マルコフ過程振幅正弦波による脳波頭皮上分布モデル

正員 西田 茂 人 (佐賀大)

正員 中村 政 俊 (佐賀大)

非会員 柴崎 浩 (佐賀医科大)

1. ま え が き

脳波とは、大脳皮質の多数の神経細胞におけるシナプス後電位の総和を頭皮上から記録したものであり、脳波の判読は頭皮上の複数の部位から導出された脳波の時間および空間分布に基づいてなされている⁽¹⁾。

脳波の空間分布を定量的に表現する方法として、複数の部位から導出した脳波そのものに補間法を適用して脳波の頭皮上分布を表現する方法⁽²⁾や、8~13 Hzの α 波成分を多く含む脳波の各時刻における頭皮上分布を定量的に表すことによって α 波の時間的・空間的变化を表現する方法⁽³⁾などがある。また、外部からの感覚刺激に対する中枢神経系の反応である誘発電位に関しても、スプライン関数を用いた頭皮上分布表現がなされている⁽⁴⁾。これらの表現方法は、いずれも脳波や誘発電位の電位そのものに、補間法などを適用して頭皮上分布表現をする方法であり、数学的なモデルを用いた方法ではない。脳波に関する数式モデルとして、ARモデルやARMAモデル⁽⁵⁾⁽⁶⁾があるが、これらは1つの部位の特徴を表す脳波モデルであって頭皮上分布は表現していない。また、それらの脳波モデルは、脳波の定量化の立場からは有用であるが、医学的立場からみた脳波特徴との対応が直感的にとりにくい難点を有する。

本論文では、臨床における脳波判読において最も基本となる背景脳波（頭皮上において全般的かつ持続的

な波の連続）の頭皮上分布を定量的に表現する脳波頭皮上分布モデルを提案する。このモデルの構造は、頭皮上脳波の各部位間の位相情報が付加された一次マルコフ過程振幅正弦波が数個重畳したものである。この脳波モデルは、脳波時系列と統計的性質を合致させることを目指して、各時刻の脳波そのものの一致を狙うものではない。従って、モデルのパラメータは、モデルの理論パワースペクトルと脳波のパワースペクトルの誤差2乗和の最小化によって決定する。重畳波の各成分のパラメータは、脳波の周波数に関して分類されている⁽¹⁾ δ 波 (0.5~4 Hz)、 α 波 (8~13 Hz)、 β 波 (13 Hz以上) それぞれの波の平均周波数、振幅、遷移係数および各部位間の位相差に対応している。従って本モデルは、脳波判読医による脳波判読結果と直感的対応がとりやすいという特長があり、単一部位に対するモデルパラメータと脳波判読医による脳波判読結果との対応に関しては、すでに良い結果を得ている⁽⁷⁾。実際に、正常被検者の頭皮上5箇所から導出した脳波に対する頭皮上分布モデルを構成したところ、モデル出力時系列の波形の統計的性質が脳波の性質とよく一致していて、脳波特徴の頭皮上分布はモデルパラメータの値によって定量的に表現できた。

なお、モデル時系列のサンプル間隔と、モデルパラメータの値との間の重要な関係式を導いた。この関係式を用いることにより、粗いサンプル間隔 10 msec の脳波データを基にして決定したモデルパラメータから細かいサンプル間隔 1 msec のモデルの時系列を発生させることができた。

本論文では、第2章で脳波モデルの構造、第3章でモデルパラメータの決定法を示し、第4章で正常被検者の脳波頭皮上分布モデルの構成を行い、サンプル間隔とモデルパラメータの関係の証明は付録で行った。

EEG Model for Scalp Topography by Markov Amplitude Sinusoidal Waves. By Shigeto Nishida, Member, Masatoshi Nakamura, Member (Faculty of Science and Engineering, Saga University) & Hiroshi Shibasaki, Non-member (Department of Internal Medicine, Saga Medical School).

西田茂人：正員，佐賀大学工学部電気工学科

中村政俊：正員，佐賀大学工学部電気工学科

柴崎 浩：非会員，佐賀医科大学内科学教室

2. 脳波頭皮上分布モデルの構造

提案する脳波頭皮上分布モデルは、基本部位の脳波モデル $x^1(n\Delta t)$ と複数個の派生部位の脳波モデル $x^2(n\Delta t)$ とからなり、各部位の脳波モデルは一次マルコフ過程の振幅を有する正弦波が K 個重畳した形で表される。

基本部位 1 に対する脳波モデルの構造は

$$x^1(n\Delta t) = \sum_{k=1}^K a_k^1(n\Delta t) \sin(2\pi m_k n\Delta t - \theta_k^1) \quad (1-1)$$

$$a_k^1((n+1)\Delta t) = \gamma_k^1 a_k^1(n\Delta t) + \xi_k^1(n\Delta t) \quad (1-2)$$

で表され、これは先に提案したマルコフ過程振幅正弦波モデル⁽⁷⁾に位相情報 θ_k^1 を付加したものである。ここで、 m_k は平均周波数、マルコフ過程振幅 $a_k^1(n\Delta t)$ 中の γ_k^1 は遷移係数、 $\xi_k^1(n\Delta t)$ は平均値が 0 で分散が $(\sigma_k^1)^2$ の白色雑音で、 Δt はサンプル間隔である。本モデルは、わずか 2, 3 個の正弦波の重畳からなる少ない個数のパラメータによって脳波の特徴を正確に表現することができる。また、各波は、脳波の周波数に関して分類されている δ 波、 α 波、 β 波に、それぞれ対応させることができるので、本モデル中のパラメータは、脳波判読医による脳波判定結果との直感的対応がとりやすいという特長を有する⁽⁷⁾。たとえば、 m_k は各波の平均周波数に対応し、 γ_k は各波の持続の程度を表している。

派生部位 2 に対する脳波モデルは、

$$x^2(n\Delta t) = \sum_{k=1}^K a_k^2(n\Delta t) \sin(2\pi m_k n\Delta t - \theta_k^2) \quad (2-1)$$

$$a_k^2((n+1)\Delta t) = \gamma_k^2 a_k^2(n\Delta t) + b_k \xi_k^1(n\Delta t) \quad (2-2)$$

で表され、これは基準部位 1 のモデルと比較すると、正弦波の個数 K と平均周波数 m_k および白色雑音 $\xi_k^1(n\Delta t)$ の値は等しく、マルコフ過程の入力ゲイン b_k 、遷移係数 γ_k^2 と位相 θ_k^2 の値が異なっている。

脳波頭皮上分布モデルをブロック図で示すと図 1 のようになる。脳波の発生源として周波数の異なる K 個の正弦波 $\sin(2\pi m_k n\Delta t)$ と独立な白色雑音 $\xi_k^1(n\Delta t)$ の対を想定し、それらの信号が各伝搬経路を伝わるときにそれぞれの部位によってマルコフ過程の入力ゲイン b_k 、遷移係数 γ_k^2 と位相 θ_k^2 が異なると仮定している。すなわち、異なった部位から導出した脳波は、同一の発生源から発生した波に、部位特有の伝搬特性の

図 1 脳波頭皮上分布モデルのブロック図

Fig. 1. Block diagram of the EEG (electroencephalogram) model for scalp topography.

変換を施すことによって表現することができる。このモデルにおいて、基準部位 1 の位相 θ_k^1 と派生部位 2 の位相 θ_k^2 それぞれの値は意味をもたず全く自由に選んでよいが、その両者の差である位相差

$$\theta_k = \theta_k^2 - \theta_k^1, \quad (k=1, \dots, K) \quad (3)$$

は頭皮上の脳波の伝搬の遅れを表す重要なパラメータである。

また、その他の派生部位 3 以降に関しても派生部位 2 とモデル構造は同じであり、伝搬部分のパラメータの値が異なるだけである。

3. モデルパラメータの決定法

提案した脳波モデルは、脳波時系列と統計的性質を合致させることを目指して、各時刻の波形そのものの一致を狙うものではない。従って、モデルパラメータは、パワースペクトルとクロススペクトルをもとに決定する。その決定法には、スペクトル最適分布関数近似法⁽⁸⁾を採用する。この方法は脳波パワースペ

クトルとモデルの理論パワースペクトルの誤差 2 乗和を評価関数として設定し、評価関数が最小となるモデルパラメータを極値探索法 (Fletcher-Powell 法⁽⁹⁾) で決定する方法である。脳波頭皮上分布モデルパラメータは、基準部位と 1 つの派生部位の 2 部位ごとに求める。求めるべきモデルパラメータを

$$z = [m_k, r_k^1, \sigma_k^{\varepsilon}, \gamma_k^2, b_k, \theta_k], (k=1, \dots, K) \quad (4)$$

なる $6K$ 個の要素をもつベクトルで表し、これらのモデルパラメータを以下に示す 3 つのステップに従って決定する。

ステップ 1

基準部位 1 に対する脳波モデルのパラメータを決定する。(1) 式の理論パワースペクトルは

$$g_1(f) = \sum_{k=1}^K \frac{0.25 \Delta t (\sigma_k^{\varepsilon})^2}{1 + (\gamma_k^1)^2 - 2r_k^1 \cos \{2\pi \Delta t (f - m_k)\}} + \frac{0.25 \Delta t (\sigma_k^{\varepsilon})^2}{1 + (\gamma_k^1)^2 - 2\gamma_k^1 \cos \{2\pi \Delta t (f + m_k)\}} \quad (5)$$

となる⁽⁷⁾。基準部位 1 から導出された脳波に FFT⁽¹⁰⁾ を適用して計算したパワースペクトルと (5) 式の理論パワースペクトルの誤差 2 乗和からなる評価関数を設け、この評価関数を最小にするようなパラメータ

$$\hat{z}_1 = [\hat{m}_k, \hat{\gamma}_k^1, \hat{\sigma}_k^{\varepsilon}], (k=1, \dots, K) \quad (6)$$

を決定する。

ステップ 2

派生部位 2 に対する脳波モデルのパラメータを決定する。(2) 式の理論パワースペクトルは

$$g_2(f) = \sum_{k=1}^K \frac{0.25 \Delta t (b_k \sigma_k^{\varepsilon})^2}{1 + (\gamma_k^2)^2 - 2r_k^2 \cos \{2\pi \Delta t (f - m_k)\}} + \frac{0.25 \Delta t (b_k \sigma_k^{\varepsilon})^2}{1 + (\gamma_k^2)^2 - 2\gamma_k^2 \cos \{2\pi \Delta t (f + m_k)\}} \quad (7)$$

となる⁽⁷⁾。この理論パワースペクトルのパラメータのうち周波数と雑音分散に関しては、ステップ 1 の基準部位で決定した発生源のパラメータの値 $\hat{m}_k, \hat{\sigma}_k^{\varepsilon}$ を採用する。それ以外のパラメータ γ_k^2, b_k に関しては、派生部位 2 から導出された脳波に FFT⁽¹⁰⁾ を適用して計算したパワースペクトルと、 $\hat{m}_k, \hat{\sigma}_k^{\varepsilon}$ の値を代入した (7) 式の理論パワースペクトルの誤差 2 乗和からなる評価関数を設けて、この評価関数が最小となるようなパラメータ

$$\hat{z}_2 = [\hat{\gamma}_k^2, \hat{b}_k], (k=1, \dots, K) \quad (8)$$

を決定する。

ステップ 3

(3) 式で示された基準部位 1 と派生部位 2 における

位相差 θ_k の推定値は、2 部位間の脳波のクロスベクトル $Q(f)$ を計算し、そのフェイズの周波数 $\hat{m}_k$ における値を

$$\hat{z}_3 = [\hat{\theta}_k] = [\angle Q(\hat{m}_k)], (k=1, \dots, K) \quad (9)$$

と採用する。

ステップ 1 ~ 3 で決定したパラメータをまとめて

$$\hat{z} = [\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3] = [\hat{m}_k, \hat{\gamma}_k^1, \hat{\sigma}_k^{\varepsilon}, \hat{\gamma}_k^2, \hat{b}_k, \hat{\theta}_k], (k=1, \dots, K) \quad (10)$$

で表し、これを (4) 式のモデルパラメータ z の推定値とする。このようにして求めたモデルパラメータ $\hat{z}$ は、サンプル間隔 Δt で離散化した脳波データを用いて構成したモデルのパラメータである。

サンプル間隔とモデルパラメータとの関係式

(4) 式のモデルパラメータを求めるときの脳波データのサンプル間隔 Δt の値と、その決定されたモデルパラメータを用いて (1), (2) 式から発生させるモデル時系列のサンプル間隔 $\Delta t'$ は必ずしも一致させる必要はない。一般に比較的粗いサンプル間隔 Δt の脳波データをもとにモデルを構成し、モデルの利用目的に応じて細かいサンプル間隔 $\Delta t'$ でモデル出力を得たいという事態によく遭遇する。たとえば、モデルパラメータを決定するときの計算時間を短縮し、モデル出力は連続的な脳波時系列により近い形で比較したい場合などである。このように、サンプル間隔が変化するとき、(1), (2) 式の離散時間の脳波モデルが普遍的な性質を保持するためには、モデルパラメータにある変換を施す必要がある。以下サンプル間隔とモデルパラメータの値との間の重要な関係式を導いたその結果を示す。

(1-1), (2-1) 式中の平均周波数 m_k と位相 θ_k^1, θ_k^2 はサンプル間隔が変化しても不変である。サンプル間隔によって変化するパラメータは、(1-2), (2-2) 式中の $r_k^1, \gamma_k^2, \sigma_k^{\varepsilon}, b_k$ である。この 4 つのパラメータに関する関係式を導くときの基本的考え方は、サンプル間隔が異なる離散時間モデルを生み出す元の連続モデルは同一であるということである。サンプル間隔 Δt におけるモデルパラメータを $\gamma_k^1, \gamma_k^2, \sigma_k^{\varepsilon}, b_k$ とし、サンプル間隔 $\Delta t'$ におけるモデルパラメータを $\gamma_k^{1'}, \gamma_k^{2'}, \sigma_k^{\varepsilon'}, b_k'$ とすると、両者の間の関係は

$$\gamma_k^{1'} = (\gamma_k^1)^{\Delta t' / \Delta t} \quad (11)$$

$$\gamma_k^{2'} = (\gamma_k^2)^{\Delta t' / \Delta t} \quad (12)$$

$$(\sigma_k^{\varepsilon'})^2 = (\sigma_k^{\varepsilon})^2 \frac{1 - (\gamma_k^{1'})^2}{1 - (\gamma_k^1)^2} \quad (13)$$

$$(b_k')^2 = (b_k)^2 \frac{\{1 - (\gamma_k^1)^2\} \{1 - (\gamma_k^2)^2\}}{\{1 - (\gamma_k^{1'})^2\} \{1 - (\gamma_k^{2'})^2\}} \dots (14)$$

となった(付録Ⅰ)。

更に、(11)、(12)、(13)、(14)式の関係式で結ばれている離散時間モデルにおいて、サンプル間隔が変化しても、モデルの理論パワースペクトルの面積は不変であることを証明した(付録Ⅱ)。

4. 正常被検者の脳波頭皮上分布モデル

本章では、正常被検者の頭皮上5箇所から導出した実脳波に対して、第2章、第3章で示した方法で実際に脳波頭皮上分布モデルを構成する。国際電極法(10-20 system)⁽¹⁾による頭皮上5箇所の部位(図2)から耳基準で導出した安静閉眼時脳波を図3(A1)に、その拡大図を図3(A2)に示す。なお記録時の脳波計の低周波フィルタの時定数は0.3sec、高周波遮断周波数は500Hzである。この脳波データをサンプル間隔 $\Delta t = 10\text{msec}$ 、データ数256個の条件でサン

図2 電極配置(10-20法)

Fig. 2. Electrode placements (ten-twenty system).

ルし、それにFFT⁽¹⁰⁾によりピリオドグラムを求め、同様の手順で求めた10個のピリオドグラムの平均値で表されるパワースペクトルを図4に示す。

図3(A1)、図4から、各部位の脳波は、8~13Hzの α 波成分が最も多く、0.5~4Hzの δ 波帯域と13Hz以上の β 波帯域に少しパワーが存在していること

図4 脳波パワースペクトルとモデル理論パワースペクトル

Fig. 4. Power spectrum of the EEG and theoretical power spectrum of the model.

図3 脳波とモデル出力

Fig. 3. EEG and model output.

がわかる。 α 波成分の各部位の特徴を調べると、図 4 から、平均周波数はいずれの部位においてもほぼ同じであり、そのパワーの大きさと尖度が異なることがわかる。また、図 3 (A 2) から、部位によって α 波の位相がずれていることもわかる。これらの特徴は、脳波頭皮上分布モデルの構造を (1), (2) 式の形に決定するに至った基本となっている。

基準部位 1 は任意に選んでよいが、ここでは、臨床において脳波を判読する際に重視している優位律動 (成人では α 波) が最も多い後頭部の部位 O_1 を選ぶ。そして、その他の部位を派生部位 2, 3, 4, 5 として、基準部位と 4 つの派生部位の脳波モデルのパラメータは、3 章で述べた手順のうちステップ 1 を 1 回、ステップ 2, 3 を 4 回適用して決定した。モデルパラメータ決定に用いたデータは、サンプル間隔 $\Delta t=10$ msec の時系列から計算した図 4 のパワースペクトルと、基準部位 O_1 とその他の派生部位間のクロススペクトルのフェイズの値である。脳波モデルの一次マルコフ過程振幅正弦波の個数は $K=3$ とし、それぞれの波は、 δ 波、 α 波、 β 波に対応させている。

表 1 には、このようにして決定したモデルパラメータの値 ($\Delta t=10$ msec) と、(11)~(14) 式の変換公式によって計算したモデルパラメータの値 ($\Delta t'=1$ msec) を示す。ただし、基準部位 O_1 における b_k の項には白色雑音の標準偏差 σ_k^2 の値を示している。ここで、

$k=1$ は δ 波、 $k=2$ は α 波、 $k=3$ は β 波に対応している。サンプル間隔 10 msec ごとのモデル出力の時系列を図 3 (B 1) に、サンプル間隔 1 msec ごとの時系列を図 3 (B 2) に、(5), (7) 式を用いて計算した理論パワースペクトルの形状を図 4 の実線で示している。本モデルでは時系列の各時刻の波形そのものを脳波に一致させるのではなく、時系列全体の統計的性質を合わせることを目的としているが、図 3 (B 1) のモデル時系列は図 3 (A 1) の脳波時系列と視覚的に統計的性質がよく一致していることがわかり、かつ図 4 よりモデルの理論パワースペクトルは脳波パワースペクトルと形状がよく一致していて統計量の値そのものも非常によく一致していることがわかる。また、図 3 (B 2) のモデル時系列の拡大図における各部位間の位相差が、図 3 (A 2) の実脳波の位相差とよく似かよっていることがわかる。

5. む す び

本論文では、脳波の頭皮上分布を定量的に表現する脳波頭皮上分布モデルを提案した。本モデルは、頭皮上の各部位間の位相差情報を取り入れた一次マルコフ過程振幅正弦波が数個重畳したものである。このモデルの各波は、脳波の周波数に関して分類されている δ 波、 α 波、 β 波それぞれの平均周波数、振幅、遷移係数、位相などのパラメータで表すことができるので、

表 1 モデルパラメータ
Table 1. Model parameters.

	k	$\Delta t=10$ msec				$\Delta t'=1$ msec			
		m_k	γ_k	b_k (σ_k^2)	θ_k	m_k	γ_k	b_k (σ_k^2)	θ_k
F_{p1}	1	0.44	0.843	1.26	0.12	0.44	0.983	1.29	0.12
	2	9.75	0.989	0.48	-1.57	9.75	0.999	0.48	-1.57
	3	25.00	0.906	0.99	-0.13	25.00	0.990	0.99	-0.13
F_7	1	0.44	0.831	1.49	0.31	0.44	0.982	1.54	0.31
	2	9.75	0.989	0.36	-1.50	9.75	0.999	0.36	-1.50
	3	25.00	0.872	1.01	-0.01	25.00	0.986	1.03	-0.01
T_3	1	0.44	0.869	0.99	0.10	0.44	0.986	1.00	0.10
	2	9.75	0.971	0.54	-0.68	9.75	0.997	0.53	-0.68
	3	25.00	0.881	1.05	0.12	25.00	0.987	1.05	0.12
T_5	1	0.44	0.778	1.68	0.07	0.44	0.975	1.79	0.07
	2	9.75	0.976	1.08	0.35	9.75	0.998	1.07	0.35
	3	25.00	0.866	0.99	0.06	25.00	0.986	1.01	0.06
O_1	1	0.44	0.897	(4.37)	—	0.44	0.989	(1.45)	—
	2	9.75	0.969	(3.44)	—	9.75	0.997	(1.10)	—
	3	25.00	0.900	(1.50)	—	25.00	0.990	(0.50)	—

AR モデルや ARMA モデルと比して脳波判読医による脳波判読結果と直感的対応がとりやすいという点で優れている。これらのモデルパラメータは、パワースペクトルの誤差 2 乗和の最小化によって決定した。実脳波を用いて脳波頭皮上分布モデルを構成した結果、モデルの統計的性質が実脳波の性質とよく一致し、各部位間の脳波位相差も適切に表現することができた。また、モデル時系列のサンプル間隔とモデルパラメータの値との重要な関係式を導くことによって、異なった希望のサンプル間隔のモデル時系列を発生させることを可能にした。(昭和 62 年 12 月 28 日受付)

文 献

- (1) 門林・井上・中村：脳波，金芳堂 (1983)
- (2) T. Estrin & R. Uzgalis: "Computer display of spatiotemporal EEG patterns", *IEEE Trans. Bio-med. Eng.*, **16**, 192/196 (1969)
- (3) D. Lehmann: "Multichannel topography of human alpha EEG fields", *Electroenceph. clin. Neurophysiol.*, **31**, 439/449 (1971)
- (4) F. Perrin, J. Pernier, O. Bertrand, M.H. Giard & J.F. Echallier: "Mapping of scalp potentials by surface spline interpolation", *Electroenceph. clin. Neurophysiol.*, **66**, 75/81 (1987)
- (5) W. Gersch & J. Yonemoto: "Automatic Classification of EEGs: A Parametric Model New Features for Classification Approach", *JACC*, 762/769 (1977)
- (6) 佐藤：「脳波処理のロジック」，臨床検査，**26-11**，1406/1419 (1982)
- (7) 西田・中村・柴崎：「マルコフ過程振幅正弦波による脳波モデル」，医用電子と生体工学，**24-1**，8/14 (1986)
- (8) 西田・中村・柴崎：「脳波特徴抽出のためのパワースペクトル最適分布関数近似法」，計測自動制御学会論文集，**20-12**，1150/1155 (1984)
- (9) R. Fletcher & M.J.D. Powell: "A rapidly convergent descent method for minimization", *The Computer Journal*, **6**, 163/168 (1963)
- (10) 森下・小畑：信号処理，計測自動制御学会 (1982)
- (11) 中澤：「離散形確率システムの連続形表示への変換について」，第15回確率システムシンポジウム，4/6 (1983)

付 録

I. サンプル間隔とパラメータの関係の証明

2つのサンプル間隔 Δt と $\Delta t'$ それぞれの離散時間モデルの中のパラメータの関係式を導くにあたって，2つの離散時間モデルはいずれも同一の連続時間モデルから生み出されたという考えに基づく。

一次マルコフ過程の連続時間モデル

$$a_k^1(t) = p_k^1 a_k^1(t) + u_k(t) \dots\dots\dots (付 1)$$

を考える。ここで， $u_k(t)$ は平均値 0，分散 $(\sigma^u)^2$ の白色雑音である。これをサンプル間隔 Δt で離散化したとき，離散時間モデルは(1-2)式に示すとおり

$$a_k^1((n+1)\Delta t) = \gamma_k^1 a_k^1(n\Delta t) + \xi_k(n\Delta t) \dots\dots\dots (付 2)$$

である。ここで， γ_k^1 は

$$\gamma_k^1 = \mathcal{L}^{-1}[1/(S - p_k^1)]|_{t=\Delta t} = \exp(p_k^1 \Delta t) \dots\dots\dots (付 3)$$

であり， $\xi_k(n\Delta t)$ は

$$\xi_k(n\Delta t) = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \exp(p_k^1((n+1)\Delta t - \tau)) \times u_k(\tau) d\tau \dots\dots\dots (付 4)$$

である。ここで， $\xi_k(n\Delta t)$ の統計的性質を計算すると，平均値は

$$E(\xi_k(n\Delta t)) = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \exp(p_k^1((n+1)\Delta t - \tau)) \times E(u_k(\tau)) d\tau = 0 \dots\dots\dots (付 5)$$

分散は

$$\begin{aligned} (\sigma^{\xi_k})^2 &\triangleq E(\xi_k(n\Delta t)^2) \\ &= \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \exp(p_k^1((n+1)\Delta t - \tau)) \\ &\quad \times \exp(p_k^1((n+1)\Delta t - \tau')) E(u_k(\tau)) \\ &\quad \times u_k(\tau') d\tau d\tau' \\ &= (\sigma^u)^2 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \exp(2p_k^1((n+1)\Delta t - \tau)) d\tau \\ &= (\sigma^u)^2 ((\gamma_k^1)^2 - 1)/2p_k^1 \dots\dots\dots (付 6) \end{aligned}$$

となる。

一方，(付 1) 式の連続時間システムに対して異なったサンプル間隔 $\Delta t'$ で表した離散時間モデルを

$$a_k^{1'}((n+1)\Delta t) = \gamma_k^{1'} a_k^{1'}(n\Delta t) + \xi_k'(n\Delta t) \dots\dots\dots (付 7)$$

とする。ここで $\gamma_k^{1'}$ の値と $\xi_k'(n\Delta t)$ の分散は，(付 3)，(付 6) 式と同様に

$$\gamma_k^{1'} = \exp(p_k^1 \Delta t') \dots\dots\dots (付 8)$$

$$(\sigma^{\xi_k'})^2 = (\sigma^u)^2 ((\gamma_k^{1'})^2 - 1)/2p_k^1 \dots\dots\dots (付 9)$$

である。

両離散時間モデルを生み出す連続モデルは同一であるので，パラメータ p_k^1 と σ^u は共通である。従って，(付 3)，(付 6)，(付 8)，(付 9) 式から p_k^1 と σ^u を消去すれば，両者のパラメータには，

$$\gamma_k^{1'} = (\gamma_k^1)^{\Delta t'/\Delta t} \dots\dots\dots (付 10)$$

$$(\sigma^{\xi_k'})^2 = (\sigma^{\xi_k})^2 \frac{1 - (\gamma_k^{1'})^2}{1 - (\gamma_k^1)^2} \dots\dots\dots (付 11)$$

なる関係式が導出される。

(2-2) 式に関しても，同様の手順で計算すれば，(付 10)，(付 11) 式の代りに

$$\gamma_k^{2'} = (\gamma_k^2)^{\Delta t'/\Delta t} \dots\dots\dots (付 12)$$

$$(b_k' \sigma_k')^2 = (b_k \sigma_k)^2 \frac{1 - (\gamma_k^{2'})^2}{1 - (\gamma_k^2)^2} \dots\dots\dots (\text{付13})$$

が得られ、(付13)式に(付11)式を代入すると

$$(b_k')^2 = (b_k)^2 \frac{\{1 - (\gamma_k^{1'})^2\} \{1 - (\gamma_k^{2'})^2\}}{\{1 - (\gamma_k^{1'})^2\} \{1 - (\gamma_k^2)^2\}} \dots\dots\dots (\text{付14})$$

となる。

また、(付1)式の連続時間モデルを(付2)式の離散時間モデルへ離散化した結果は、離散時間モデルの相関関数がサンプル時点における連続時間モデルの相関関数と一致するように離散化した結果⁽¹¹⁾と一致している。

II. パワースペクトルの面積の不変性の証明

(1)式の脳波モデルの理論パワースペクトルを表す(5)式的面積を計算する。(5)式をナイキスト周波数 $1/2 \Delta t$ まで積分すると

$$S = \sum_{k=1}^K \int_0^{1/2 \Delta t} \times \left[\frac{0.25 \Delta t (\sigma_k^2)^2}{1 + (\gamma_k^1)^2 - 2 \gamma_k^1 \cos \{2\pi \Delta t (f - m_k)\}} \right]$$

$$+ \frac{0.25 \Delta t (\sigma_k^2)^2}{1 + (\gamma_k^1)^2 - 2 \gamma_k^1 \cos \{2\pi \Delta t (f + m_k)\}} df \\ = \sum_{k=1}^K 0.25 (\sigma_k^2)^2 / (1 - (\gamma_k^1)^2) \dots\dots\dots (\text{付15})$$

となる。一方、サンプル間隔 $\Delta t'$ におけるモデルの理論パワースペクトルも同様にして計算すると

$$S' = \sum_{k=1}^K 0.25 (\sigma_k^2)^2 / (1 - (\gamma_k^{1'})^2) \dots\dots (\text{付16})$$

となる。(付16)式に(11)、(13)式の関係式を代入すると

$$S' = \sum_{k=1}^K 0.25 (\sigma_k^2)^2 / (1 - (\gamma_k^1)^2) \dots\dots\dots (\text{付17})$$

となり、これは(付15)式右辺と等しく、サンプル間隔が変化しても(11)、(12)、(13)、(14)式の関係式で結ばれているモデルの理論パワースペクトルの面積は不変であることが証明された。

(2)式の脳波モデルに関しても、同様に証明することができる。