_2 \|F\|_\infty} \right) \dots\dots\dots (16)$$

この不等式から (14) が成り立てば安定条件 (10) が満たされることがわかる。 □

《系 2》

$\hat{A}_1 = A_1$ の場合、以下の 2 つの不等式を同時に満たす定数 $\mu > 0$ が存在すれば、任意のむだ時間誤差に対して閉ループ系 (9) は漸近安定である。

$$Q > \mu I \dots\dots\dots (17)$$

$$B R^{-1} B' \geq \frac{4}{\mu} A_1 A_1' \dots\dots\dots (18)$$

(証明)

補題 1 において $W = \mu I$ と選ぶと、次の式が成り立てば、安定条件 (10) が成り立つことがわかる。

$$Q + F^*(j\omega) B R^{-1} B' F(j\omega) - \mu I$$

$$- \frac{4}{\mu} F^*(j\omega) A_1 A_1' F(j\omega) \geq \rho I \dots\dots (19)$$

ところが、(17) および (18) は (19) の成立を保証するから、閉ループ系は漸近安定である。更に、(17)、(18) はむだ時間 θ に依存していないので、任意のむだ時間誤差に対する安定条件である。 □

系 2 の条件 (17) および (18) が成立するのはかなり限られた場合である。例えば、むだ時間項の係数 A_1 が $m \times n$ 次元行列 E によって、 $A_1 = BE$ と表されるならば、重み行列 Q を大きく、また R を 0 に近づけるように選ぶことにより、この条件を成立させることができる。 $A_1 = BE$ という特別なむだ時間項の係数をもったシステムは、安定化しやすいシステムであることが知られている⁽⁸⁾。系 2 は更に、このようなシステムに対しては、最適レギュレータを用いれば、むだ時間の誤差に対してロバストな閉ループ系を構成することができることを保証している。

次に $\hat{A}_1 = 0$ の場合について考えよう。この場合はむだ時間を含む系を有限次元系と見なして最適制御則を構成したことになる。

《系 3》

$\hat{A}_1 = 0$ の場合、閉ループ系 (9) が漸近安定となるための条件は、次の不等式を満たす定数 $\rho > 0$ が存在することである。

$$Q + P_0 B R^{-1} B' P_0 - A_1' P_0 e^{j\omega h} - P_0 A_1 e^{-j\omega h} \geq \rho I \dots\dots\dots (20)$$

系 3 で扱った特別な場合については、文献 (3) で次のような安定条件が得られている。

$$Q + P_0 B R^{-1} B' P_0 - W - P_0 A_1 W^{-1} A_1' P_0 > 0 \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 W は適当な正定行列である。補題 1 を用いると、条件 (21) は条件 (20) に対する一つの十分条件となっていることがわかる。

4. 安定余有と円条件

むだ時間を含む系の最適レギュレータは有限次元系の場合と同様に、円条件を満足し⁽⁹⁾、大きな安定余有を持つことが明らかになった⁽⁶⁾。しかしむだ時間に誤差が生じた場合には、一般に安定余有は劣化すると考えられる。本節の目標は、むだ時間に誤差が生じた場合の最適レギュレータの安定余有を評価し、むだ時間の誤差によって安定余有がどの程度劣化するのか、あるいはどのような場合に大きな安定余有を回復できるかを検討することである。

前節の定式化において、むだ時間とむだ時間項のずれのみを考慮したが、安定余有を評価するために、入

力側に線形時不変で、有理多項式を要素とする漸近安定な伝達関数行列 $L(s)$ で表される摂動を仮想的に挿入する。このとき、 $L(s)$ は次のように評価される。

《定理 2》

$m \times m$ 次元正定行列 $M (\leq I)$ を適当に選んだとき、定数 $\rho > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} & Q + F^*(j\omega)B(I-M)R^{-1}B'F(j\omega) \\ & + (\hat{A}_1'e^{j\omega\theta} - A_1'e^{j\omega h})F(j\omega) \\ & + F^*(j\omega)(\hat{A}_1e^{-j\omega\theta} - A_1e^{-j\omega h}) \geq \rho I \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (22)$$

が成り立つならば、不等式 (23) を満たす漸近安定な摂動 $L(s)$ に対して閉ループ系 (9) は漸近安定である。

$$L(j\omega)R^{-1} + R^{-1}L^*(j\omega) - (2I-M)R^{-1} \geq 0 \quad \forall \omega \quad (23)$$

(証明) 付録 2 参照。 □

定理 2 から、むだ時間に誤差が生じた場合の最適レギュレータの安定余有は文献 (3) と同様の手法を用いて次のように評価できる。

《系 4》

R が対角行列の場合、 $M = \text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m \}$ に対して条件 (22) が満たされるとすると、閉ループ系 (8) の各ループごとのゲイン余有は $1 - \delta_i/2$ 以上であり、位相余有は少なくとも $\pm \cos^{-1}(1 - \delta_i/2)$ が保証される。

系 4 から、 M を単位行列に選ぶことができるならば、むだ時間に誤差のある閉ループ系 (8) は、むだ時間に誤差のない場合の最適レギュレータと同じ大きな安定余有をもつことになる。このとき、閉ループ系 (8) は更に次のような性質をもつ。

《定理 3》

$\hat{A}_1 = A_1$ とする。 M を単位行列に選んだとき ($M = I$)、定理 2 の条件 (22) が成立するならば、むだ時間に誤差が生じた場合の閉ループ系 (8) は円条件

$$\begin{aligned} & [I + R^{-1}B'F(j\omega)\Delta_p(j\omega)^{-1}B]^*R \\ & \times [I + R^{-1}B'F(j\omega)\Delta_p(j\omega)^{-1}B] \geq R \end{aligned} \quad (24)$$

を満たす。ただし

$$\Delta_p(s) \triangleq sI - A_0 - e^{-s\theta}A_1 \quad (25)$$

(証明)

数式モデル (2) に対する Riccati 方程式 (4) と境界条件 (5) を用いて、文献 (5) と同様の式変形を行うと

$$\begin{aligned} & F'(-s)\Delta(s) + \Delta'(-s)F(s) \\ & - F'(-s)BR^{-1}B'F(s) + Q = 0, \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Delta(s) \triangleq sI - A_0 - e^{-s\theta}A_1$$

が得られる。これは次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & F'(-s)\Delta_p(s) + \Delta_p'(-s)F(s) \\ & - F'(-s)BR^{-1}B'F(s) + H(s) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} H(s) \triangleq & Q + (e^{s\theta} - e^{s\theta})A_1'F(s) \\ & + F'(-s)A_1(e^{-s\theta} - e^{-s\theta}) \quad \dots \dots (28) \end{aligned}$$

(27) の両辺に右から $\Delta_p(s)^{-1}B$ 、左から $B'(\Delta_p'(-s))^{-1}$ をかけ、両辺に R を加え、 $M=I$ に対して (22) が成立するから $H(j\omega) \geq \rho I$ であることに注意すると、(24) が得られる。 □

円条件が成立するという事は、大きな安定余有が保証されるだけでなく、低感度特性をも保証されることを意味する⁽¹²⁾。このことは、むだ時間に誤差が生じても、 $M=I$ に対して (22) が成立すれば、すなわち、定数 ρ が存在して $H(j\omega) \geq \rho I$ 、 $\forall \omega$ であれば、最適レギュレータとしての特徴が保持されることを意味する。

定理 3 に基づいて、円条件が成立するための十分条件について考えよう。(25) で定義されている $H(j\omega)$ の形に注目し、系 1 の証明と同様に補題 1 を用いると、次の結果を得る。

《系 5》

$\hat{A}_1 = A_1$ の場合、次の不等式が成り立てば、むだ時間に誤差が生じても、閉ループ系 (8) は円条件を満たす。

$$\begin{aligned} & Q - 2 \left(\|A_1\|_2 \|F\|_\infty I \right. \\ & \left. + \frac{F^*(j\omega)A_1A_1'F(j\omega)}{\|A_1\|_2 \|F\|_\infty} \right) > 0 \quad \forall \omega \dots (29) \end{aligned}$$

むだ時間項の係数 A_1 のノルムが小さければ、むだ時間の影響が少なく、安定化が容易であることが知られている⁽¹³⁾。このようなシステムでは、閉ループ系の性質に対するむだ時間の誤差の影響も少ないと考えられる。系 5 の条件 (29) の左辺をノルムの性質を用いて評価すると、円条件が満足されるための A_1 のノルムに関する条件が、次のように与えられる。

《系 6》

$\hat{A}_1 = A_1$ の場合、むだ時間項の係数 A_1 が条件 (30) を満たせば、むだ時間に誤差が生じても、閉ループ系 (8) は円条件を満たす。

$$\lambda_{\min}[Q] - 4\|A_1\|_2\|F\|_\infty > 0 \quad (30)$$

5. 例 題

実システムがむだ時間 $h=1$ をもつ次のような線形系として与えられているとしよう。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (31)$$

重み行列を $Q=10I$, $R=1$ として, 同定した数式モデルに基づき最適フィードバック則を求め, これを実システムへ適用した。図1には同定誤差がない場合の時間応答のグラフを示す。図2にはむだ時間に同定誤差がある場合 ($\theta=0.8$, $\hat{A}_1=A_1$, $L(s)=I$) の(10)の左辺の最小特異値 $\sigma(\cdot)$ の周波数特性を示す。図2において(10)の最小特異値が正である。このことは, 定理1の定数 $\rho>0$ が存在することを意味する。従って, 閉ループ系が安定であることがわかる。そのときの時間応答のグラフを図3に示す。次に定理2に基づいてむだ時間に同定誤差がある場合の安定余有を評価した。図4には, $M=0.25I$ としたときのグラフを示す。系4において1入力系のゲイン余有は $1-\delta/2$ と表される。いま, $M=0.25I$ であるから, $\delta=0.25$ を代入することにより, ゲイン余有が少なくとも $7/8$ 以上あることがわかる。

図1 時間応答 ($h=\theta$)
Fig. 1. The free response, $h=\theta$.

図2 最小特異値の周波数特性 ($\theta=0.8$)
Fig. 2. The minimum singular value for $\theta=0.8$.

図3 時間応答 ($h=1$, $\theta=0.8$)
Fig. 3. The free response for $h=1$, $\theta=0.8$.

図4 最小特異値の周波数特性 ($\theta=0.8$, $M=0.25I$)

Fig. 4. The minimum singular value for $\theta=0.8$, $M=0.25I$.

6. おわりに

無限次元 Riccati 方程式の解から構成された非負の汎関数を用いることによって, むだ時間を含む系の最適レギュレータに対するむだ時間に誤差が生じた場合の安定条件を導出した。その安定条件から, むだ時間に誤差が生じた場合の安定余有を評価し, また, 最適レギュレータの特徴である円条件の成立が保証されるための条件を得た。本論文では最適レギュレータについて考察を行ったが, むだ時間を含む系の無限次元リアプノフ方程式を用いることにより, 一般的な線形安定化フィードバック制御則

$$u(t) = K_0 x(t) + \int_{-\theta}^0 K_1(\beta) x(t+\beta) d\beta$$

に対しても同様の考察を行うことができる。

なお, 文献 11) において, 微小なむだ時間誤差に対する最適レギュレータの安定性が示されている。本論文の定理1では条件(10)はすべての実数 ω に対して成立することを要求しているが, 定理1の証明をもう少し詳細に検討するとわかるように, 条件(10)は十分大

きな閉区間 $-N \leq \omega \leq N$ で成立すれば十分である。
このことから、微少なむだ時間誤差に対しては、最
適レギュレータは漸近安定を保つことを示すことがで
きる。

最後に、数値計算を協力してくれた早稲田大学大
院生、今崎直樹君と森裕彦君に感謝いたします。

(昭和 62 年 7 月 21 日受付)

文 献

- (1) M. C. Delfour, C. McCalla & S. K. Mitter: "Stability and the Infinite-Time Quadratic Cost Problem for Linear Hereditary Differential Systems", *SIAM J. Control and Opt.*, 13, No. 1, 48/88 (1975)
- (2) A. Manitius & R. Triggiani: "Function Space Control-ability of Linear Retarded Systems: a Derivation from Abstract Operator Conditions", *ibid.*, 16, No. 4, 599/645 (1978)
- (3) 岡田・池田: 「線形むだ時間システムに対するレギュレータの構成とその安定余有」計測自動制御学会論文集第 19 巻第 12 号 22/27 (昭 58)
- (4) M. G. Safonov, & M. Athans: "Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators", *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-22, No. 2, 173/179, (1977)
- (5) K. Uchida & E. Shimemura: "Closed-loop property of the infinite-time linear-quadratic optimal regulator for systems with delays", *Int. J. Control*, 43, No. 3, 773/779 (1986)
- (6) 内田・示村・阿部: 「むだ時間を含む系の最適レギュレータの安定余有」計測自動制御学会論文集, 第 22 巻第 11 号 94/96 (昭 61)
- (7) K. Yamanaka & E. Shimemura: "A note on a stability property of smith controllers in systems with time-delay", *Report of Sci. and Eng. Res. Lab.*, Waseda Univ., 83-3, 1-23, (1983)
- (8) T. Furukawa & E. Shimemura: "Stabilizability conditions by memoryless feedback for systems with time-delay", *Int. J. Control*, 37, No. 3, 553/565 (1983)
- (9) K. Uchida, E. Shimemura & N. Abe: "Circle condition and stability margin of optimal regulator for systems with delays", *ibid.*, 46, No. 4, 1203/1212 (1987)
- (10) R. D. Hocken & J. E. Marshall: "The effects of mismatch on an optimal control scheme for linear systems with control time delays", *Optimal Cont. Appl. & Methods*, 4, 47/69 (1983)
- (11) 内田・示村・阿部: 「むだ時間を含む系においてむだ時間に誤差が生じた場合の安定条件」第 9 回 DST シンポジウム予稿集, 205/208 (昭 61)
- (12) K. Uchida, E. Shimemura, T. Kubo & N. Abe: "The linear-quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay", *Report of Sci. and Eng. Res. Lab.*, Waseda Univ., 86-10, 12-10 (1986)

付 録

1. (定理 1 の証明)

閉ループ系(9)に沿って次の等式を考える。

$$V(\phi) = V(z(\tau)) - \int_0^\tau \frac{d}{dt} V(z(t)) dt \dots (\text{付 1})$$

ここで、 $V(\cdot)$ は(7)で定義された非負の汎関数である。また、 ϕ は初期関数を表している。(付 1)の右辺第 2 項 $V(z(t))$ は次式となる。

$$\begin{aligned} V(z(t)) = & x'(t) \{ A_0' P_0 + P_0 A_0 + \hat{A}_1' P_1(0) \\ & + P_1(0) \hat{A}_1 - 2 P_0 R R^{-1} B' P_0 \} x(t) \\ & + 2 x'(t) \int_{-\theta}^0 \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} P_1(\beta) + A_0' P_1(\beta) \right. \\ & \left. + \hat{A}_1 P_2(0, \beta) - 2 P_0 B R^{-1} B' P_1(\beta) \right] \\ & \times \hat{A}_1 x(t + \beta) d\beta \\ & + \int_{-\theta}^0 \int_{-\theta}^0 x'(t + \alpha) A_1' \left[\left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right. \\ & \times P_2(\alpha, \beta) - 2 P_1'(\alpha) B R^{-1} B' P_1(\beta) \left. \right] \\ & \times \hat{A}_1 x(t + \beta) d\alpha d\beta + 2(A_1 x(t - h) \\ & - \hat{A}_1 x(t - \theta))' K(z(t)) \\ & + 2 x'(t - \theta) (P_0 - P_1(-h)) \hat{A}_1 x(t - \theta) \\ & + 2 x'(t - \theta) \int_{-\theta}^0 (P_1(\beta) - P_2(\alpha, -h)) \\ & \times \hat{A}_1 x(t + \beta) d\beta \end{aligned}$$

更に、Riccati 方程式(4)と境界条件(5)を用いて計算すると結局(付 1)は次式となる。

$$\begin{aligned} V(\phi) = & V(z(\tau)) + \int_0^\tau \{ x'(t) Q x(t) \\ & - K'(z(t)) B R^{-1} B' K(z(t)) \\ & - 2 v'(t) K(z(t)) \} dt \dots \dots \dots (\text{付 2}) \end{aligned}$$

ここで、これからの議論を周波数領域で行うために、次のような線形打ち切りオペレータ $\mathcal{P}: \mathcal{L}_2^*(0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}_2^*(0, \infty)$ を導入しよう。

$$(\mathcal{P}_\tau y)(t) = \begin{cases} ((x^0(t), x^1(t, \cdot)), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} \dots \dots \dots (\text{付 3})$$

ただし、ここで、 $\mathcal{L}_2^*(0, \infty)$ はむだ時間を含む系の軌道の内積が有界である空間を表し、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^*(0, \infty) \\ \triangleq \{ y | y: [0, \infty) \rightarrow M_2, y(t) \\ = (x^0, x^1(t, \cdot)), \int_0^\infty \left[x^{0'}(t) x^0(t) \right. \\ \left. + \int_{-h}^0 x^{1'}(t + \beta) x^1(t + \beta) d\beta \right] dt < \infty \} \end{aligned} \dots \dots \dots (\text{付 4})$$

また、 $\mathcal{L}_2^*(0, \infty)$ は有限の閉区間において内積が有界となる $\mathcal{L}_2^*(0, \infty)$ を拡張した空間を表し、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2e}^*(0, \infty) \\ \triangleq \{ y | y: [0, \infty) \rightarrow M_2, y(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x^0, x^1(t, \cdot)), \int_0^t [x^{0'}(t) x^0(t) \\
&\quad + \int_{-h}^0 x^{1'}(t+\beta) x^1(t+\beta) d\beta] \\
&\quad \times dt < \infty, \forall \tau \} \dots\dots\dots (\text{付 } 5)
\end{aligned}$$

以下では、 $(\mathcal{P}_\tau y)(t) = y_\tau(t) = (x_\tau^0(t), x_\tau^1(t, \cdot))$ と表す。 $V(z(\tau)) \geq 0$ に注意すると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
V(\phi) \geq & \int_0^\infty \{x'_\tau(t) Q x_\tau(t) \\
& - K'(z_\tau(t)) B R^{-1} B' K(z_\tau(t)) \\
& \times 2v'_\tau(t) K(z_\tau(t))\} dt \dots\dots\dots (\text{付 } 6)
\end{aligned}$$

線形打ち切りオペレータを用いているため $z_\tau(t)$ は $\mathcal{L}_2^*[0, \infty)$ に含まれ、Parseval の定理を適用することができる。従って、(付 6) は

$$\begin{aligned}
V(\phi) \geq & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty X_\tau^*(j\omega) [Q + F^*(j\omega) B \\
& \times R^{-1} B' F(j\omega) \\
& + (\hat{A}_1' e^{j\omega\theta} - A_1' e^{j\omega h}) F(j\omega) \\
& + F^*(j\omega) (\hat{A}_1 e^{-j\omega\theta} - A_1 e^{-j\omega h})] \\
& \times X_\tau(j\omega) d\omega \dots\dots\dots (\text{付 } 7)
\end{aligned}$$

となる。ここで*は共役転置を表す。 $X_\tau(j\omega)$ は $x_\tau(t)$ のフーリエ変換である。

定理 1 の(10)を(付 7)に代入して、逆変換を行う

と

$$V(\phi) \geq \rho \int_0^\infty |x_\tau(t)|^2 dt \dots\dots\dots (\text{付 } 8)$$

が得られる。左辺は定数であり、右辺は $\tau \rightarrow \infty$ で有界である。これは閉ループ系(9)が L^2 安定であることを意味し、従って、閉ループ系(9)は漸近安定である。□

2. (定理 2 の証明)

摂動 $L(s)$ のインパルス応答行列を $\mathcal{L}(t)$ とすると、摂動を含む実システムの閉ループ系は(9)における $v(t)$ を

$$\begin{aligned}
v(t) = & -B \int_0^t \mathcal{L}(t-\tau) R^{-1} B' K(z(t)) d\tau \\
& \dots\dots\dots (\text{付 } 9)
\end{aligned}$$

と置き換えた形になる。以後定理 1 の証明に従うと、

$$\begin{aligned}
& Q + F^*(j\omega) B \{L(j\omega) R^{-1} + R^{-1} L^*(j\omega) \\
& - R^{-1}\} B' F(j\omega) \\
& + (\hat{A}_1' e^{j\omega\theta} - A_1' e^{j\omega h}) F(j\omega) \\
& + F^*(j\omega) (\hat{A}_1 e^{-j\omega\theta} - A_1 e^{-j\omega h}) \geq \rho I \quad \forall \omega \\
& \dots\dots\dots (\text{付 } 10)
\end{aligned}$$

が成立すれば摂動 $L(s)$ に対して閉ループ系(9)は漸近安定であることがわかる。従って、(22)と(23)から M を消去すれば、(付 10) が成立するから、定理 2 の結論を得る。□