ファジー ISM の具象化フェーズにおける 相互連関行列の効率的生成アルゴリズム

正 員 大 内 東 (北海道大)
正 員 加 地 郁 夫 (北海道工大)

1. はじめに

ISM (Interpretive Structural Modeling) は、Warfield によって開発されたシステム構造を明確にする構造モデリングの代表的手法の一つである⁽¹⁾。ISM ではシステム構成要素集合とその上の反射的かつ推移的二項関係 (擬順序) に着目し、要素対の相互関係から全体の構造を把握しようとする。

著者らは従来の ISM を理論とアルゴリズムの両面から改良し、より柔軟で使いよい ISM、フレキシブル ISM を開発している^{(2)~(4)}。

以下のような動機から二値行列を利用する ISM の拡張が考えられている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

従来の ISM では、「要素 s_i は要素 s_j と R の関係にあるか?」というコンピュータからの質問に対して、「Yes」または「No」で答え、システム構造を二値行列で表現していた。しかし、実際の応用において、「Yes」または「No」で答えるのではなく、関係の強さを考慮したい場合や、はっきりと「Yes」または「No」で答えることができない場合も多い。このように、関係の強さあるいは曖昧さを考慮した ISM が必要とされる。

Ragade⁽⁵⁾ は、この点を考慮して ISM を拡張し、要素間の 2 項関係の有無をファジー化したファジー ISM を提案している。Ragade の方法はファジー ISM の具象化過程において、ファジー結合行列を利用して、具象化の効率化を図るものである。

本論文では、Ragade のファジー ISM において重要な相互連関行列について、幾つかの新知見を得たので報告する。すなわち、基本相互連関行列を既知の要素で表現し、その推移的閉包である完全相互連関行列を陽に求め、この結果を使って完全相互連関行列を生成する効率的アルゴリズムを提案する。これらは従来の二値行列理論のもとで得られた結果がファジー理論のもとでも成り立つという興味あるものである^{(7)~(9)}。

2. 諸定義, 諸定理

本論文で使用する諸記号, 諸定義およびこれまで知られている諸定理について述べる⁽¹⁰⁾。

〈2・1〉 諸記号, 諸定義

- (1) $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$: システム要素集合。
- (2) N : システム要素集合 S に対応する添字集合。
- (3) M : ファジー構造行列, $s_i, s_j \in S$ が関係 R にある強さの度合を表す数値を要素とする行列; $0 \leq m_{ij} \leq 1$ for all $i, j \in N$ 。

(4) ファジー二項関係 R とは、直積 $S \times S$ 上のファジー集合であり、

$$\mu_R : S \times S \rightarrow [0, 1] \quad \dots\dots\dots (1)$$

なるメンバシップ関数 μ_R によって特徴づけられる。

- (5) S 上のファジー二項関係は第 (i, j) 成分 m_{ij} が

$$m_{ij} = \mu_R(s_i, s_j) \quad \dots\dots\dots (2)$$

である、 $n \times n$ ファジー行列 M によって表すことができる。 μ_R は区間 $[0, 1]$ 内の値をとるので、ファジー行列の成分も $[0, 1]$ 内の値をとる。

(6) ファジー二項関係 R は、 S を節点集合、 $S \times S$ を枝集合とし、枝 (s_i, s_j) に重み $\mu_R(s_i, s_j)$ を付加して定義した有向グラフと一対一に対応する。

(7) $\alpha \in [0, 1]$ に対し、ファジー関係 R の α レベル集合 R_α とは、

$$R_\alpha = \{(s_i, s_j) | \mu_R(s_i, s_j) \geq \alpha\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

で定義される非ファジー (通常の) 関係である。

An Efficient Algorithm for Generating The Interconnection Matrix in the Embedding Phase of Fuzzy ISM. By Azuma Ohuchi, Member (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University) & Ikuo Kaji, Member (Department of Electrical Engineering, Hokkaido Institute of Technology).

大内 東: 正員, 北海道大学工学部情報工学科

加地郁夫: 正員, 北海道工業大学電気工学科

(8) ファジー二項関係 R, S の包含, 和, 積を以下のように定義する。

包含:

$$R \subset S \iff \mu_R(s_i, s_j) \leq \mu_S(s_j, s_k) \dots\dots\dots (4a)$$

和:

$$R \cup S \iff \mu_{R \cup S}(s_i, s_j) = \max\{\mu_R(s_i, s_j), \mu_S(s_i, s_j)\} \dots\dots\dots (4b)$$

積:

$$R \cap S \iff \mu_{R \cap S}(s_i, s_j) = \min\{\mu_R(s_i, s_j), \mu_S(s_i, s_j)\} \dots\dots\dots (4c)$$

(9) ファジー二項関係 R の (minmax) 合成 R^2 とは,

$$R^2 \iff \mu_{R^2}(s_i, s_k) = \max_{s_j} \{\min\{\mu_R(s_i, s_j), \mu_R(s_j, s_k)\}\} \dots\dots\dots (5)$$

(10) ファジー関係 R の逆ファジー関係 R^c とは $\mu_{R^c}(s_j, s_i) = \mu_R(s_i, s_j) \dots\dots\dots (6)$

(11) R をファジー二項関係とする。すべての $s_i, s_j, s_k \in S$ に対し,

R が反射的であるとは,

$$\mu_R(s_i, s_i) = 1 \dots\dots\dots (7a)$$

R が推移的であるとは,

$$\max_{s_j} \{\min\{\mu_R(s_i, s_j), \mu_R(s_j, s_k)\}\} \leq \mu_R(s_i, s_k) \dots\dots\dots (7b)$$

R が対称的であるとは,

$$\mu_R(s_i, s_j) = \mu_R(s_j, s_i) \dots\dots\dots (7c)$$

R が反対称的であるとは,

$$\mu_R(s_i, s_j) > 0, \mu_R(s_j, s_i) > 0 \rightarrow s_i = s_j \dots\dots\dots (7d)$$

が成立するときをいう。

(12) ファジー二項関係 R に対して,

(i) R が擬順序 (関係) であるとは反射的かつ推移的であるとき

(ii) R が半順序 (関係) であるとは反射的, 推移的かつ反対称的であるとき

(iii) R が同値関係とは反射的, 推移的かつ対称的であるとき

をいう。

(13) R を S 上のファジー関係とする。 R の推移的閉包 R^* を以下で定義する。

$$R^* = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \dots\dots\dots (8)$$

(14) ファジー行列 M の成分に対する演算として, $+$ と $\cdot$ でそれぞれ $\max$ と $\min$ を表す。すなわち,

$$m_{ij} + m_{pq} = \max\{m_{ij}, m_{pq}\} \dots\dots\dots (9a)$$

$$m_{ij} \cdot m_{pq} = \min\{m_{ij}, m_{pq}\} \dots\dots\dots (9b)$$

(15) ファジー行列 A, B に対して次の演算を定義する。

$$(A+B)_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\} \dots\dots\dots (10a)$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \max_k \{\min\{a_{ik}, b_{kj}\}\} \dots\dots\dots (10b)$$

(18) ファジー擬順序に対応するファジー行列をファジー可到達行列という。

〈2・2〉 諸定理

[定理1] ファジー擬順序, ファジー半順序, ファジー同値関係の α レベル集合は通常の擬順序, 半順序, 同値関係である⁽¹⁰⁾。

[定理2] M をファジー擬順序を表す行列とする。

$$M \leq M^2 \leq \dots \leq M^k = M^{k+1} \dots\dots\dots (11)$$

なる $K \leq n$ が存在する。 M^k は M の推移的閉包である⁽⁵⁾。

[定理3] ファジー行列 M がファジー可到達行列であるための条件は

$$M = M + I \dots\dots\dots (12a)$$

$$M^2 = M \dots\dots\dots (12b)$$

3. ファジー ISM 過程

ファジー ISM について概略を述べる⁽⁵⁾。ファジー ISM 過程は具象化, 構造化, 描画の三つの過程からなる。

(1) 具象化過程 一つの要素を選び, その要素と他のすべての要素との一対比較を行って, ファジー可到達行列であるファジー構造行列を求める。

(2) 構造化過程 ファジー構造行列を α レベル集合に分解し, 二値行列に変換する。その後, 同値類分割, パート分割, レベル分割を行う。

(3) 描画過程 構造化の結果を α レベルごとの階層グラフで表現する。

4. ファジー具象化

ファジー構造行列を対話的に作成する具象化過程は二つのフェーズに分けて行う⁽⁵⁾。

〈4・1〉 第一フェーズ ある要素 s_i を選び, 「要素 s_i は要素 s_j ($j=1, \dots, n$) と R の関係にあるか?」および「要素 s_j は要素 s_i ($i=1, \dots, n$) と R の関係にあるか?」という質問に対して, 関係の強さの度合を, m_{ij} および m_{ji} ($0 \leq m_{ij}, m_{ji} \leq 1$) の値としてモデル生成者が入力する。この結果, システム要素集合を次の四つの部分集合に分割する (図1)。

上位集合:

$$L(s_i) = \{s_j; m_{ij} > 0\} \dots\dots\dots (13a)$$

図 1 要素 i による集合 S の分割
Fig.1. Partitioning S on the element i .

	$L(i)$		i	$V(i)$	$D(i)$
	$L-F$	$F(i)$			
$L-F$	$M_{L-F,L-F}$	0	0	0	0
$L(i)$					
$F(i)$	$M_{F,L-F}$	$M_{F,F}$	$\kappa_{F,i}$	0	0
i	$\rho_{i,L-F}$	$\rho_{F,F}$	1	0	0
$V(i)$	$M_{U,L-F}$	0	0	$M_{U,U}$	0
$D(i)$	$M_{D,L-F}$	$M_{D,F}$	$\kappa_{D,i}$	$M_{D,U}$	$M_{D,D}$

図 2 要素 i による構造行列 M の分割
Fig.2. Partitioning unfilled matrix M on the element i .

下位集合:

$$D(s_i) = \{s_j; m_{ij} = 0, m_{ji} > 0\} \quad (13b)$$

強連結集合:

$$F(s_i) = \{s_j; m_{ij} > 0, m_{ji} > 0\} \quad (13c)$$

無関係集合:

$$V(s_i) = \{s_j; m_{ij} = m_{ji} = 0\} \quad (13d)$$

このような添字集合の分割に対応し、 M を図 2 のようにブロック化する。同図において、 M の各ブロックは以下の三種類に分けられる。

(1) 質問の答えから直接埋める部分: i 行と i 列である。

(2) M の推移性から埋める部分: 値が 0 と確定する部分と仮に値を決めておく部分がある。後者は、 $M_{F,L-F}$, M_{FF} , $M_{D,L}$ である。

(3) いずれでもない部分: M_{L-F} , M_{UU} , M_{DD} , $M_{U,L-F}$, M_{DU} である。

更に、 $M_{L-F,L-F}$, M_{UU} , M_{DD} に対し再帰的に進める。これらの要素がすべて既知となったとき、次の第二フ

ーズへ進む。

〈4・2〉 第二フェーズ (未知数の値の決定) 本章で述べる相互結合理論により、 $M_{U,L-F}$, M_{DU} の取得値の範囲を限定する。

5. 相互結合理論

〈5・1〉 完全相互連関行列 図 2 のようにブロック化した M は可到達行列であることが要請される。 M の対角要素にあらはじめ 1 を代入しておくことによって、可到達行列である条件の (12 a) 式は満たされるので、未知要素の値は条件 (12 b) 式を満たすように決まらなければならない。結局、 $M_{U,L-F}$ は $M_{L-F,L-F}$, M_{UU} と 0 から

$$\begin{bmatrix} M_{L-F,L-F} & 0 \\ M_{U,L-F} & M_{UU} \end{bmatrix}$$

が (12 b) 式を満たすように決まらなければならない。

また、 M_{DU} は M_{UU} , M_{DD} と 0 から

$$\begin{bmatrix} M_{UU} & 0 \\ M_{DU} & M_{DD} \end{bmatrix}$$

が (12 b) 式を満たすように決まらなければならない。

以上のことから、 $M_{Y,L-F}$, M_{DV} の値の範囲を決める具象化過程の第二フェーズは次のようなファジー可到達行列を求める問題に一般化して考えることができる。

$$M = \begin{bmatrix} A & X \\ Y & B \end{bmatrix}, X=0 \quad (14)$$

(14) 式において、行列 M はファジー可到達行列であることが要請されるとする。また、行列 A, B, X, Y は求めようとする M の部分行列で、 A, B は既知のファジー可到達行列 (正方行列でそれぞれ s 次, t 次の行列)、 X, Y は未知の行列 (それぞれ $s \times t$, $t \times s$ である。ただし、いまの場合は $X=0$ (零行列) である。

M は可到達行列でなければならないので、部分行列 A, B, X, Y は以下の条件を満たさなければならない。

$$A^2 + XY = A \quad (15a)$$

$$YA + BY = Y \quad (15b)$$

$$AX + XB = X \quad (15c)$$

$$YX + B^2 = B \quad (15d)$$

いまの場合、 $X=0$ となるので (15) 式は以下のようになる。

$$A^2 = A \quad (16a)$$

$$B^2 = B \quad (16b)$$

$$YA + BY = Y \quad (16c)$$

(16 a), (16 b) 式は A, B が可到達行列であることが

ら恒等的に成立する。よって、(16 c)式を満たすように Y を決定することが必要である。

一般に、(16 c)式の行列方程式は、クロネッカ積 $\circ$ と行列の行展開によって、

$$r(Y)(I \circ A + B^T \circ I) = r(Y) \cdots \cdots (17)$$

と書けることが知られている⁽¹²⁾。ここで、 $r(Y)$ は Y の行からなる行ベクトルである。

行列 Y の第 i 行を R_i と書き、ベクトル z を

$$z = (R_1, R_2, \dots, R_s)^T \cdots \cdots (18)$$

と定義し、(17)式の両辺の転置をとると、

$$z = Pz \cdots \cdots (19)$$

と書ける。ここで、行列 P の添字 (R_i^T, R_j) の部分ブロック P^{ij} は、 A, B が反射の行列であることから次のように表現できる。

$$P^{ij} = \delta(i, j)A^T + \bar{\delta}(i, j)b_{ij}I \cdots \cdots (20)$$

(20)式を成分で書く。

$$z_i = \sum_k (p_{ik}z_k) \cdots \cdots (21)$$

(21)式から、 z_i の値によって次のようにして z_k の取得値の範囲が決まる。

$p_{ik}, k=1, \dots, c-1 (c=st)$ を大きい順に並べる。

$$1 \geq p_{ik_1} \geq p_{ik_2} \geq \dots \geq p_{ik_{c-1}} \geq 0$$

(1) if $z_i > p_{ik_1}$, then $z_{k_j}, j=1, \dots, c-1$ は任意

(2) if $p_{ik_1} \geq z_i \geq p_{ik_2}$, then $z_i \geq z_{k_1}$ かつ $z_{k_j}, j=2, \dots, c-1$ は任意

(3) if $p_{ik_2} \geq z_i \geq p_{ik_3}$,

then $z_i \geq z_{k_1}, z_i \geq z_{k_2}$, かつ $z_{k_j}, j=3, \dots, c-1$ は任意。

ある z_i の値が決定したとき、 $z_j, i \neq j$ は上述のように(21)式を満たすように決まらなければならない。 z_j の範囲が決まると、 z_k の範囲が決まる。以下同様に、他の z の要素の範囲が決定できる。 z_i が他のすべての未知要素に及ぼす影響は、 P の推移的閉包 Q を求めることにより明らかになる⁽⁵⁾。

P の推移的閉包を Q とすると(22)式となる。

$$z = Qz \cdots \cdots (22)$$

以下で Q を陽に求めることができることを示す。

[定理 4] P の推移的閉包を Q とする。

$$Q = P^2 \cdots \cdots (23)$$

(証明) P^2 と P^3 を実際に計算し、比較すると $P \neq P^2 = P^3$ がいえる(詳細は付録を参照)。

[系 4-1]

$$Q^{i,j} = \delta(i, j)A^T \bar{\delta}(i, j)b_{ij}A^T \cdots \cdots (24)$$

(証明) [定理 4] の証明の過程から導かれる。

<5.2> 完全相互連関行列の生成アルゴリズム
[定理 1] と [系 1] の結果を利用して、 Q を生成するアルゴリズムを構成することができる。

完全相互連関行列の計算アルゴリズム

(1) 行列 A の転置行列 A^T を求める

(2) 行列 B の対角要素に A^T を代入する

(3) 行列 B の非対角要素には、その要素と A^T との積を代入する

Ragade の方法によると、計算量は $O\{(st)^3\}$ となる。なぜなら、 $P^2, P^3, \dots$ の各 P のべき乗を計算するために $O\{(st)^3\}$ の行列積計算が必要であり、 $P^{k-1} \neq P^k = P^{k+1} (k < st)$ となるまでこれらの和を求めるために、 $O\{(st)^2\}$ の行列和計算が必要である。従って、全体として、 $\max\{O\{(st)^3\}, O\{(st)^2\}\} = O\{(st)^3\}$ の計算量となる。また、 P の推移的閉包を一般化 Warshall のアルゴリズムにより計算することもできる⁽¹¹⁾。しかし、このときの計算量も $O\{(st)^3\}$ である。一方、提案したアルゴリズムでは $O\{(st)^2\}$ で計算することができる。

<5.3> 未知要素の範囲の決定 定理と系の結果を用いて未知要素の値の範囲を以下のようにして決定する。(14)式を成分で書く。

$$z_i = \sum_k (q_{ik}z_k) \cdots \cdots (25)$$

$q_{ik}, k=1, \dots, c-1 (c=st)$ を大きい順に並べる。

$$1 \geq q_{ik_1} \geq q_{ik_2} \geq \dots \geq q_{ik_{c-1}} \geq 0 \cdots \cdots (26)$$

(1) if $z_i > q_{ik_1}$, then $z_{k_j}, j=1, \dots, c-1$ は任意

(2) if $q_{ik_1} \geq z_i \geq q_{ik_2}$, then $z_i \geq z_{k_1}$, かつ $z_{k_j}, j=2, \dots, c-1$ は任意

(3) if $q_{ik_2} \geq z_i \geq q_{ik_3}$, then $z_i \geq z_{k_1}, z_i \geq z_{k_2}$, かつ $z_{k_j}, j=3, \dots, c-1$ は任意。

これらの変数の値は上の範囲を満たす任意の値を与えることができる。従って、仮にある値を代入しておくことにより具象化過程の効率化を図ることができる。

6. 例 題

行列 A と B が次のように与えられているとする。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

[例 1] Q を求める。

(ステップ 1) A の転置 A^T を求める。

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ステップ 2) B の対角要素に A^T を入れる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ステップ3) B の非対角要素と A^T の積 (min) をとり、その非対角要素に入れる。

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[例 2] 未知行列 Y を求める。

次に Q を用いて未知行列 Y を求める。このとき、行、列それぞれの非ゼロ要素の個数 r_i, c_i を数え、 $r_i^* = \max r_i, c_i^* = \min c_i$ を求め、 r_i^* と c_i^* から値を決める行を選ぶ。(max min 戦略) 例題の場合は第 4 行が選ばれる。

(ステップ1) Q の第 4 行の添字は y_{21} であるので、 y_{21} の値を決めることになる。第 4 行が表す式を書き出すと

$$y_{21} = 0.4y_{11} + 0.4y_{12} + 0.4y_{13} + y_{21} + 0.8y_{22} + 0.6y_{23}$$

となる。次に式の右辺を係数の大きい順に並べ換える。

$$y_{21} = y_{21} + 0.8y_{22} + 0.6y_{23} + 0.4y_{11} + 0.4y_{12} + 0.4y_{13}$$

(1) $0.8 < y_{21} \leq 1$ のとき y_{21} 以外すべて任意。
(2) $0.6 < y_{21} \leq 0.8$ のとき $y_{22} \leq y_{21}$; 他は任意。
(3) $0.4 < y_{21} \leq 0.6$ のとき $y_{22}, y_{23} \leq y_{21}$; 他は任意。

(4) $0 < y_{21} \leq 0.4$ のとき $y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{22}, y_{23} \leq y_{21}$ 。
(5) $y_{21} = 0$ のとき すべて 0。

いま、 $y_{21} = 0.8$ とすると (2) の場合にあてはまり、 $y_{22} \leq y_{21} = 0.8$ という制約が付けられる。

(ステップ2) y_{22} が添字となっている第 5 行を取出し、係数の大きい順に並び換える。

$$y_{22} = y_{22} + 0.6y_{23} + 0.4y_{12} + 0.4y_{13}$$

(1) $0.6 < y_{22} \leq 1$ のとき y_{12}, y_{13}, y_{23} は任意。
(2) $0.4 < y_{22} \leq 0.6$ のとき $y_{23} \leq y_{22}$; y_{12}, y_{13} は任意。
(3) $0 \leq y_{22} < 0.4$ のとき $y_{12}, y_{13}, y_{23} \leq y_{22}$ 。
(4) $y_{22} = 0$ のとき $y_{12} = y_{13} = y_{23} = 0$ 。

ここで、 $y_{22} = 0.6$ とすると (2) の場合にあてはまり、

$$y_{23} \leq y_{22} = 0.6$$

という制約が付けられる。

(ステップ3) y_{23} が添字となっている第 6 行を取出す。

$$y_{23} = y_{23} + 0.4y_{13}$$

(1) $0.4 < y_{23} \leq 1$ のとき y_{13} は任意。
(2) $0 < y_{23} \leq 0.4$ のとき $y_{13} \leq y_{23}$ 。
(3) $y_{23} = 0$ のとき $y_{13} = 0$ 。

ここで、 $y_{23} = 0$ とすると $y_{13} = 0$ となる。

(ステップ4) 残った y_{11}, y_{12} 以上の条件より任意なので簡単のために 0 を入れておく。

これまでの操作により、行列 Y は

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

7. ISM システムとの結合

ファジー ISM システムの作成にあたっては、従来の ISM システムに簡単な機能を加えるだけで利用することができる。すなわち、ファジー ISM の具象化過程を終了した後に、レベル分解の操作を加えることにより、従来の ISM の構造化や描画機能をそのまま利用することができる。著者らは、これまで開発したフレキシブル ISM システムにファジー具象化機能を付加して、更に柔軟な ISM システムを開発している。

8. 終りに

ファジー ISM における具象化過程の第二フェーズについて考察した。このフェーズが二つのファジーサブシステムの結合問題において、 $X=0$ の特別な場合であることを示し、完全相互連関行列 Q が基本相互連関行列 P の 2 乗で計算できることを証明した。この結果を利用して、 Q を $0\{(st)^2\}$ で計算するアルゴリズムを提案した。

$X \neq 0$ の場合について、 Q を陽に求めることが次の研究課題である。

(昭和63年6月24日受付、平成元年5月18日再受付)

文 献

- (1) J. N. Warfield: Societal Systems; Planning, Policy and Complexity (1976) Wiley
- (2) A. Ohuchi, et al.: "Theory and Algorithm for Reachability matrix models", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., SMC-16, 545 (1984)
- (3) A. Ohuchi, et al.: "Correction Theory and Procedures for Reachability matrix Models", Proceeding of the 1986 IEEE SMC-Conference, p. 1132 (1986)

- (4) A. Ohuchi, et al.: "Theory and Algorithm for The Synthesis of a Multidimensional Structural Model", Proceeding of IEEE SMC-Conference, p. 422 (1987)
- (5) R. K. Ragade: "Interpretive Structural Modeling", *J. Cybern.*, 6, 189 (1976)
- (6) 駒谷, 他: 「二項関係の強さを考慮した構造化手法」, 電子論 C, 101 (昭 56-5)
- (7) 大内, 他: 「ファジィ ISM における相互連関行列の効率的生成アルゴリズム」, 第 4 回ファジィシステムシンポジウム論文集, p.273 (昭 63)
- (8) A. Ohuchi, et al.: "A Theorem and A Procedure for The Complete Implication Matrix of System Interconnection Matrices", *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, SMC-14, 545 (1984)
- (9) J. N. Warfield: "Implication Structures for System Interconnection Matrices", *ibid.*, SMC-6, 18 (1976)
- (10) L. A. Zadeh, "Similarity Relations and Fuzzy Orderings", *Inform. Sciences*, 3, 177 (1971)
- (11) P. Robert: "Generalisation de L'algorithme de Warshall", R. I. R. O., 2 annee, No.7, 71 (1968)
- (12) 児玉・須田: システム制御のためのマトリクス理論 (昭 53) 計測自動制御学会

付 録

[定理 4] の証明

ファジー可到達行列の定義により, $P \neq P^2 = P^3$ となることを示す。

P を再掲する。

$$P^{i,j} = \delta(i, j)A^T + \bar{\delta}(i, j)b_{ij}I \dots\dots\dots (付 1)$$

(1) P^2 を計算する。

$$[P^2]^{i,j} = \sum_k P^{i,k} P^{k,j}$$

(i) $i=j$ のとき

$$\begin{aligned} [P^2]^{i,i} &= \sum_k P^{i,k} P^{k,i} \\ &= P^{i,i} P^{i,i} + \sum_{k \neq i} P^{i,k} P^{k,i} \\ &= A^T A^T + \sum_{k \neq i} (b_{ik} I)(b_{ki} I) \\ &= A^T + \sum_{k \neq i} b_{ik} b_{ki} I \\ &= A^T \end{aligned}$$

ここで, $a_{ii}=1$ より $A^T + \sum_{k \neq i} b_{ik} b_{ki} I = A^T$ を利用した。

ゆえに,

$$[P^2]^{i,i} = A^T \dots\dots\dots (付 2)$$

(ii) $i \neq j$ のとき

$$\begin{aligned} [P^2]^{i,j} &= \sum_k P^{i,k} P^{k,j} \\ &= P^{i,i} P^{i,j} + P^{i,j} P^{j,j} + \sum_{k \neq i,j} P^{i,k} P^{k,j} \\ &= A^T (b_{ij} I) + (b_{ij} I) A^T \\ &\quad + \sum_{k \neq i,j} (b_{ik} I)(b_{kj} I) \\ &= b_{ij} A^T + \sum_{k \neq i,j} b_{ik} b_{kj} I \\ &= b_{ij} A^T + b_{ij} I \\ &= b_{ij} A^T \end{aligned}$$

ここで, $\sum_{k \neq i,j} b_{ik} b_{kj} \leq \sum_k b_{ik} b_{kj} = b_{ij}$,

$$b_{ij} A^T + b_{ij} I = b_{ij} (A^T + I) = b_{ij} A^T$$

を利用した。

ゆえに,

$$[P^2]^{i,j} = b_{ij} A^T \quad \text{for } i \neq j \dots\dots\dots (付 3)$$

(付 2) 式と (付 3) 式より

$$[P^2]^{i,j} = \delta(i, j) A^T + \bar{\delta}(i, j) b_{ij} A^T \dots\dots (付 4)$$

(2) P^3 を計算する。

$$[P^3]^{i,j} = \sum_k [P^2]^{i,k} P^{k,j}$$

(i) $i=j$ のとき

$$\begin{aligned} [P^3]^{i,i} &= \sum_k [P^2]^{i,k} P^{k,i} \\ &= [P^2]^{i,i} P^{i,i} + \sum_{k \neq i} [P^2]^{i,k} P^{k,i} \\ &= A^T A^T + \sum_{k \neq i} (b_{ki} b_{ik} A^T)(b_{ki} I) \\ &= A^T + (\sum_{k \neq i} b_{ik} b_{ki}) A^T \\ &= A^T \end{aligned}$$

ここで, $\sum_{k \neq i} b_{ik} b_{ki} \leq \sum_k b_{ik} b_{ki} = b_{ii} = 1$

より

$$(\sum_{k \neq i} b_{ik} b_{ki}) A^T \leq A^T$$

を利用した。

ゆえに,

$$[P^3]^{i,i} = A^T \dots\dots\dots (付 5)$$

(ii) $i \neq j$ のとき

$$\begin{aligned} [P^3]^{i,j} &= \sum_k [P^2]^{i,k} P^{k,j} \\ &= [P^2]^{i,i} P^{i,j} + [P^2]^{i,j} P^{j,j} \\ &\quad + \sum_{k \neq i,j} [P^2]^{i,k} P^{k,j} \\ &= A^T (b_{ij} I) + (b_{ij} A^T) A^T \\ &\quad + \sum_{k \neq i,j} (b_{ik} A^T)(b_{kj} I) \\ &= b_{ij} A^T + b_{ij} A^T + \sum_{k \neq i,j} b_{ik} b_{kj} A^T \\ &= b_{ij} A^T + \sum_{k \neq i,j} b_{ik} b_{kj} A^T \\ &= b_{ij} A^T + b_{ij} A^T \\ &= b_{ij} A^T \end{aligned}$$

ゆえに, $[P^3]^{i,j} = b_{ij} A^T$ for $i \neq j \dots\dots\dots (付 6)$

(付 5) 式, (付 6) 式より

$$[P^3]^{i,j} = \delta(i, j) A^T + \bar{\delta}(i, j) b_{ij} A^T \dots\dots (付 7)$$

ゆえに, (付 1) 式, (付 4) 式, (付 7) 式より, $A = I$, または $B = 0$ の場合を除いて, 一般に,

$$P \neq P^2 = P^3$$

となる。よって,

$$Q = P^2 \quad (\text{証明終り})$$