最適レギュレータ法に基づく線形離散値形モデル追従系の構成

正 員 菊 田 章 (北見工大)

正 員 神 谷 祐 二 (北見工大)

1. ま え が き

サーボ系において、入力に関する制御則を用いることによって過渡特性の向上が図られることは、従来からよく知られていたが、最適レギュレータ理論を適用した統一的な設計法が示されていなかった。しかし、最近、池田⁽¹⁾は、連続値形積分形サーボ系において、目標入力ステップである場合、定常値からの状態と入力の偏差に、内部モデル原理による積分補償の必要性から積分補償を加えた拡大系を構成し、最適レギュレータ理論を適用することによって評価関数を真の意味で最小にするという観点から制御則を導出した。その結果、入力に関する制御則の設計に対する一解法を与えた。本論文は、望ましい入出力特性を有するモデルおよび制御対象が離散時間系で与えられるとき、モデルのステップ応答に制御対象の出力を定常誤差なしに速やかに追従させる、いわゆる離散値形モデル追従系の設計および構成を状態フィードバック(FB)による場合と出力FBによる場合に関して提案するものである。すなわち、状態FBによる場合、モデルおよび制御対象に演算時間遅れを考慮した系の一階差分に、積分補償を付加した拡大系を構成し、最適レギュレータ法を適用している。この結果、まず通常の最適状態FB則が得られる。これは、古田⁽²⁾がKreindlerの手法⁽³⁾を拡張して、連続値形モデル追従系の状態FB則を得ているが、それを離散値系に適用した場合の制御則に対応する。次に、状態FB則により最小化された一階差分の拡大系に対する評価関数が差分前の拡大状態変数で表すことができること、更に

その評価関数を最小にする制御則が存在し、この制御則は、モデル入力、全状態初期値、外乱からのフィードフォワード(FF)要素を与えるものであることを明らかにしている。出力FBによる場合にも、ほぼ同様な方法で制御則が導出できる。また、構成される系の定常ロバスト性を明らかにすると共に、全状態の初期値に関する制御則の定常時における性質も考察している。更に、シミュレーションを行うことにより、差分系で導出されるFB則のみを用いるよりも、FF則を付加した制御則を用いたほうが過渡特性においてかなりの改善が見られることを示している。FF制御則の導出は、評価関数の最小化という観点から池田らの考えと同じであり、結果も類似しているが、導出手法は異なる。また、定常時における全状態の初期値に関する制御則に関して、池田らより詳細に考察している。著者らの一人によって提案された連続値形モデル追従系⁽⁴⁾⁽⁵⁾では、制御対象の出力のみが観測される場合、まずFF則が導出され、次にエラーシステムに積分要素を付加した拡大系に対して最適レギュレータ法が適用されることにより、状態FB則が導出されている。従って、今回提案するモデル追従系は、エラーシステムの概念を用いて構成された系とは異なる構造となっている。

2. 問題の設定

制御対象は、可制御・可観測な1入出力線形離散時間系

$$\left. \begin{aligned} X_p(k+1) &= A_p X_p(k) + b_p r_p(k) + E_p w(k) \\ y_p(k) &= c_p X_p(k) + f_p w(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $X_p(k)$: n 次元状態ベクトル、
 $r_p(k)$: スカラ入力、 $y_p(k)$: スカラ出力、
 $w(k)$: ステップ状スカラ外乱、 A_p, b_p, c_p, f_p : それぞれ適当な定数行列

Construction of Linear Discrete Time Model Following System
 Based on the Optimal Regulator Technique. By Akira Kikuta,
 Member & Yuji Kamiya, Member (Department of Electrical
 Engineering, Kitami Institute of Technology).

菊田 章: 正員, 北見工業大学電気工学科
 神谷祐二: 正員, 北見工業大学電気工学科

で表されるものとする。また、制御対象は次の条件

$$\begin{vmatrix} I - A_p & b_p \\ c_p & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $|\cdot|$: 行列式

を満足するものとする。(1)式に対して、演算時間遅れを1サンプリングタイム考慮すると(3)式のシステム方程式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{X}_p(k+1) &= A_p^* \bar{X}_p(k) + b_p^* u_p(k) + E_p^* w(k) \\ y_p(k) &= c_p^* \bar{X}_p(k) + f_p w(k) \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$A_p^* = \begin{bmatrix} A_p & b_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_p^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_p^* = \begin{bmatrix} E_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_p^* = [c_p \ 0], \quad r_p(k) = u_p(k-1)$$

$$\bar{X}_p(k) = [X_p^T(k) \ u_p(k-1)]^T$$

ただし、 T : 転置

次に、安定で望ましい入出力特性をもつ可制御・可観測な1入出力線形離散時間系モデルを

$$\begin{aligned} X_m(k+1) &= A_m X_m(k) + b_m v(k) \\ y_m(k) &= c_m X_m(k) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $X_m(k)$: m 次元状態ベクトル、

$v(k)$: ステップ状スカラー入力、 $y_m(k)$: スカ

ラ出力、 A_m, b_m, c_m : それぞれ適当な定数行列

として与える。モデル追従は、制御対象の出力 $y_p(k)$ をモデルの出力 $y_m(k)$ に追従させることであるため、その指標となる出力追従誤差

$$e(k) = y_m(k) - y_p(k) \dots\dots\dots (5)$$

を定義する。本論文における目的は、最適レギュレータ理論に基づいて、評価関数を最小にする制御則によってモデル追従系を構成することである。

3. 状態FBによる構成

本章では、(1)式の制御対象の全状態が直接観測可能な場合、状態FBによるモデル追従系の構成を示す。

<3・1> 差分系における制御則の導出

$$X_p^*(k) = \bar{X}_p(k+1) - \bar{X}_p(k) \dots\dots\dots (6)$$

$$X_m^*(k) = X_m(k+1) - X_m(k) \dots\dots\dots (7)$$

$$u_p^*(k) = u_p(k+1) - u_p(k) \dots\dots\dots (8)$$

(6)~(8)式で表される一階差分の変数をそれぞれ定義すると、(3)、(4)式の状態方程式から、外乱 $w(k)$ およびモデル入力 $v(k)$ がステップ状であることを考慮すれば、拡大系

$$X(k+1) = AX(k) + bu_p^*(k) \dots\dots\dots (9a)$$

ここで、

$$X(k) = [X_p^{*T}(k) \ e(k) \ X_m^{*T}(k)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_m \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} A_p^* & 0 \\ -c_p^* & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_{11} = \begin{bmatrix} b_p^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

を導くことができる。更に、(5)式から $e(k)$ は

$$e(k) = cX(k) \dots\dots\dots (9b)$$

ここで、 $c = [c_{11} \ 0]$, $c_{11} = [0 \ 1]$

と表すことができる。(9)式の系に対して、評価関数

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} [X^T(k) Q X(k) + r u_p^{*2}(k)] \dots\dots (10)$$

ここで、 $Q = c^T q c$, $q > 0$, $r > 0$

を定義する。この評価関数を最小とする制御則を求める問題は、通常の最適レギュレータ問題であり、よく知られているように、その最適制御則は⁽⁶⁾⁽⁷⁾

$$u_p^*(k) = KX(k) \dots\dots\dots (11)$$

となる。 K は離散値形リカッチ方程式

$$\begin{aligned} K^i &= -[r + b^T P^{i-1} b]^{-1} b^T P^{i-1} A \\ P^i &= Q + A^T P^{i-1} (A + bK^i) \\ P^0 &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \dots\dots (12)$$

の定常解 ($K=K^\infty$) であり、(9)式の系が可安定・可検出である(付録参照)から

$$P^\infty = P \geq 0 \dots\dots\dots (13)$$

が成立し、閉ループ系の安定性が保証される。リカッチ方程式の計算において、計算誤差、計算時間を考慮すれば、対象となる行列サイズは小さいほど望ましい。(12)式のリカッチ方程式は、行列 A, b, c の構造から次のように分割して計算できる。すなわち、 $K = [K_1 \ K_m]$ とすると、 K_1 は

$$\begin{aligned} K_1^i &= -[r + b_{11}^T p_{11}^{i-1} b_{11}]^{-1} b_{11}^T p_{11}^{i-1} A_{11} \\ p_{11}^i &= c_{11}^T q c_{11} + A_{11}^T p_{11}^{i-1} (A_{11} + b_{11} K_1^i) \\ p_{11}^0 &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

の定常解 ($K_1 = K_1^\infty$, $p_{11} = p_{11}^\infty$) で、 K_m は

$$\begin{aligned} K_m &= -[r + b_{11}^T p_{11} b_{11}]^{-1} b_{11}^T \\ &\quad \times (p_{11} A_{12} + p_{21}^T A_m) \\ p_{21} &= \sum_{i=0}^{\infty} (A_m^T)^i A_{12}^T p_{11} (A_{11} + b_{11} K_1)^{i+1} \end{aligned} \dots\dots (15)$$

として得ることができる。系 (A_{11}, b_{11}, c_{11}) は可制御・可観測(ある条件のもとでは可検出となることがあるが、そのときは評価関数における c_{11} を変更すれば、(14)式において、 (c_{11}, A_{11}) を可観測にすることができ。: 付録参照) で、 $A_m, A_{11} + b_{11} K_1$ が安定行列⁽⁸⁾ となることから、 p_{21} の収束性は保証され

$$p_{11} > 0 \dots\dots\dots (16a)$$

が成立し, P は

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21}^T \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \dots\dots\dots (16b)$$

$$I_{\min} = X^T(0)PX(0) \dots\dots\dots (17)$$

(3.2) 原系のもとで評価関数を最小にする制御則の導出 (11)式の最適制御則 $u_p^*(k)$ を(6)式～(8)式の考慮のもとで $u_p(k)$ に戻し、その際

$$\alpha(k+1) - \alpha(k) = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$u_p(k) = KX_1(k) + \alpha(k) \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1(k) &= [\bar{X}_p^T(k) Z(k) X_m^T(k)]^T \\ Z(k) &= \sum_{i=0}^{k-1} e(i) \\ Z(k+1) &= Z(k) + e(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

$$X_1(k+1) = (A + bK)X_1(k) + E^*X_2(k) + b\alpha(k) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$X_2(k)=[w(k) \ v(k)]^T$$

$$E^*=\begin{bmatrix} b_w & 0 \\ 0 & b_m \end{bmatrix}, \quad b_w=\begin{bmatrix} E_p^* \\ -f_p \end{bmatrix}$$

$$X(k) = A_1 X_1(k) + E^* X_2(k) + b a(k) \quad \cdots (22)$$

$$a(0) = M_0 X_1(0) + M X_2(0) \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} M_0 &= -[b^T P b]^{-1} b^T P A_1 \\ &= -[b_{11}^T p_{11} b_{11}]^{-1} b_{11}^T [p_{11}, p_{21}^T] A_1 \end{aligned} \quad (24a)$$

図 1 全状態FBによるモデル追従系
Fig. 1. Model following system using full state feedback.

るから

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} I_{\min} &= I^0_{\min} - \alpha^T(0) b^T P b \alpha(0) \\ &= [(A_1 + bM_0)X_1(0) + (E^* + bM)X_2(0)]^T \\ &\quad \times P[(A_1 + bM_0)X_1(0) \\ &\quad + (E^* + bM)X_2(0)] \\ &\geq 0 \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$I_{\min}^0 = \min_a I_{\min} + \alpha^T(0) b^T P b \alpha(0) \geq \min_a I_{\min} \geq 0$$

..... (26)

$$\alpha(k) = M_0 X_1(0) + M X_2(k) \dots \dots \dots (27)$$

$$K_1 = [K_p \ K_u \ K_e], \quad M = [K_w \ K_v] \dots\dots\dots (28)$$

4. 状態 FB モデル追従系の定常特性

本章では、第3章で構成される状態FBモデル追従系の定常特性に関して考察する。(21)式に(27)式を代入し

$$X_1(k+1) = (A + bK)X_1(k) + (E^* + bM)X_2(k) + bM_0X_1(0) \dots\dots\dots (29 \text{ a})$$

$$y_p(k) = [c^* \ 0]X_1(k) + [f_p \ 0]X_2(k) \quad \cdots (29 \text{ b})$$

を Z 変換し、 $\{ZI - (A + bK)\}^{-1}$ にマトリクスインバージョンレンマ⁽⁸⁾を適用して、制御対象の出力の定常値は

$$y_p(\infty) = \{c^*[I - (A_{11} + b_{11}K_1)]^{-1}(b_w + b_{11}K_w) + f_p, c^*[I - (A_{11} + b_{11}K_1)]^{-1} \times \{b_{11}K_v + (A_{12} + b_{11}K_m)(I - A_m)^{-1}b_m\} \times X_2(0) + c^*[I - (A_{11} + b_{11}K_1)]^{-1} \times b_{11}M_0X_1(0) \dots\dots\dots (30)$$

と表せる。更に、マトリクスインバージョンレンマを適用して計算すると、まず閉ループ系の安定性が保証されることから、

$$|I - (A_{11} + b_{11}K_1)| = |c_p \text{adj}(I - A_p)b_p K_e| \neq 0 \dots\dots\dots (31)$$

の関係を、(2)式の仮定より $K_e \neq 0$ が保証される。従って、(31)式を考慮すれば

$$c^*[I - (A_{11} + b_{11}K_1)]^{-1} = \{[I - \{c_p \text{adj}(I - A_p)b_p K_e\} \times \{c_p \text{adj}(I - A_p)b_p K_e\}^{-1}] \times c_p^*[I - (A_p^* + b_p^*[K_p K_u])]\}^{-1}, \{c_p \text{adj}(I - A_p)b_p K_e\} \{c_p \text{adj}(I - A_p)b_p K_e\}^{-1} \} = [0 \ I] \dots\dots\dots (32)$$

を得るので、結局

$$c^*[I - (A_{11} + b_{11}K_1)]^{-1}(b_w + b_{11}K_w) + f_p = 0 \\ c^*[I - (A_{11} + b_{11}K_1)]^{-1}\{b_{11}K_v + (A_{12} + b_{11}K_m) \times (I - A_m)^{-1}b_m\} = c_m(I - A_m)^{-1}b_m \\ c^*[I - (A_{11} + b_{11}K_1)]^{-1}b_{11}M_0 = 0$$

を得る。(32)式は A_p, b_p, c_p, E_p, f_p のパラメータが変動しても成立し、(30)式は

$$y_p(\infty) = c_m(I - A_m)^{-1}b_mv(0) \quad [=y_m(\infty)] \dots\dots\dots (33)$$

となり、定常出力追従誤差 $e(\infty)$ は零になる。

5. 全状態の初期値に関する制御則について

本章では、(27)式に含まれる状態の全初期値に関する制御則について考察する。(29a)式より定常時の状態は

$$X_1(\infty) = -A_1^{-1}\{(E^* + bM)X_2(0) + bM_0X_1(0)\} \dots\dots\dots (34)$$

となる。新たな制御において、全状態の初期値に関する制御則を(24)式の考慮のもとで計算すると、制御対象のパラメータが変動しないならば、

$$M_0X_1(\infty) = M_0X_1(0) \dots\dots\dots (35)$$

が成立する。すなわち、(35)式は、 $X_2(k)$ がステップ状に変化しても新たな制御において全状態の初期値に関する制御則は変わらないことを意味している。この結果は、池田ら⁽¹⁾の制御則からも導くことができる。

一般に(35)式は零にならない。従って、 $M_0X_1(0) \rightarrow 0$ [任意の $X_p(0), X_m(0)$ に対して、 $M_0X_1(0) = 0$ となるように $Z(0)$ を決める。あるいは $X_1(0) = X_1(-\infty) = 0$ のもとでの定常値と考えれば可能] とすると、 $k \geq 0$ において、 $X_2(k)$ が定常状態においてのみ変化するならば、新たな制御においても(35)式の関係から全状態の初期値に関する制御則は常に零となるため必要がなくなる。しかし、一般的状況($X_2(k)$ の変化が定常状態以外で生じる場合、あるいは $X_2(k)$ の変化が定常状態で生じても制御対象のパラメータが変動する場合)を考えるならば、全状態の初期値に関する制御則は考慮されなければならない。

6. 出力FBによる構成

本章では、(1)式の制御対象の出力 $y_p(k)$ のみが直接観測可能な場合、出力FBによるモデル追従系の構成を示す。制御対象の全状態が観測可能なことは非常に希であり出力FBによる構成は、実用的観点から意義深いものと思われる。

〈6・1〉 差分系における制御則の導出 新たな変数 $U_p^*(k) = [u_p^*(k) \ u_p^*(k+1) \ \dots \ u_p^*(k+n-2)]^T$ を導入すると、(9)式に対応する拡大系のシステム方程式として

$$(i) \quad n=1 \text{ の場合: (9)式} \\ (ii) \quad n>1 \text{ の場合:} \\ X(k+1) = AX(k) + bu_p^*(k+n-1) \dots\dots (36) \\ e(k) = cX(k)$$

ここで、

$$X(k) = [X_p^{*T}(k)e(k)U_p^{*T}(k)X_m^{*T}(k)]^T \\ A_{11} = \begin{bmatrix} A_p^* & 0 & b_p^*c_u \\ -c_p^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_u \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ b_{11} = [0 \ 0 \ 0 \ b_u^T]^T, \quad c_{11} = [0 \ 1 \ 0] \\ A_u = \begin{bmatrix} 0 & I \\ & \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_u = [10 \ \dots \ 0]$$

を得る。(i)あるいは(ii)の系に対して、(10)式に対応する評価関数

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} [X^T(k)QX(k) + ru_p^{*2}(k+n-1)] \dots\dots\dots (37)$$

ここで、 $Q = c^Tqc$, $q > 0$, $r > 0$

を定義する。この評価関数を最小とする最適制御則は

$$u_p^*(k+n-1) = KX(k) = [K_1 \ K_m]X(k) \quad (38)$$

となる。 K, K_1, K_m, P に関しては、〈3・1〉節の議論がそのまま成り立ち、差分系における(37)式の評価関数の最小値は(17)式で表される。なお、リカッチ方程式において、系 (A_{11}, b_{11}, c_{11}) の可制御・可観測性および系 (A, b, c) の可安定・可検出性は付録と同様に示すことができる。(証明略)

〈6・2〉 原系のもとで評価関数を最小にする制御則の導出 〈3・2〉節における $u_p^*(k), u_p(k)$ を $u_p^*(k+n-1), u_p(k+n-1)$ にそれぞれ置き換えると〈3・2〉節の議論が成り立つ。ただし、(19)式に対応する式は

$$u_p(k+n-1) = KX_1(k) + \alpha(k) \cdots \cdots (39)$$

となる。ここで、

$$X_1(k) = [\bar{X}_p^T(k)Z(k)U_p^T(k)X_m^T(k)]^T$$

$$U_p(k) = [u_p(k)u_p(k+1)\cdots u_p(k+n-2)]^T$$

である。更に、(21)、(28)式において、

$$b_w = [E_p^* - f_p 0]^T, \quad K_1 = [K_p \ K_u \ K_e \ \bar{K}_u]$$

である。すなわち、原系のもとで評価関数を最小化する制御則は(27)、(39)式で表される。なお、全状態の初期値に関する制御則について、モデル追従系の全系の状態方程式が(29a)式(ここで、 $c^* = [c_p^* \ 0 \ 0]$ である)で表されることから第5章の議論がそのまま適用できる。しかし、出力FBにおいて、制御対象の状態が観測できないため、全状態の初期値に関する制御則は一般に用いることができない。

〈6・3〉 出力FBによるモデル追従系の構成 〈6・2〉節までの議論の結果は、まだ状態FBの形になっている。以下に、出力FB形への変換および出力FBモデル追従系の構成を示す。

(3)～(5)式より

$$\begin{aligned} E(k) = & L_m X_m(k) - L_p X_p(k) + L_v v(k) \\ & - \bar{L}_u U_p(k) - L_u u_p(k-1) - L_w w(k) \\ & \cdots \cdots \cdots (40) \end{aligned}$$

ここで、

$$E(k) = [e(k)e(k+1)\cdots e(k+n-1)]^T$$

$$L_m = \begin{bmatrix} c_m \\ c_m A_m^{n-1} \end{bmatrix}, \quad L_p = \begin{bmatrix} c_p \\ c_p A_p^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$L_v = \begin{bmatrix} 0 \\ c_m b_m \\ c_m b_m + c_m A_m b_m \\ \vdots \\ c_m b_m + \cdots + c_m A_m^{n-2} b_m \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_u = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 0 & & & \\ c_p b_p & & & \\ & & 0 & 0 \\ c_p A_p^{n-3} b_p & \cdots & c_p b_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_u = \begin{bmatrix} 0 \\ c_p b_p \\ c_p A_p^{n-2} b_p \end{bmatrix}$$

$$L_w = \begin{bmatrix} f_p \\ f_p + c_p E_p \\ f_p + c_p E_p + \cdots + c_p A_p^{n-2} E_p \end{bmatrix}$$

の関係を得る。(1)式の制御対象が可観測であるから L_p^{-1} は存在する。従って、(39)、(40)式から $X_p(k)$ を消去して、整理すると

$$\begin{aligned} u_p(k+n-1) = & [a_1 \cdots a_{n-1}]U_p(k) + u(k) \\ & + [\beta_1 \cdots \beta_n]E(k) \cdots \cdots (41) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [a_1 \cdots a_{n-1}] &= \bar{K}_u - K_p L_p^{-1} \bar{L}_u \\ [\beta_1 \cdots \beta_n] &= -K_p L_p^{-1} \\ u(k) &= K_e Z(k) + K_m^* X_m(k) + K_u^* u_p(k-1) \\ &\quad + K_v^* v(k) + K_w^* w(k) + M_0 X_1(0) \\ K_m^* &= [K_m + K_p L_p^{-1} L_m] \\ K_u^* &= [K_u - K_p L_p^{-1} L_u] \\ K_v^* &= [K_v + K_p L_p^{-1} L_v] \\ K_w^* &= [K_w - K_p L_p^{-1} L_w] \\ &\cdots \cdots \cdots (42) \end{aligned} \right\}$$

を得る。(41)式は、

$$\left. \begin{aligned} H(k+1) &= A_h H(k) + b_{h1} e(k) + b_{h2} u(k) \\ u_p(k) &= c_h H(k) + b_n e(k) \end{aligned} \right\} (43)$$

ここで、 $H(k)$ は $(n-1)$ 次元状態ベクトル

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & & I \\ \vdots & & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_{h1} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

図 2 出力 FB によるモデル追従系
Fig. 2. Model following system using output feedback.

$$\left. \begin{aligned} b_{n2} &= [0 \cdots 01]^T, \quad c_n = [10 \cdots 0] \\ b_n &= \beta_n \\ b_{n-1} &= \beta_{n-1} + a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} &= \beta_{n-2} + a_{n-1}b_{n-1} + a_{n-2}b_n \\ &\vdots \\ b_1 &= \beta_1 + a_{n-1}b_2 + a_{n-2}b_3 + \cdots + a_1b_n \end{aligned} \right\} \cdots (44)$$

のシステム方程式に等価である⁽⁹⁾から、出力 FB モデル追従系が実現できる。その構成を図 2 に示す。

7 出力 FB モデル追従系の定常特性

本章では、前章で構成される出力 FB モデル追従系の定常特性に関して考察する。

$$u_p(k-1) = c_u^* \bar{X}_p(k) \cdots \cdots (45)$$

ここで、 $c_u^* = [0 \ 1]$

と表せるので、(3)~(5)、(20)、(43)式より出力 FB モデル追従系の全系のシステム方程式は

$$\left. \begin{aligned} X_1^*(k+1) &= \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ 0 & A_m \end{bmatrix} X_1^*(k) \\ &+ \begin{bmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_m \end{bmatrix} X_2(k) + \begin{bmatrix} d^* \\ 0 \end{bmatrix} X_1(0) \\ y_p(k) &= [c^* \ 0] X_1^*(k) + [f_p \ 0] X_2(k) \end{aligned} \right\} \cdots (46)$$

ここで、

$$\begin{aligned} X_1^*(k) &= [\bar{X}_p^T(k) \ Z(k) \ H^T(k) \ X_m^T(k)]^T \\ A_{11}^* &= \begin{bmatrix} A_p^* - b_p^* b_n c_p^* & 0 & b_p^* c_h \\ -c_p^* & 1 & 0 \\ -b_{n1} c_p^* + b_{n2} K_u^* c_u^* & b_{n2} K_e & A_h \end{bmatrix} \\ A_{12}^* &= \begin{bmatrix} b_p^* b_n c_m \\ c_m \\ b_{n1} c_m + b_{n2} K_m^* \end{bmatrix}, \quad d^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{n2} M_0 \end{bmatrix} \\ b_{11}^* &= \begin{bmatrix} E_p^* - b_p^* b_n f_p \\ -f_p \\ -b_{n1} f_p + b_{n2} K_v^* \end{bmatrix}, \quad b_{12}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{n2} K_v^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表せるので、第 4 章のような行列演算の操作により、制御対象の出力の定常値は

$$y_p(\infty) = [c^*(I - A_{11}^*)^{-1} \{b_{11}^*, b_{12}^* + A_{12}^* \times (I - A_m)^{-1} b_m\} + [f_p \ 0]] X_2(0) + c^*(I - A_{11}^*)^{-1} d^* X_1(0) \cdots \cdots (47)$$

となる。一方、出力 FB の形に変換する前の状態 FB の段階において、モデル追従系の全系のシステム方程式は(29)式で表され、閉ループ系の安定性が保証されるので、 $|I - (A_{11} + b_{11} K_1)| \neq 0$ より(31)式と同一条件を得る。従って、(31)式を考慮すれば、(32)式を導いたような計算により

$$c^*(I - A_{11}^*)^{-1} = [0 \ I] \cdots \cdots (48)$$

を得るので、

$$\begin{aligned} c^*(I - A_{11}^*)^{-1} b_{11}^* + f_p &= 0 \\ c^*(I - A_{11}^*)^{-1} \{b_{12}^* + A_{12}^* (I - A_m)^{-1} b_m\} \\ &= c_m (I - A_m)^{-1} b_m \\ c^*(I - A_{11}^*)^{-1} d^* &= 0 \end{aligned}$$

となる。(48)式は制御対象のパラメータが変動しても成立し、結局(47)式は(33)式となって、定常出力追従誤差 $e(\infty)$ は零になる。

8. シミュレーション

本論文で提案したモデル追従系の有効性を示すため、次の例題に対して適用する。制御対象は、サンプリングタイム $T = 30 \text{ ms}$ で

$$\begin{aligned} X_p(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.1264E-1 & 1.11264 \end{bmatrix} X_p(k) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_p(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k) \\ y_p(k) &= [1.9098E-3, 3.3156E-3, 1.6280E-3] \\ &\times X_p(k) \end{aligned} \cdots \cdots (49)$$

として与えられ、モデルは

$$\begin{aligned} \dot{X}_m &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.414 \end{bmatrix} X_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y_m &= [1, 0] X_m \end{aligned} \cdots \cdots (50)$$

を 30 ms で離散値化した系を考える。モデル追従系は $t=0$ において $X_1(-\infty)=0$ 、モデル入力 $v=0$ 、外乱 $w=0$ のもとで定常状態にあるものとする。状態 FB (出力 FB) の場合、(9)式[(36)式]の拡大系を構成する。評価関数(10)式[(37)式]における重み $r=1$ 、 q を与え、(14)、(15)式より状態 FB ゲイン K を、

表 1 状態 FB と出力 FB によるモデル追従系の状態 FB ゲインと FF 要素

Table 1. The state FB gains and FF elements in the model following systems using state FB or output FB.

状態 FB	q	$K=[(K_p) K_w K_v (K_m)]$	$M=[K_w K_v]$
	0.005	$(-1.3283 E-4, 3.3586 E-3, -3.3581 E-2, -3.3044 E-2, 6.9552 E-2, (2.8390, 1.4981))$	$(-1.0165, 1.3732)$
	0.05	$(-4.1469 E-4, 5.4821 E-3, -6.0419 E-2, -5.8742 E-2, 2.1713 E-1, (6.8078, 2.7073))$	$(-1.0294, 1.4010)$
出力 FB	q	$K=[(K_p) K_w K_v (K_m)]$	$M=[K_w K_v]$
	0.005	$(-1.3283 E-4, 3.4796 E-3, -3.4655 E-2, -3.4118 E-2, 6.9552 E-2, (-3.3581 E-2, -3.3044 E-2), (2.8870, 1.5390))$	$(-1.0496, 1.4111)$
	0.05	$(-4.1469 E-4, 5.8599 E-3, -6.3773 E-2, -6.2096 E-2, 2.1713 E-1, (-6.0419 E-2, -5.8742 E-2), (7.0745, 2.8803))$	$(-1.0882, 1.4917)$

表 2 出力 FB によるモデル追従系の設計値

Table 2. The designed values in the model following system using output FB.

出力 FB	q	$[a_1 a_2 b_1 b_2 b_3 K_w^* K_v^* (K_m^*) K_v^* K_v^*]$
	0.005	$(-2.5471 E-2, -3.3044 E-2, -3.5944 E-2, -6.4735 E-1, 4.9816, -9.3643 E-3, 6.9552 E-2, (-1.6729, 1.2668), -1.0167, 1.4026)$
	0.05	$(-4.5652 E-2, -5.8742 E-2, -1.200 E-1, -1.3099, 9.0707, -1.6856 E-2, 2.1713 E-1, (-1.4209, 2.3816), -1.0281, 1.4762)$

図 3 図 1 における y_m と y_p のステップ応答
Fig. 3. Step responses of y_m and y_p in Fig. 1. 図 4 図 2 における y_m と y_p のステップ応答
Fig. 4. Step responses of y_m and y_p in Fig. 2.

(24b)式から FF 要素 M を求めると表 1 のように得られ、状態 FB の場合は図 1 の設計値となる。出力 FB の場合には、更に K, M を (42), (44) 式で変換すると、図 2 の設計値は表 2 のように得られる。いま、仮定のもとで $X_i(0)=0$ 、すなわち FF 制御則 $M_0 X_i(0)=0$ である。 $t \geq 0_+$ で $v=1$ 、 $w=-1$ と変化するとき、図 1 (図 2) を構成した場合の応答結果を図 3 (図 4) の実線にて示す。図 3、図 4 には、FF 要素 K_v 、 K_w の制御効果を見るために、これらを除いた場合の応答 (破線) も示す。過渡特性が非常に改善されることが知れる。また、外乱が観測できない場合には、外乱からの FF 要素 K_w を用いることができない。この場合には、安易に FF 要素 K_v を用いるべきではない。すなわち、もはや評価関数における (26) 式の関係は満足されないからである。従って、 K_v を用いるか否かは、予想される外乱 w に対して $M=[0 K_v]$ として計算される (25) 式の評価関数の値が $I_{\min}^0$ の値よりも小さいか否かにかかってくる。もし、小さくなるようであれば K_v の制御効果が期待できる。この例題に

おいては、すべて $I_{\min}^0 > I_{\min}(K_w=0)$ が満足されており、その応答は図 3、図 4 に一点鎖線で示してある。モデル入力からの FF 要素 K_v の制御効果が明らかに現れている。

9. 終りに

本論文では、モデル入力および外乱がステップ状である場合、最適レギュレータ法を適用して、評価関数を最小にするという観点から、統一的に FB および FF 則を導出することによって、離散値形モデル追従系 (状態 FB による場合と出力 FB による場合) を構成する手法を示した。すなわち、導出された制御則には、従来の連続値形モデル追従系の FB 則⁽²⁾に対応する FB 則に加えて、新たにモデル入力、外乱および全状態の初期値からの FF 要素が付加されることが明らかになった。構成された系の定常特性は、制御対象にパラメータ変動やステップ状外乱が存在しても保持される。更に考察の結果、モデル入力および外乱が定常状態でのみ変化し、かつ制御対象のパラメータが変動

しない場合に限り、全状態の初期値に関する制御則は保持される（変更の必要がない）ことが明らかになった。最後に、シミュレーションを行うことにより、構成された系の有効性を示すと共に、外乱が観測できない場合には、外乱からの FF 要素を用いることができず、もはや原系における評価関数を最小化することはできないが、予想される外乱に対して、外乱からの FF 要素を零としたときの評価関数が、FB 則のみの場合の評価関数より小さければ、モデル入力からの FF 要素を導入したほうが過渡特性が改善されることを示した。本手法は、多入出力系への拡張、モデル入力および外乱が線形多項式の場合への拡張が比較的容易にできる。これらに関しては、機会をあらためて報告したい。（昭和 63 年 11 月 25 日受付）

文 献

- (1) 池田・須田：「積分型最適サーボ系の構成」，計測自動制御学論，24, 40 (昭 63-1)
- (2) 古田・小宮：「線形多変数系に対するモデル追従形サーボコントローラの設計」，同上，18, 8 (昭 57-1)
- (3) E. Kreindler："On the linear optimal servo problem", *Int. J. Control*, 9, 465 (1969)
- (4) Y. Kamiya："Servo-system design technique utilising sensitivity as a design parameter", *IEE Proc. (D)*, 130, 209 (1983)
- (5) Y. Kamiya："Multivariable servo-system design technique using sensitivity as design parameter", *ibid.*, 134, 333 (1987)
- (6) 木村：「多変数制御系の理論と応用-I」，システムと制御，22, 293 (昭 53-5)
- (7) 木村・藤井：「多変数制御系の理論と応用-III」，同上，22, 426 (昭 53-7)
- (8) 児玉・須田：システム制御のためのマトリクス理論 (昭 53) 計測自動制御学会
- (9) K. Ogata：MODERN CONTROL ENGINEERING (1970) Prentice-Hall

付 録

(A_p, b_p) の可制御性， (c_p, A_p) の可観測性の仮定は、任意の複素数 λ に対して、それぞれ次の条件

- (1) $\text{rank}[\lambda I - A_p, b_p] = n$
- (2) $\text{rank}[(\lambda I - A_p)^T, c_p^T]^T = n$

が成立することに等価である⁽⁶⁾⁽⁷⁾。また、可安定、可検出の条件は、 $|\lambda| \geq 1$ に対して、それぞれ条件(1)，(2)が成立することに等価である。更に、モデルの安定性が仮定されているので、 $|\lambda| \geq 1$ に対して、

- (3) $\text{rank}[\lambda I - A_m] = m$

が成立する。

- (i) (A_{11}, b_{11}) の可制御性は、任意の λ に対して、

$\text{rank}[\lambda I - A_{11}, b_{11}] = n+2$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} & \text{rank}[\lambda I - A_{11}, b_{11}] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A_p & -b_p & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ c_p & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda \neq 1$ の場合：条件(1)より

$$\begin{aligned} \text{rank}[\lambda I - A_{11}, b_{11}] &= 2 + \text{rank}[\lambda I - A_p, b_p] \\ &= n+2 \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ の場合：(2)式の仮定より

$$\begin{aligned} \text{rank}[\lambda I - A_{11}, b_{11}] &= 1 + \text{rank} \begin{bmatrix} I - A_p & -b_p \\ c_p & 0 \end{bmatrix} \\ &= n+2 \end{aligned}$$

従って、可制御である。

(ii) (c_{11}, A_{11}) の可観測（可検出）性は、任意の $\lambda (|\lambda| \geq 1)$ に対して、 $\text{rank}[(\lambda I - A_{11})^T, c_{11}^T]^T = n+2$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} & \text{rank}[(\lambda I - A_{11})^T, c_{11}^T]^T \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A_p & -b_p & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ c_p & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$ の場合：条件(2)より

$$\begin{aligned} \text{rank}[(\lambda I - A_{11})^T, c_{11}^T]^T &= 2 + \text{rank}[(\lambda I - A_p)^T, c_p^T]^T \\ &= n+2 \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ の場合：

- (4) $c_p \text{adj}(A_p) b_p \neq 0$ ならば、

$$\begin{aligned} \text{rank}[(\lambda I - A_{11})^T, c_{11}^T]^T &= 1 + \text{rank} \begin{bmatrix} -A_p & -b_p \\ c_p & 0 \end{bmatrix} \\ &= n+2 \end{aligned}$$

従って、一般に可検出であるが、条件(4)が満足されるならば、可観測である。

しかし、条件(4)が満足されない場合、(10)式の評価関数において、 $c_{11} \rightarrow [c_1, 0, 1]$ として $e(k)$ の評価に $X_p(k)$ に関する評価を加え、 $c_1 \text{adj}(A_p) b_p \neq 0$ なる c_1 を選択するならば、(14)式のリカッチ方程式における (c_{11}, A_{11}) を可観測にすることができる。

(iii) (A, b) の可安定性は、(i)の結果と条件(3)より、 (c, A) の可検出性は、(ii)の結果と条件(3)よりそれぞれ容易に示すことができる。