未知パラメータを有するスペクトル系の有限次元追従制御

正員 松尾孝美 (大分大)

正員 相良節夫 (九州大)

1. まえがき

無限次元である分布定数系を有限次元の出力情報をもとに制御しようとする場合には本質的に無限次元の制御器が必要である。しかし、実際の制御器の構成にはデジタル計算機などを用いる必要があり、無限次元の制御器を構成することは難しい。このため、有限次元の制御器を用いることになるが、この際にはスピルオーバーと呼ばれる悪影響が生じることが指摘されてきた⁽¹⁾⁽²⁾。こうした中で、システムパラメータが既知の場合には有限次元の安定化補償器が存在することが証明されたが^{(3)~(5)}、補償器の次数を特定できないなどの欠点があった。更に、時間に関する2階の偏微分方程式で表される大規模宇宙構造物の場合には、スピルオーバー対策のためにセンサとアクチュエータを同置するコロケーション (Collocation) と呼ばれる手法や DVFB (Direct Velocity Feedback) 法と呼ばれる手法により系の安定化が行われているが⁽⁶⁾⁽⁷⁾、これらの議論は安定化のみで出力レギュレーションについては検討されていない。更に、用いられている手法も本質的には集中定数系のものであり、厳密な無限次元系としての取扱いがされていない。

一方、未知パラメータをもつ分布定数系の適応制御については無限次元の適応制御則が与えられているのみで⁽⁸⁾⁽⁹⁾、有限次元の適応制御機構の構成は未解決の問題である⁽¹⁾。これまでに著者らは、分布定数系の有限次元近似モデルに集中定数系の適応制御機構をそのまま適用すると最悪の場合には burst 現象を引き起こすことを指摘した⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。このような状況は寄生要素

や外乱を含む集中定数系の場合にも生じるが⁽¹²⁾、これを抑制する問題はロバスト適応制御と呼ばれ種々の手法が提案されている⁽¹³⁾。これらの手法は主に、(1) 適応則を修正して出力誤差が有界値になることを保証するもの⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾、(2) 局所的なモデリング誤差に対して従来の適応則で安定性を保証するもの⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾、などがある。これらの手法は Kosut らの場合⁽¹⁷⁾を除き、出力誤差をある範囲内に保つことを保証するのみで、零への収束を意味しない。従って、拡散系や柔軟構造物を含むスペクトル系⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾を適応制御しようとする場合にこのような方法を用いると、出力誤差が残って厳密な意味での適応制御が達成されなかったり、制御器の次数を十分大きくしないと誤差方程式の安定性が保証されないなどの問題が起きてくる。更に、Kosut らの場合には、従来の適応則で出力誤差が漸近安定となるようなモデリング誤差の許容範囲が周波数条件として与えられているが、この条件からスペクトル系のスピルオーバー項がどのような形であればいいのか陽に表すことは難しく、かつこの議論は集中定数系に限定されている。

これまでに著者らは、系の入出力関係 (伝達関数) が強正実であり、規範入力が定値の場合には一次の適応制御則により出力誤差が大域的漸近安定になることを示した。更に文献 (11) では、強正実性を Hilbert 空間へ拡張し、系が安定でありアクチュエータ影響関数とセンサ影響関数に特定の関係が成立する場合には、一次の適応制御則により出力を定値信号に漸近的に一致させることができることを明らかにした。更に、Kobayashi⁽²⁰⁾は解析半群の生成素をもつ最小位相系に対して、一次の適応制御則 (規範入力は零) を用いることにより系が安定化できることを証明した。これらのことは制御対象と希望出力を制限することにより、低次の簡単な構造の制御器により無限次元系が制御できることを意味している。この意味では、変動や

Finite-Dimensional Tracking System for Spectral Systems with Unknown Parameters. By Takami Matsuo, Member (Faculty of Engineering, Oita University) & Setsuo Sagara, Member (Faculty of Engineering, Kyushu University).

松尾孝美：正員、大分大学工学部エネルギー工学科

相良節夫：正員、九州大学工学部電気工学科

誤差があってもなるべく安定性を損なわないようにすることを目的とする一般のロバスト制御系設計法と著者らの目的とする有限次元制御器は趣を異にしている。

本論文では、スペクトル系に対して Hilbert 空間に拡張した強正実性がこの系に対して成立しているならば、一次の適応制御機構により出力を希望の一定値に追従させることができることを証明する。また、スペクトル系の代表例である拡散系と柔軟構造物の場合にこの強正実性がセンサ・アクチュエータのコロケーションとどのように関連しているが明らかにする。更に、安定でないモードを含むようなスペクトル系に対してもほぼ強正実性を定義し、もし系がほぼ強正実性を満足するならば強正実の場合と同様の制御が可能であることを示す。

2. 系の記述

対象とする系は次式で与えられる単一入出力をもつスペクトル系⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾とする。

$$\dot{z} = Az + bu, \quad z(0) = z_0 \quad (1)$$

$$y = \langle c, z \rangle \quad (2)$$

ここに、 A は可分な実 Hilbert 空間 H 上のスペクトル作用素で、 $b \in H$, $c \in H$, $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ で $u \in R^1$, $y \in R^1$ とする。また、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は H 内の内積であり、 $\mathcal{D}(A)$ は A の定義域とする。更に、 A , b , c , z_0 は未知とする。

ここで、スペクトル作用素とは Curtain により次のように定義されている。

〔定義 1〕⁽¹⁹⁾ A がスペクトル作用素であるとは、 A が次の条件を満たすような閉作用素であることをいう。

(i) A はコンパクトなレゾルVENTをもち、そのスペクトルは有限多重度の固有値のみからなる。

(ii) A のスペクトル測度 $E(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \sigma(A)$ は一様有界なブル代数を生成し、完全性条件

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i) = I \quad (3)$$

を満足する。ここに、 $\sigma(A)$ は A のスペクトル集合を意味する。更に、本論文で次の仮定をおく。

〈仮定 1〉 A の固有値 λ_i , $i=1, 2, \dots$ の重複度はすべて 1 とする。更に、

$$\omega = \sup_i \{\operatorname{Re} \lambda_i\} < \infty \quad (4)$$

この仮定の下で A および共役作用素 A^* の λ_i に対する正規固有ベクトルを ϕ_i および ψ_i とおくと、スペクトル測度は次式で表すことができる⁽¹⁹⁾。

$$E(\lambda_i) = \langle \cdot, \phi_i \rangle \phi_i \quad (5)$$

3. 強正実系に対する定値制御系の実現

〈3・1〉 一般定理 本章では、(1), (2) 式のスペクトル系に対して、次の制御目的を達成する制御系を構成する。

制御目的: A , b , c , $z(0)$ は未知として

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{y(t) - r\} = 0 \quad (6)$$

となるような有限次元の制御系を構成する。ここに、 r は定数とする。

一般のスペクトル系に対して、上記の目的を達成することは難しいが、系を限定することによりこの目的が達成できる。これを定理として証明する。

《定理 1》 系(1), (2) に対して次式を満足するような対称正定有界線形作用素 P が存在すると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \langle PAz, z \rangle &\leq -M_0 \langle z, z \rangle \\ \langle Pb, z \rangle &= \langle c, z \rangle \\ \text{for } z &\in \mathcal{D}(A) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 M_0 はある正の数とし、 $\mathcal{D}(A)$ は A の定義域とする。更に、次式が成り立つとする。

$$\langle c, A^{-1}b \rangle \neq 0 \quad (8)$$

このとき、次の制御則により(6)式が達成される。

(i) 入力合成則

$$u(t) = k_1(t)y(t) + k_2(t)r \quad (9)$$

(ii) パラメータ調整則

$$\dot{k}_1(t) = -\gamma_1 y(t)(y(t) - r) \quad (10)$$

$$\dot{k}_2(t) = -\gamma_2 r(y(t) - r) \quad (11)$$

ここに、 $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 > 0$ とする。更に、 $\gamma_1 = 0$ のときは、 $k_1(0) = 0$ とする。

(証明) 付録 1 を参照のこと。

この定理中の(7)式の第 1 式は Hilbert 空間における Lyapunov 方程式を表しており、 A から生成される半群が指数安定であることを意味している⁽²¹⁾⁽²²⁾。(7)式の第 2 式がアクチュエータ影響関数とセンサ影響関数の関係を表す式である。この二つの式が集中定数系の強正実条件の Hilbert 空間への拡張表現である。

また、(9)~(11)式は一次のプラントに対する適応制御則である⁽²³⁾。

スペクトル系は工学的に重要な系をほとんど含んでいるが、次に拡散系と柔軟構造物の場合にこの定理がどのように適用されているかについて述べる。

〈3・2〉 拡散系の場合 次の一次元の拡散系を対象とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(t) \\ a > 0, 0 < x < 1 \\ z(0, t) &= z(1, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、Hilbert 空間 H を $L^2(0, 1)$ でとり、

$$\left. \begin{aligned} Az &= a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z \in \mathcal{D}(A) \\ \mathcal{D}(A) &= \{z \in H : Az \in H, z = 0 \text{ at } x=0, 1\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

とおくと、(12)式は Hilbert 空間上の常微分方程式

$$\dot{z} = Az + bu \quad (14)$$

でかける⁽²⁴⁾。また、観測方程式を次式とする。

$$y(t) = \int_0^1 c(x)z(x, t)dx = \langle c, z \rangle \quad (15)$$

このとき、(14)、(15)式はスペクトル系であり、 A は自己共役作用素で固有値・固有ベクトルの組 $\{-an^2\pi^2, \sqrt{2}\sin n\pi x\} = n=1, 2, \dots$ をもつ。更に、次式が成立することから A は厳密に消散的であることがわかる⁽²⁴⁾。

$$\langle Az, z \rangle \leq -a\pi^2 \|z\|^2, z \in \mathcal{D}(A) \quad (16)$$

この場合には、(7)式の P を I (恒等作用素) にとり

$$b=c \quad (17)$$

ならば(7)式が満足されることがわかる。(17)式はアクチュエータとセンサを同置することに相当するが、これはコロケーションと呼ばれ柔軟構造物ではスピルオーバー対策のためよく用いられている⁽⁶⁾。

(注 1) 本論文では、アクチュエータ影響関数 b とセンサ影響関数 c は H の要素としているので、デルタ関数の登場する点状入力や点状観測には用いることができない。しかし、 b か c のどちらかがデルタ関数のとき、もう一方が A の固有ベクトルの有限個の線形結合で表せるときには伝達関数は有理関数となり、この伝達関数が強正実であるときにも、(9)～(11)式の制御則により(6)式を達成することができる⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

(注 2) Pohjolainen は A が安定な解析半群の生成素の場合に対して、ロバストサーボ系を設計している⁽²⁵⁾。この結果を本論文と比較する。文献(25)では、系のパラメータは既知とされ、出力レギュレーションを達成する I-コントローラのゲインが定理 3.4 により与えられている。いま、この系に対して本論文と同じようにコロケーション(17)式が成立すると仮定する。(13)式の A も解析半群の生成素であり、すべての固有値が負である自己共役作用素である。従って、

$$\langle c, A^{-1}b \rangle = \langle b, A^{-1}c \rangle \leq 0$$

が成立する。上式より、(8)式はロバストサーボ系が構成できるための必要十分条件になっており、I-コントローラのゲインは負であれば何でもよいことになる。このことから、Pohjolainen の I-コントローラは $\gamma_1=0$ とした場合の制御則(9)～(11)式になっていることがわかる。安定な系に対しては、このように出力フィードバック項は必要ないが、次章で述べる安定でないような系に対しては必要となる。

〈3・3〉 柔軟構造物の場合 次式で与えられる単純支持のダンピングをもつ一次元の柔軟構造物を対象とする⁽²⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} - 2a \frac{\partial^3 z(x, t)}{\partial t \partial x^2} \\ = b(x)u(t) \\ a > 0, 0 < x < 1 \\ z(0, t) &= z(1, t) = z_{xx}(0, t) = z_{xx}(1, t) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに、 z_{xx} は z の x に関する 2 階偏微分を意味する。Hilbert 空間 H を $L^2(0, 1)$ でとり、作用素 A_0 を

$$A_0 z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \quad (19)$$

$$\mathcal{D}(A_0) = \{z \in H : z^{(i)} \in H, i=1, 2, 3, 4, \\ z(0) = z(1) = z_{xx}(0) = z_{xx}(1) = 0\} \quad (20)$$

とおくと、 A_0 は自己共役作用素で固有値・固有ベクトルの組 $\{n^4\pi^4, \sqrt{2}\sin n\pi x\}$ をもつ。更に次式が成り立つ。

$$\langle A_0 z, z \rangle_H \geq \pi^4 \|z\|^2 \quad (21)$$

ここに、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ は H 内の内積を表す。 A_0 は正值作用素であり、 $A_0^{1/2}$ は次式で与えられる。

$$A_0^{1/2} z = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \quad (22)$$

$A_0^{1/2}$ は自己共役作用素であり、

$$\langle A_0^{1/2} z, z \rangle_H \geq \pi^2 \|z\|^2 \quad (23)$$

が成立する。(21)、(23)式より $A_0, A_0^{1/2}$ はともに有界な逆作用素 $A_0^{-1}, A_0^{-1/2}$ をもつ。いま、

$$w = [z, z_t]^T \quad (24)$$

と定義すると(18)式は次式のようにかける⁽²⁶⁾。

$$\dot{w} = Aw + du \quad (25)$$

ここに

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -2aA_0^{1/2} \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (26)$$

とする。 w は内積

$$\langle w, \bar{w} \rangle_w = \langle A_0^{1/2} w_1, A_0^{1/2} \bar{w}_1 \rangle_H + \langle w_2, \bar{w}_2 \rangle_H \quad (27)$$

をもつ Hilbert 空間 $W = \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \times H$ の要素である⁽¹⁶⁾。

ここに、

$$w = [w_1, w_2]^T, \bar{w} = [\bar{w}_1, \bar{w}_2]^T \quad \dots\dots\dots (28)$$

とする。更に、観測方程式を次式で与える。

$$y = \langle c_1, z \rangle_H + \langle c_2, z_t \rangle_H \quad \dots\dots\dots (29)$$

(7)式の第1式に相当する式は次のように Ichikawa により与えられている⁽²⁶⁾。

$$\langle PAw, w \rangle_W = -\frac{1}{2} \langle w, w \rangle_W, w \in \mathcal{D}(A) \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 P は有界な対称性正定作用素で

$$P = \begin{bmatrix} (\alpha + \frac{1}{2\alpha})A_0^{-1/2} & \frac{1}{2}A_0^{-1} \\ \frac{1}{2}I & \frac{1}{2\alpha}A_0^{-1/2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (31)$$

である。作用素 A の形が特別な形をしており、前節とは結果が異なるので詳しく述べることにする。制御目的を次式とする。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle g, z \rangle_H - r = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $g \in H$ とし r は定数である。これは柔軟構造物の位置に関する出力を一定値に制御することを目的としている。

$$z_\infty = \beta A_0^{-1} b r \quad \dots\dots\dots (33)$$

ただし、 $\langle g, A_0^{-1} b \rangle_H \neq 0$ とし、

$$\beta = \langle g, A_0^{-1} b \rangle_H^{-1} \quad \dots\dots\dots (34)$$

とおく。このとき、

$$\langle g, z_\infty \rangle_H = r \quad \dots\dots\dots (35)$$

である。更に、

$$e_1 = z - z_\infty \quad \dots\dots\dots (36)$$

とおくと、次の誤差方程式が得られる。

$$e_{1tt} + A_0 e_1 + 2\alpha A_0^{1/2} e_{1t} = b(u - \beta r) \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで、

$$e = [e_1, e_{1t}]^T \in W$$

とおくと、(37)式は次式のようになる。

$$\dot{e} = Ae + d(u - \beta r) \quad \dots\dots\dots (38)$$

また、

$$\bar{e} = y - r \quad \dots\dots\dots (39)$$

とおくと(29)式、(35)式より次式が成立する。

$$\bar{e} = \langle c_1, z \rangle_H + \langle c_2, z_t \rangle_H - \langle g, z_\infty \rangle_H \quad \dots\dots\dots (40)$$

いま、

$$g = c_1 \quad \dots\dots\dots (41)$$

と仮定する。このとき、(40)式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \langle c_1, z - z_\infty \rangle_H + \langle c_2, z_t \rangle_H \\ &= \langle c_1, e_1 \rangle_H + \langle c_2, e_{1t} \rangle_H \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

これより、制御則(9)~(11)式により

$$e \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty) \quad \dots\dots\dots (43)$$

となるための条件を求める。(9)式を(38)式に代入すると次式のようになる。

$$\dot{e} = Ae + d\{k_1 y + (k_2 - \beta)r\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

正値関数 $V(t)$ を次式で定義する。

$\gamma_1 \neq 0$ のとき

$$V(t) = \frac{1}{2} \langle Pe, e \rangle_W + \frac{1}{2\gamma_1} k_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} (k_2 - \beta)^2 \quad \dots\dots\dots (45)$$

$\gamma_1 = 0$ のとき

$$V(t) = \frac{1}{2} \langle Pe, e \rangle_W + \frac{1}{2\gamma_2} (k_2 - \beta)^2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

$\gamma_1 \neq 0$ のとき、 $\dot{V}(t)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \langle e, e \rangle_W + \{k_1 y + (k_2 - \beta)r\} \\ &\quad \times \{ \langle \frac{1}{2}b, e_1 \rangle_H + \langle \frac{1}{2\alpha}A_0^{-1/2}b, e_{1t} \rangle_H \} \\ &\quad - \{k_1 y + (k_2 - \beta)r\} \\ &\quad \times \{ \langle c_1, e_1 \rangle_H + \langle c_2, e_{1t} \rangle_H \} \quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$\gamma_1 = 0$ のときの $\dot{V}$ は(47)式で $k_1 = 0$ としたものになる。従って、

$$c_1 = \frac{1}{2}b, c_2 = \frac{1}{2\alpha}A_0^{-1/2}b \quad \dots\dots\dots (48)$$

が成立している系であるならば

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \langle e, e \rangle_W \quad \dots\dots\dots (49)$$

より、

$$V(0) \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle e, e \rangle_W dt \quad \dots\dots\dots (50)$$

が成立するので

$$\|e\|_W \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \dots\dots\dots (51)$$

が言える。更に、

$$\begin{aligned} \|e\|_W &= \langle A_0^{1/2}e_1, A_0^{1/2}e_1 \rangle_H + \langle e_{1t}, e_{1t} \rangle_H \\ &\geq \pi^4 \langle e_1, e_1 \rangle_H + \langle e_{1t}, e_{1t} \rangle_H \quad \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

より、結局

$$e_1 \rightarrow 0, e_{1t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \dots\dots\dots (53)$$

となり、(36)式、(41)式より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \langle c_1, z \rangle_H - r \} = 0 \quad \dots\dots\dots (54)$$

が成立し、制御目的が達成されることがわかる。ここでは、誤差方程式全体の安定性を証明しているのに、(54)式が達成できることがわかるが、出力誤差のみの安定性を証明する手法では $\bar{e} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ しか保証でき

ないことに注意する。また、(48)式は位置と速度の両方の観測が必要であることを意味している。しかし、パラメータ未知としているのに(48)式のようにセンサを設計できるのかという疑問が生じてくる。そこで、作用素表現よりも具体的にわかりやすい固有関数展開表現により系が強正実となるための条件を導出し、パラメータ未知の場合に対しても強正実性を達成することがある程度可能であることを調べる。

まず、アクチュエータは A_0 の固有関数の有限個の線形結合で表されると仮定する。つまり、次式が成り立つとする。

$$\left. \begin{aligned} b(x) &= \sum_{i=1}^L b_i \sin i\pi x \\ c_1(x) &= \sum_{i=1}^L c_{1i} \sin i\pi x \\ c_2(x) &= \sum_{i=1}^L c_{2i} \sin i\pi x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

ここに、 L は十分大きな整数とし、この値は未知であるとすると。 $z(x, t)$ を

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \sin i\pi x \dots\dots\dots (56)$$

と展開すると(18)式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\dot{i}\pi)^4 & -2\alpha(\dot{i}\pi)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

(55)式、(57)式より系の伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \sum_{i=1}^L \frac{C_{2i}g_i s + c_{1i}g_i}{s^2 + 2\alpha(\dot{i}\pi)^2 s + (\dot{i}\pi)^4} \dots\dots\dots (58)$$

となる。(58)式より

$$g_i(s) = (c_{2i}g_i s + c_{1i}g_i) / \{s^2 + 2\alpha(\dot{i}\pi)^2 s + (\dot{i}\pi)^4\} \quad (i=1, \dots, L) \dots\dots\dots (59)$$

が強正実ならば、 $G(s)$ も強正実になる。ここで、 $g_i(s)$ は次式が成立するとき強正実である。

$$\left. \begin{aligned} c_{1i}g_i &> 0 \\ c_{2i}g_i &\geq c_{1i}g_i / 2\alpha(\dot{i}\pi)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60) \quad (i=1, \dots, L)$$

従って、(60)式の第1式は $c_1(x)$ をアクチュエータと同置すれば成立し、第2式については $c_2(x)$ を

$$c_2(x) = Kc_1(x)$$

を満足するように選べばよいことがわかる。ここに、 K は $(2\alpha\pi^2)^{-1}$ より大きくとればどのような数でもよい。以上のことから、パラメータ未知の場合でもセンサ・アクチュエータのコロケーションにより、系の強正実性がある程度達成できることがわかる。ここで、

(60)式は(48)式を(55)式を用いて固有関数展開した条件式を包含していることに注意する。

4. ほぼ強正実な系に対する定値制御系の実現

前章の議論は(11)式の制約条件からスペクトル作用素 A が指数安定な場合に限定されていた。本章では、出力フィードバックにより安定化できるような系を対象とする。

〈4・1〉 ほぼ強正実性の定義と一般定理 Bar-Kana らは集中定数系の場合に、ほぼ強正実性 (almost strictly positive realness) を次のように定義している。

〔定義2〕⁽²⁷⁾ $G_p(s)$ を集中定数系の制御対象の伝達関数とする。閉ループ伝達関数

$$G_c(s) = (I + G_p(s)K)^{-1}G_p(s) \dots\dots\dots (61)$$

が強正実となるような正則なフィードバック行列 K が存在するとき、 $G_p(s)$ はほぼ強正実 (almost strictly positive real) であるという。

上の定義を Hilbert 空間上に拡張すると、ほぼ強正実性は(7)式から、次式のようなスカラー f と対称正定有界作用素 P が存在することとなる。

$$\left. \begin{aligned} \langle P(Az - fb\langle c, z \rangle), z \rangle &\leq -M_0 \langle z, z \rangle \\ \langle Pb, z \rangle &= \langle c, z \rangle \\ \text{for } z \in \mathcal{D}(A) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (62)$$

ここに、 M_0 はある正の数とする。このとき、(62)式の第1式は(1)が出力フィードバックにより指数的に安定化できることを意味している。しかし、 $b\langle c, \cdot \rangle$ は退化作用素であるので、 $A - fb\langle c, \cdot \rangle$ を指数安定にできない場合がある⁽²⁸⁾。このため、指数安定性の条件を緩めた次の定義を Hilbert 空間におけるほぼ強正実性の定義とする。

〔定義3〕 次式を満足する実数 M_1 と対称正定有界作用素 P が存在するとき、系(1)、(2)はほぼ強正実であるという。

$$\left. \begin{aligned} \langle PAz, z \rangle &\leq M_1 \langle c, z \rangle^2 \\ \langle Pb, z \rangle &= \langle c, z \rangle \\ \text{for } z \in \mathcal{D}(A) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

このとき、次の定理が成立する。

《定理2》 系(1)、(2)はほぼ強正実であるとする。更に、次の条件のどちらかが成り立つとする。

- (i) A の有界な逆作用素が存在し、かつ $\langle c, A^{-1}b \rangle \neq 0$
- (ii) $M_2 > M_1$ なる実数 M_2 に対して $A - M_2 b\langle c, \cdot \rangle$

の有界な逆作用素が存在し、かつ $c, (A - M_2 b \langle c, \cdot \rangle)^{-1} b \neq 0$

このとき、(9)～(11)式の制御則により(6)式が達成できる。ただし、 $\gamma_1 > 0$ とする。

(証明) 付録2を参照のこと。

〈4・2〉 拡散系の場合 次の一次元の拡散系を対象とする⁽²⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(t) \\ a > 0, 0 < x < 2\pi \\ z(0, t) &= z(2\pi, t), z_x(0, t) = z_x(2\pi, t) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

また、出力は入力と同置された次式で与えられるとする。

$$y(t) = \int_0^{2\pi} b(x)z(x, t)dx \quad (65)$$

ここで、 $H = L^2(0, 2\pi)$

$$Az = a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (66)$$

とおくと、 A は次のようにスペクトル分解できる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-an^2) \langle \cdot, \phi_n \rangle \phi_n \\ \phi_n &= e^{jn\pi} \quad (j = \sqrt{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

A は漸近安定でないモード ϕ_0 をもっており、次式が成立する。

$$\langle Az, z \rangle \leq 0, z \in \mathcal{D}(A) \quad (68)$$

この場合には、 A の有界な逆作用素は存在しない。しかし、 A はコンパクトな縮小半群を生成するので、 $\langle b, \phi_0 \rangle \neq 0$ であるならば、 $A_c = A - b \langle b, \cdot \rangle$ は指数安定な半群を生成する⁽³⁰⁾。また、 A_c はスペクトル作用素であるので有界な逆作用素 A_c^{-1} が存在することがわかる。更に、(65)式より

$$\begin{aligned} A_c z &= Az - b \langle b, z \rangle \\ &= Az - by \end{aligned} \quad (69)$$

であるので、(63)式において、 $P = I, M_1 = 0$ とした式が成立するので、《定理2》がそのまま適用できることがわかる。ただし、この例では M_1 は既知であるので、 $k_1(t)$ は時変である必要はなく、 $k_1(t) = 1$ と固定してもよい。

〈4・3〉 柔軟構造物の場合 ダンピングのない次式の一次元柔軟構造物を対象とする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + a \frac{\partial^4 z(x, t)}{\partial x^4} &= b(x)u(t) \\ a > 0, 0 < x < 1 \\ z(0, t) &= 0 = z(1, t), z_{xx}(0, t) = z_{xx}(1, t) \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

作用素 A_0 を

$$A_0 z = a \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \quad (71)$$

とし、 w を(24)式でよくと次式が得られる。

$$\dot{w} = Aw + du \quad (72)$$

ここに、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (73)$$

とする。このとき、内積を(28)式でよくと次式が成立する。

$$\langle Aw, w \rangle_w = 0 \quad (74)$$

上式は(63)式の第1式で $P = I, M_1 = 0$ とおいた場合に相当している。(63)式の第2式より出力を

$$y = \langle b, z \rangle_H \quad (75)$$

とすると(63)式が成立する。このとき、作用素 $A - b \langle b, \cdot \rangle$ は強安定なスペクトル作用素となるが³、拡散系の場合と異なり指数安定性は保証されない⁽³¹⁾。

また、 A は逆作用素

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -A_0^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

をもつが

$$\langle c, A^{-1}d \rangle_w = 0 \quad (77)$$

となる。この場合には(付1)式のような δ が定義できないので、 $r=0$ のときのみ制御則(9)～(11)式は(6)式を保証する。しかし、これは追従制御というよりは単なる出力フィードバックによる安定化になってしまう。これを避けるためには、(63)式において恒等作用素でない P を見つける必要があるが、ここでは見つけることはできなかった。

5. あとがき

本論文では、未知パラメータをもった単一入出力のスペクトル系の有限次元追従制御問題を取扱った。その結果、Hilbert空間の意味で系が強正実かほぼ強正実であるならば、一次の適応制御機構により出力を希望の定値へ収束させることができることを証明した。更に、拡散系と柔軟構造物に対して制御系を構成し、センサ・アクチュエータのコロケーションの重要性を指摘した。このような制御系において、目標値が定値でない場合でもその微分値が十分小さいならば出力誤差を十分小さくできることが証明できるが、紙面の都合上省略した。また、多入出力系への拡張は今後の課題である。最後に、本研究は昭和62年度および63年度の文部省科学研究費奨励(A)の一部によったことを付記して謝意に代えたい。

(昭和63年7月25日受付、平成元年3月17日再受付)

文 献

- (1) M. J. Balas : "Trend in Large Space Structure Control Theory", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-27**, 522 (1982)
- (2) M. J. Balas : "Feedback Control of Flexible Systems", *ibid.*, **AC-23**, 673 (1978)
- (3) Y. Sakawa : "Feedback Stabilization of Linear Diffusion Systems", *SIAM J. Contr. & Optim.*, **21**, 667 (1983)
- (4) J. M. Schumacher : "A Direct Approach to Compensator Design for Distributed Parameter Systems", *ibid.*, **21**, 823 (1983)
- (5) R. F. Curtain : "Finite Dimensional Compensators for Parabolic Distributed Systems with Unbounded Control and Observation", *ibid.*, **22**, 255 (1984)
- (6) M. J. Balas : "Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures", *J. Guidance & Control*, **2**, 252 (1979)
- (7) R. J. Benhabib, R. P. Iwens & R. L. Jackson : "Stability of Large Space Structure Control Systems Using Positivity Concept", *ibid.*, **4**, 487 (1981)
- (8) 宮里・北森 : 「放物型分布定数系のモデル規範型適応制御」計測自動制御学論, **21**, 1163 (昭 60-11)
- (9) 小林 : 「分布定数系のモデル規範形適応制御に関する考察」, 同上, **21**, 999 (昭 60-9)
- (10) 松尾・富永・相良 : 「放物型分布定数系に対する有限次元適応制御の可能性に関する一考察」, 第 28 回自動制御連合講演会前刷, p.83 (昭 60)
- (11) T. Matsuo, A. Tominaga, M. Sugisaka & S. Sagara : "Design of Finite-Dimensional Adaptive Output Regulator for Spectral Systems", Proc. of IMACS/IFAC International Symposium on Modelling and Simulation of Distributed Parameter Systems, p.661 (1987)
- (12) C. E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans & G. Stein : "Robustness of Continuous-Time Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-30**, 881 (1985)
- (13) 金井・内門 : 「ロバスト適応制御」, 計測と制御, **26**, 406 (昭 62-5)
- (14) P. A. Ioannou & P. V. Kokotovic : "Robust Redesign of Adaptive Control", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-29**, 202 (1984)
- (15) P. A. Ioannou & K. S. Tsakalis : "A Robust Direct Adaptive Controller", *ibid.*, **AC-31**, 1033 (1986)
- (16) Z. J. Chen & P. A. Cook : "Robustness of Model-Reference Adaptive Control Systems with Unmodelled Dynamics", *Int. J. Contr.*, **39**, 201 (1984)
- (17) R. L. Kosut & B. Friedlander : "Robust Adaptive Control : Conditions for Global Stability", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-30**, 610 (1985)
- (18) R. F. Curtain : "Spectral Systems", *Int. J. Contr.*, **39**, 657 (1984)
- (19) R. F. Curtain : "Pole Assignment for Distributed Systems by Finite-Dimensional Control", *Automatica*, **21**, 57 (1985)
- (20) T. Kobayashi : "Global Adaptive Stabilization of Infinite-Dimensional Systems", *Syst. & Control Lett.*, **9**, 215 (1987)
- (21) N. Levan : "Stability of an Exponentially Stabilizable System" *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-29**, 939 (1984)
- (22) R. Datko : "Extending a Theorem of A. M. Iiapunov to Hilbert Space", *J. Math. Anal. & Appl.*, **32**, 610 (1970)
- (23) 市川・金井・鈴木・田村 : 適応制御 (昭 59) 昭晃堂
- (24) R. F. Curtain & A. J. Pritchard : Infinite Dimensional Linear Systems Theory (1978) Springer
- (25) S. A. Pohjolainen : "Robust Multivariable PI-Controller for Infinite Dimensional Systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-27**, 17 (1982)
- (26) A. Ichikawa : "Stability of Flexible Systems", Proc. of IMACS/IFAC International Symposium on Modelling and Simulation of Distributed Parameter Systems, 655 (1987)

- (27) I. Bar-Kana & H. Kaufman : "Global Stability and Performance of a Simplified Adaptive Algorithm", *Int. J. Control*, **42**, 1491 (1985)
- (28) J. S. Gibson : "A Note on Stabilization of Infinite Dimensional Linear Oscillators by Compact Linear Feedback", *SIAM J. Control & Optim.*, **18**, 311 (1980)
- (29) N. Levan & L. Rigby : "Strong Stability of Linear Contractive Control Systems on Hilbert Space", *ibid.*, **17**, 23 (1979)
- (30) C. D. Benchimol : "A Note on Weak Stabilizability of Contraction Semigroups", *ibid.*, **16**, 373 (1978)
- (31) A. V. Balakrishnan : "Strong Stabilizability and the Steady State Riccati Equation", *Appl. Math. Optim.*, **7**, 335 (1981)
- (32) A. Pazy : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (1983) Springer

付 録

1. 《定理 1》の証明

(7) 式の第 1 式より A は指数安定である⁽²¹⁾。従って、スペクトル作用素 A の固有値はすべて複素平面の左半面にあることになり、 $0 \in \rho(A)$ がわかる。ここに、 $\rho(A)$ は A のレゾルベント集合を表すとする。これより A は有界な逆作用素 A^{-1} をもつ。定数 δ と誤差 e を各々次式で定義する。

$$\delta \triangleq \langle c, A^{-1}b \rangle^{-1} \dots \dots \dots (\text{付 } 1)$$

$$e \triangleq z - A^{-1}b(\delta r) \dots \dots \dots (\text{付 } 2)$$

(1) 式, (2) 式より次の誤差方程式が成立する。

$$\dot{e} = Ae + b(u + \delta r) \dots \dots \dots (\text{付 } 3)$$

$$e_v \triangleq y - r = \langle c, e \rangle \dots \dots \dots (\text{付 } 4)$$

(9) 式を代入した (付 3) 式と (10) 式, (11) 式をまとめると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bk_1 y + (k_2 + \delta)r \\ -\gamma_1 y(y-r) \\ -\gamma_2 r(y-r) \end{pmatrix} \\ &\dots \dots \dots (\text{付 } 5) \end{aligned}$$

上式において右辺第 1 項の線形作用素は、強連続半群の生成素となる。また、右辺第 2 項は (e, k_1, k_2) について任意の有界領域でリプシッツ連続であり、 (e, k_1, k_2) の作る空間はやはりヒルベルト空間である。このことは、上式の解がある有限区間 $t \in [0, t]$ において強い解をもつことを意味する。〔参考文献 (32) p. 189 Theorem 1.6〕。このとき、正値関数 $V(t)$ を次式のようにおく。ただし、 $t \in [0, T]$ とする。

$$\left. \begin{aligned} &\gamma_1 \neq 0 \text{ のとき} \\ &V(t) = \frac{1}{2} \langle Pe, e \rangle + \frac{1}{2\gamma_1} k_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} (k_2 + \delta)^2 \\ &\gamma_1 = 0 \text{ のとき} \\ &V(t) = \frac{1}{2} \langle Pe, e \rangle + \frac{1}{2\gamma_2} (k_2 + \delta)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (\text{付 } 6)$$

(7)式, (9)~(11)式を用いると次式が成立する。 $\gamma_1 \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \langle PAe, e \rangle + \frac{1}{\gamma_1} k_1 \dot{k}_1 + \frac{1}{\gamma_2} (k_2 + \delta) \dot{k}_2 \\ &\quad + \{k_1 y + (k_2 + \delta)r\} \langle Pb, e \rangle \\ &= \langle PAe, e \rangle \leq -M_0 \langle e, e \rangle \leq 0 \\ &\dots\dots\dots(\text{付 } 7) \end{aligned}$$

(付6), (付7)式より, $t \in [0, T)$ において $0 \leq V(t) \leq V(0)$ であるので, $\langle Pe, e \rangle$, k_1 , k_2 は一様有界である。更に, P は対称正定有界作用素であり, $N\|e\|^2 \leq \langle Pe, e \rangle \leq M\|e\|^2$ なる正数 N, M が存在することにより $\|e\|$ も一様有界となる。このことから, (付6)式の解は $[0, \infty)$ まで延長できることがわかる。 $e \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ は次のようにしてわかる。(付7)式の両辺を $[0, t]$ で積分すると次式のようになる。

$$V(t) - V(0) \leq -M_0 \int_0^t \|e\|^2 dt \dots\dots\dots(\text{付 } 8)$$

$V(t)$ は正値関数であるので(付8)式より

$$0 < V(t) \leq V(0) - M_0 \int_0^t \|e\|^2 dt \dots\dots\dots(\text{付 } 9)$$

が成立する。この式は任意の $t > 0$ に対して成立するので, 次式が成り立つ。

$$\int_0^\infty \|e\|^2 dt \leq \frac{1}{M_0} V(0) \dots\dots\dots(\text{付 } 10)$$

従って

$$e \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \dots\dots\dots(\text{付 } 11)$$

が満足されなければならない。

2. 《定理2》の証明

A の有界な逆作用素が存在し, $\langle c, A^{-1}b \rangle \neq 0$ の場合には, 誤差方程式は付録1と同様に次式で与えられる。

$$\dot{e} = Ae + b(u + \delta r) \dots\dots\dots(\text{付 } 12)$$

$$e_y = \langle c, e \rangle = y - r \dots\dots\dots(\text{付 } 13)$$

このとき, $M_2 > M_1$ なる実数 M_2 を用いて(付2)式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - M_2 b \langle c, \cdot \rangle) e + b \{u + M_2 e_y + \delta r\} \\ &\dots\dots\dots(\text{付 } 14) \end{aligned}$$

(9)式を代入すると, (付14)式は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - M_2 b \langle c, \cdot \rangle) e + b \{\theta_1 y + \theta_2 r\} \\ &\dots\dots\dots(\text{付 } 15) \end{aligned}$$

ここに, θ_1, θ_2 は

$$\theta_1 = k_1 + M_2, \quad \theta_2 = k_2 + \delta - M_2$$

である。正値関数 $V(t)$ を次式のようにおく。

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \langle Pe, e \rangle + \frac{1}{2\gamma_1} \theta_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \theta_2^2 \\ &\dots\dots\dots(\text{付 } 16) \end{aligned}$$

$\dot{V}(t)$ を計算すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \langle PAe, e \rangle - M^2 \langle c, e \rangle^2 \\ &\leq -(M_2 - M_1) \langle c, e \rangle^2 \leq 0 \\ &\dots\dots\dots(\text{付 } 17) \end{aligned}$$

《定理1》と同様に, 誤差方程式右辺の連続性より, $t \in [0, \infty)$ において解が存在し, $V(t)$ 単調非増加性と P が対称正定有界作用素であることから, $\|e\|$, k_1 , k_2 の有界性が言える。

上式から, 任意の $t > 0$ に対して

$$V(0) \geq (M_2 - M_1) \int_0^t \langle c, e \rangle^2 dt \dots\dots\dots(\text{付 } 18)$$

が成り立つことから

$$\langle c, e \rangle \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \dots\dots\dots(\text{付 } 19)$$

がわかる。

また, 有界な A^{-1} が存在しない場合でも, スペクトル作用素 $A_c = A - M_2 b \langle c, \cdot \rangle$ が有界な逆作用素をもち $\langle c, A_c^{-1}b \rangle \neq 0$ の場合には, δ と誤差 e を

$$e \triangleq z - A_c^{-1}b(\delta r) \dots\dots\dots(\text{付 } 20)$$

$$\delta \triangleq \langle c, A_c^{-1}b \rangle^{-1} \dots\dots\dots(\text{付 } 21)$$

と定義すると次の誤差方程式を得る。

$$\dot{e} = A_c e + b(u + M_2 y + \delta r) \dots\dots\dots(\text{付 } 22)$$

これより, A^{-1} が存在する場合と同様に(付19)式が成立する。