ある種の非線形最適制御の一次近似解法とその収束条件

正員 師 玉 康 成 (防衛大)

正員 太 田 豊 生 (防衛大)

1. はじめに

本論文では、拘束のない非線形最適制御問題の数値計算法、特に第2章で定式化されるような線形二次形式問題に正の定数 ε と非線形関数 g による積 $\varepsilon \cdot g$ の形の非線形項が加わった問題に関する数値計算法について一次近似解法を提案し、その収束条件を不動点定理を用いて求める。

著者らは、従来から最適制御の特に2点境界値問題の数値計算法を主題とした一次近似解法を提案し、不動点定理を応用してその収束性を考察してきた⁽¹⁾⁻⁽³⁾。著者らの研究の主眼は、従来提案されている最適制御の数値計算法、例えばこう配法⁽⁴⁾や準線形化法⁽⁵⁾などと比較して

- (i) アルゴリズムが簡単である。
- (ii) 初期推定解の選択にそれほど影響されず安定した収束が得られる。
- (iii) 繰返し計算の過程で試行的なパラメータの選択を必要としない。

という点にある。

前論文⁽¹⁾において著者らは、数回以上の繰返し計算を前提として、非線形最適制御の2点境界値問題の解を次のような線形2点境界値問題の解の列 $\{(x_k, \lambda_k)\}_k$ の極限として求めることを提案した。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{\lambda}_k \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ \lambda_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$x_k(t_0) = x^i : x_k(t_f) \text{ 未定}$$

$$\lambda_k(t_0) \text{ 未定} : \lambda_k(t_f) = 0$$

ここで、 k は繰返し計算の回数を表し、 x_k および λ_k は繰返し k 回目の状態変数 x と正準変数 λ の近似解を表す。また F および G は元の非線形問題の式

を線形項と非線形項に分けた場合の行列と非線形関数を表す。

この方法の特徴は、各繰返しの過程で非線形項 $G(x, \lambda)$ の x と λ を、その繰返し計算の1回前に求められた x と λ の近似解に置き換えることによって、非線形項 G を x と λ に無関係な時変形の定数として扱うことにある。この工夫の結果、非線形問題を解法の容易な線形問題を繰返し解くことにより、それほど初期解の選択に影響されずに漸近的に解を求めることができた⁽¹⁾。しかも、計算の過程で人為的にパラメータを調整する必要がない。この計算法は前述の著者らの主眼点のうち少なくとも(ii), (iii)はある程度満足していると考えられる。

しかし、次の二つの点で検討課題が残された。第一の点はアルゴリズムの簡潔さである。著者らの工夫によって、非線形2点境界値問題は解法が容易な線形2点境界値問題を繰返し解くことによって求められるが、その線形問題を解くにはベルマンの方法⁽⁶⁾と同様に不変埋込み法 $\lambda = Sx + h$ によってもう1組の S と h の常微分方程式を解き、 λ の初期点 $\lambda(t_0)$ を $\lambda(t_0) = S(t_0)x(t_0) + h(t_0)$ によって求め、線形2点境界値問題を初期点問題に帰着させている。

これはあまり簡潔とは言えない。これを解決する一つの方法として、アルゴリズムを x, λ に関したものから不変埋込み法 $\lambda = Sx + h$ によって x と h に関したものに再構成することを考えた⁽²⁾。これによって前論文の方法⁽¹⁾が x, λ, S, h に関する四つの方程式を解く必要があったのに比べ、 x, S, h に関する三つの方程式を解けばよいので、その分アルゴリズムが簡潔になる。また x と h に関したものにアルゴリズムを再構成すれば、その漸化式中に線形二次形式問題の解である線形フィードバックの閉ループを表す式が出現するため、その指数安定性によりアルゴリズムの収束性の改良が期待できる。このような着眼から実際にアルゴリズムを再構成し、数値計算例でそのアルゴリズム

First-Order Approximation Method for Certain Non-linear Optimum Control Problems and its Convergence Condition.
By Yasunari Shidama, Member & Toyomi Ohta, Member
(The National Defense Academy).

師玉康成：正員、防衛大学校電気工学教室
太田豊生：正員、防衛大学校電気工学教室

ムによる関数列 $\{(x_k, h_k)\}_k$ の収束について良好な結果を得たことは既に述べた⁽²⁾。

第二の検討課題は計算過程における境界条件の変動と収束性に関するものである。著者らの方法の収束性の評価式はベルマンの準線形化法⁽⁵⁾と同じく、繰返し回数と前後の近似解の関連とを考察して求めた⁽¹⁾。すなわち、 k を繰返し計算の回数とし、 x および λ の初期近似解をそれぞれ x_0, λ_0 、繰返し1回目の近似解を x_1, λ_1 とするときに、ある $M > 0$ が存在して

$$M^k \{\|x_0 - x_1\| + \|\lambda_0 - \lambda_1\|\}^k / k!$$

で評価される。これに対し、ベルマンの準線形化法の収束性はある $L > 0$ を用いて

$$L^{2k} \{\|x_0 - x_1\| + \|\lambda_0 - \lambda_1\|\}^{2k}$$

で評価され上式の $\{ \}$ 中が < 1 であれば、非常に速い収束が得られる。しかし、このためには初期近似解 x_0, λ_0 を真の解の十分近くに選ぶことが要求され、真の解が未知である以上このような選択は難しい。それに対して著者らの方法は、 $1/k!$ で評価されるため繰返しを多く必要とするものの、準線形化法ほどには初期近似解の選択に影響されないものである。

ところが上述の収束性の議論はベルマンの方法にしても、著者らの方法にしても初期点を固定したうえで評価式を用いている。アルゴリズムの収束性の概略の評価という点ではこれでよいかもしれないが、厳密に考えると各繰返し計算での λ_k の初期点是不変埋込み法による関係式 $\lambda_k(t_0) = S(t_0)x' + h(t_0)$ によって求め、 h は前回の繰返し計算による近似解 x_{k-1}, λ_{k-1} を含む方程式の解であるから、実際には λ_k の初期点 $\lambda_k(t_0)$ は各繰返し計算で変動する。

前述の収束性の議論⁽¹⁾はこの点を考慮していない。前報告⁽²⁾などで述べた方法はこの点で、 x は初期点で h には終端点で $h(t_f) = 0$ という形で固定されるから、境界条件の変動がなく前論文⁽¹⁾の方法よりも改善されるはずである。しかし、収束性の評価式を求めてみると、前論文⁽¹⁾のような単純な $1/k!$ による評価が得られなかった。理論的に収束を保障するためには、更に関数列 $\{h_k\}$ の一様収束性をも保障する必要があるとした⁽²⁾。

しかし、実際の数値計算では、著者らが試みたとすべの場合に $\{h_k\}$ の一様収束性を保障する必要がなく、良好な収束が得られた。なぜそのような数値計算結果が得られたかを解析することは、上記に述べたように著者らのアルゴリズムをより簡潔にし、その収束性の議論をより厳密にするうえで重要である。もし、このような数値計算結果が得られる条件が解析的に求められれば、少なくともその求められた条件下で、著

者らの提案するアルゴリズムは本項の冒頭で述べた著者らの三つの主眼点を満足するものとなる。

記号の説明 関数 $h^m(x, y)$ の x, y に関する偏微分を

$$\frac{\partial}{\partial x} h^m(x, y) = h_x^m$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h^m(x, y) = h_{xy}^m$$

のように表す。 x が n 次元ベクトル $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ であるとき (T は転置記号を表す)、関数 $g(x)$ の x に関する偏微分 g_x を次の n 次元行ベクトルとして定義する。

$$g_x = [g_{x1}, g_{x2}, \dots, g_{xn}]$$

もし、 $g(x)$ が n 次元ベクトルならば g_x は

$$g_x = \begin{bmatrix} g_{x1}^1, \dots, g_{xn}^1 \\ \vdots \\ g_{x1}^n, \dots, g_{xn}^n \end{bmatrix}$$

のように表現される。 $(g_x)^T$ を g_x^T で表す。

2. 問題の設定

制御対象の状態方程式および初期条件が

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \varepsilon_1 g(x(t), u(t), t) \quad \dots\dots\dots (1a)$$

$$x(t_0) = x_i \quad \dots\dots\dots (1b)$$

で与えられ、最小にする評価関数 $J(u)$ が

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + \varepsilon_2 g(x(t), u(t), t) \right\} dt + \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) \quad \dots\dots\dots (2)$$

である最適制御問題を考える。ここに、 t は時間変数で t_0 は初期時刻、 t_f は終端時刻を表す。 $x(t) \in R^n$ 、 $u(t) \in R^m$ ($m \leq n$) は時刻 t における状態変数および制御量を表し、 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ はそれぞれ $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $n \times n$ 、 $m \times m$ の時変行列、また $g(x(t), u(t), t)$ 、 $g(x(t), u(t), t)$ は任意の非線形項とする。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は正の実数とする。

以下、表現を簡単にするため混乱の恐れがなければ $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $g(x(t), u(t), t)$ 、 $g_x(x(t), u(t), t)$ などと x 、 u 、 $g(x, u, t)$ 、 $g_x(x, u, t)$ で表すことにする。

〔仮定1〕 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ は区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続である。

〔仮定2〕 $g(x, u, t)$ 、 $g_x(x, u, t)$ は区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続であり、 x, u に関してリプシッツ連続である⁽⁶⁾。 g の x に関するリプシッツ定数を L_g^* で、 u に関するリプシッツ定数を L_u^* で表す。

〔仮定3〕 $g_x(x, u, t)$, $g_u(x, u, t)$, $q_x(x, u, t)$, $q_u(x, u, t)$ が存在し、区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続であり、〔仮定2〕と同様に x, u に関してリプシッツ連続である。 g_x の x に関するリプシッツ定数を L_{gx} で、 u に関するリプシッツ定数を L_{gu} で表す。以下同様に g_u , q_x , q_u の x, u に関するリプシッツ定数を各々 L_{gu}^* , L_{gx}^* , L_{qx}^* , L_{qu}^* , L_{qu}^* で表す。

〔仮定4〕 任意の $t \in [t_0, t_f]$ に対し、 $R(t)$ は対称正定であり、 $Q(t)$ は対称準正定である。また、 Q_f は対称準正定である。

更に $\lambda \in R^n$ を用いて関数 H を

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \varepsilon_2 q(x, u, t) + \lambda^T \{A x + B u + \varepsilon_1 g(x, u, t)\} \quad (3)$$

で定義するとき

〔仮定5〕 $H_u(x, u, \lambda, t) = 0$ の解が、
 $u = \rho(x, \lambda, t)$

と表せるものとする。

陰関数定理⁽⁶⁾により条件〔仮定5〕が成り立つための十分条件は $\text{rank}(g_{uu}) = \text{rank}(q_{uu}) = m$ である。また関数 ζ を

$$\zeta(x, \lambda, t) = R^{-1} B^T \lambda + \rho(x, \lambda, t) \quad (4)$$

で定義し、

〔仮定6〕 関数 ζ は x, λ に関して以下のようなリプシッツ連続性が成り立つものとする。

$$\begin{aligned} \exists K_1 > 0, \forall x, x', \lambda \in R^n: \\ \|\zeta(x', \lambda, t) - \zeta(x, \lambda, t)\| &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) K_1 \|x' - x\| \\ \exists K_2 > 0, \forall x, \lambda, \lambda' \in R^n: \\ \|\zeta(x, \lambda', t) - \zeta(x, \lambda, t)\| &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) K_2 \|\lambda' - \lambda\| \end{aligned}$$

ζ の導入と〔仮定6〕については例えば文献(7)の西川らの方法による。 ρ を $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ のまわりで $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ についてべき級数展開すると

$$\rho = \rho \Big|_{\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \right)^n \rho$$

となる。ここで $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ のとき

$$H_u(x, u, \lambda, t) = u^T R + \lambda^T B$$

であるから、上式第1項は $-R^{-1} B^T \lambda$ 、第2項の級数項を ζ とおくと

$$\rho = -R^{-1} B^T \lambda + \zeta$$

視察により ζ が x, λ に関しリプシッツ連続で、 $\varepsilon_1 < 1, \varepsilon_2 < 1$ あれば、 ζ のリプシッツ定数はたかだか $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) K$ の形をしていることがわかる。

3. 計算アルゴリズム

以下、著者が既に報告したアルゴリズム⁽²⁾について、 h_k の一様収束を保障する工夫を省略し、これにより簡潔なものに再構成する。

〈3.1〉 準備 まず $S(t) \in R^{n \times n}$ をリカッチ形行列微分方程式

$$\dot{S} = -SA - A^T S + SBR^{-1}B^T S - Q \quad (5a)$$

$$S(t_f) = Q_f \quad (5b)$$

の解とする。〔仮定1〕と〔仮定4〕により、この方程式は対称な一意解をもつことが知られている⁽⁸⁾。更に $h \in R^n$ に対して

$$\tilde{A} = A - BR^{-1}B^T S \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x, h, t) &= \varepsilon_1 g(x, \rho(x, Sx + h, t), t) \\ &\quad - BR^{-1}B^T h + B\zeta(x, Sx + h, t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, h, t) &= -\varepsilon_1 g_x^T(x, \rho(x, Sx + h, t), t) \\ &\quad \{Sx + h\} - \varepsilon_2 q_x^T(x, \rho(x, Sx + h, t), t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x, h, t) &= -S\varepsilon_1 g(x, \rho(x, Sx + h, t), t) \\ &\quad + \tilde{q}(x, h, t) - SB\zeta(x, Sx + h, t) \end{aligned} \quad (9)$$

とおく。

次に4種のアルゴリズムのため、次の4種の微分方程式による漸化式を定義する。

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{g}(x_{k-1}^j, h_k^j, t) \quad (10a)$$

$$x(t_0) = x_i \quad (10b)$$

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{g}(x, h_k^j, t) \quad (10a')$$

$$x(t_0) = x_i \quad (10b')$$

$$\dot{h} = -\tilde{A}^T h + \tilde{y}(x_{k-1}^j, h_{k-1}^j, t) \quad (11a)$$

$$h(t_f) = 0 \quad (11b)$$

$$\dot{h} = -\tilde{A}^T h + \tilde{y}(x_{k-1}^j, h, t) \quad (11a')$$

$$h(t_f) = 0 \quad (11b')$$

〈3.2〉 再構成された新たなアルゴリズム (10)~(11') 式を用いて、次のアルゴリズム $AR_{11}, AR_{10}, AR_{01}, AR_{00}$ のいずれかを第2章の問題の性質に応じて選択し、実行する。

〔アルゴリズム AR_{11} 〕

(Step 0) $j=0$ とおき、 u の推定値 u_0^j を与え(1)式を解き x を求める。この x を x_0^j とし、 $h_0^j = 0$ とする。 $k=1$ とおく。

(Step 1) x_{k-1}^j, h_{k-1}^j を用いて(11)式を解き h を求め、この h を h_k^j とする。

(Step 2) x_{k-1}^j と h_k^j を用いて(10)式を解き x を求め、この x を x_k^j とする。

(Step 3) $j=0$ かつ $k=1$ のとき $k=2$ として

{Step 1}に戻る。 $j \geq 1$ または $k \geq 2$ のとき、十分小さい $\delta_1, \delta_2 > 0$ に対して、

$$\|x_k^j - x_{k-1}^j\| \leq \delta_1, \|h_k^j - h_{k-1}^j\| \leq \delta_2$$

が成立すれば {Step 4} を実行する。そうでなければ $k = k+1$ として {Step 1} に戻る。

{Step 4} $u = \rho(x_k^j, h_k^j, t)$ として (1) 式を解き x を求める。この x について十分小さい $\delta_3 > 0$ に対して、 $\|x_0^j - x\| \leq \delta_3$ が成立すれば

$$x_{\text{opt}} = x, u_{\text{opt}} = u$$

としてアルゴリズムの実行を終了する。そうでなければ

$$j = j+1, u_0^j = u, h_0^j = h_{k-1}^{j-1}, x_0^j = x, k = 1$$

として {Step 1} に戻る。

{アルゴリズム AR_{10} } AR_{10} は AR_{11} において (11) 式の代わりに (11') 式を用いる。ただし {Step 0} において h_0^j を与える必要はなく、{Step 1} で h_{k-1}^j は用いない。

{アルゴリズム AR_{01} } AR_{01} は AR_{11} において (10) 式の代わりに (10') 式を用いる。ただし {Step 2} で x_{k-1}^j は用いない。

{アルゴリズム AR_{00} } AR_{00} は AR_{11} において (10), (11) 式の代わりにそれぞれ (10'), (11') 式を用いる。ただし {Step 0} において h_0^j を与える必要はなく、{Step 1} で h_{k-1}^j は用いない。また {Step 2} で x_{k-1}^j も用いない。

第1章でも述べたが、これらのアルゴリズムにおいて、(6)~(9)式、微分方程式 (10)~(11') を用いる著者らのねらいは次の点にある。

(1) まず S はアルゴリズムの適用にあたって最初に1回だけ解けばよく、繰返し計算の過程で解くべき方程式は x と h に関する二つの方程式である。

(2) 次に、 x と h の方程式の境界条件は x が初期点で、 h が終端点で与えられているから解くのが簡単であり、アルゴリズムの実行は極めて容易である。しかも、これらの境界条件は固定されているので、前論文⁽¹⁾のように境界条件の変動による影響がない。

(3) (10)~(11')の各式はその線形部分に線形フィードバックによる閉ループの係数 $\tilde{A} = (A - BR^{-1}B^TS)$ を含む。これはアルゴリズムの収束性に寄与するので、非線形項 $\tilde{g}, \tilde{q}$ の定義時に注目すれば非線形項係数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の大きさが小さい場合、特に良い効果が期待できる。

これらのアルゴリズムのいずれを選択するかは、第2章に示すように非線形項 q や q の関数形や非線形項係数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の大きさによる。例えば、非線形項係数が大きくて解くことが困難であると考えられる場合

は、 x, h の微分方程式について両方が線形な式を用いる AR_{11} を適用する。この場合、アルゴリズムの収束は最も減速される。逆にそれほど困難が予想されない場合は AR_{00} を適用する。この場合、アルゴリズムの収束は最も速くなる。ただし、非線形項が逆に状態空間のある領域内ではシステムの安定性に寄与することもあり、この場合は AR_{00} を用いるほうが良い場合もある。

これらのアルゴリズムの実行によって得られた解の最適性については、その極限解を x_∞, h_∞ とするとき (10)~(11') 式によって

$$\dot{x}_\infty = \tilde{A}x_\infty + \tilde{g}(x_\infty, h_\infty, t) \dots\dots (10 \text{ a}''')$$

$$x_\infty(t_0) = x_i \dots\dots\dots (10 \text{ b}''')$$

$$\dot{h}_\infty = -\tilde{A}^T h_\infty + \tilde{q}(x_\infty, h_\infty, t) \dots (11 \text{ a}''')$$

$$h_\infty(t_f) = 0 \dots\dots\dots (11 \text{ b}''')$$

が成り立ち、 $\lambda_\infty = Sx_\infty + h_\infty$ とおき、(5), (10''), (11'') 式などを用いることにより、 $x_\infty, u_\infty = \rho(x_\infty, \lambda_\infty, t)$ 、 λ_∞ に関して周知の最適性の必要条件式⁽⁴⁾⁽¹⁰⁾ が得られる。すなわち x_∞, h_∞ は最適解の候補 $u_\infty = \rho(x_\infty, \lambda_\infty, t)$ を構成する。

4. 計算アルゴリズムの収束性

本章では、第3章で述べたアルゴリズムの収束性を検討する。ただし、(10), (11), (10'), (11') 式の解は数値積分ではなく厳密解によるものとする。逐次近似法で数値積分を実行するため、誤差の累積は避けられない。第3章で述べたアルゴリズムの {Step 4} はこのための工夫であり、この誤差をリセットするための目的でアルゴリズムのループを2重にしてある。外側の繰返し回数を j で表し、内側の繰返し回数を k で表している。ここでは、 j を固定した場合の収束性、すなわち {Step 1~3} のループの収束性について論じる。

<4.1> $\tilde{g}, \tilde{q}$ のリプシッツ連続性 [仮定1]~[仮定6] により $\tilde{q}(x, h, t)$ は区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続であり、正の定数 $\Gamma_{\tilde{g}^x}, \Gamma_{\tilde{g}^{h_1}}, \Gamma_{\tilde{g}^{h_2}}$ が存在して x, h に関するリプシッツ連続性が成り立つ。

{性質1} $\forall x, x', h, h' \in R^n$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{g}(x, h, t) - \tilde{g}(x', h', t)\| \\ & \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_{\tilde{g}^x} \|x - x'\| \\ & \quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_{\tilde{g}^{h_1}} \|h - h'\| + \Gamma_{\tilde{g}^{h_2}} \|h - h'\| \end{aligned}$$

全く同様に $\tilde{q}(x, h, t)$ は区間 $[t_0, t_f]$ 上、 t に関して連続であり、 $R^n \times R^n$ の任意の有界部分空間上で x, h に関するリプシッツ連続性が成り立つ。すなわち、

{性質2} 任意の $D > 0$ について

$$\exists \Gamma_y^{x^D}, \Gamma_y^{h^D} > 0, \quad \forall x, x', h, h' \in R^h,$$

$$\|x\|, \|x'\|, \|h\|, \|h'\| < D;$$

$$\|\bar{g}(x, h, t) - \bar{g}(x', h', t)\|$$

$$\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_y^{x^D} \|x - x'\|$$

$$+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_y^{h^D} \|h - h'\| \quad (\text{付録参照})$$

〈4・2〉 関数空間上の写像 T 微分方程式の初期値に関する解の一意的性⁽⁹⁾から、(10), (10'), (11), (11') 式により、関数 x_{k-1}^j, h_{k-1}^j に関数 x_k^j, h_k^j を一意に対応させる写像

$$T(x_{k-1}^j, h_{k-1}^j) = (x_k^j, h_k^j)$$

が得られる。 T は関数空間 $L^1 \times L^1$ 上の写像と見なす。 L^1 は完備空間⁽⁶⁾であり、直積空間 $L^1 \times L^1$ も完備空間である。 L^1 上のノルムは

$$\|x\|_1 = \int_{t_0}^{t_f} \|x(t)\| dt$$

で定義される。

以下の議論では、ここで第3章のアルゴリズムの実行によって得られる関数列 $\{x_k^j\}, \{h_k^j\}$ が有界であるとする。そのための条件や理由は文献(10), (11)などに詳細に記述されているから本論文ではこれを省き、その方法を著者らの場合に適用させていただく。著者らが求めた収束性の十分条件を述べる前に、この種のアルゴリズムの一般的収束条件として知られる文献(10)の十分条件について、これを著者らのアルゴリズムに適用した場合に導かれる十分条件を述べておく。

過去に局所収束の十分条件⁽¹⁰⁾は既に求められているが、著者らの場合は繰返しの前後段階の解の差の値を特に微小量に保持せずともこの条件が成り立つ。これは非線形項にリプシッツ連続性の制約を課したためである。文献(10)の表現に従って記述すると

$$\eta_k(t) = \|x_k^j(t) - x_{k-1}^j(t)\| \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\xi_k(t) = \|h_k^j(t) - h_{k-1}^j(t)\| \quad \dots\dots\dots (13)$$

であり、(10), (11') 式から

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_k(t) &\leq \|\dot{x}_k^j(t) - \dot{x}_{k-1}^j(t)\| \\ &\leq c \eta_k(t) + c \eta_{k-1}(t) + c \xi_k(t) \quad \dots\dots\dots (14a) \end{aligned}$$

$$\eta_k(t_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (14b)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\xi}_k(t) &\leq \|\dot{h}_k^j(t) - \dot{h}_{k-1}^j(t)\| \\ &\leq c \eta_{k-1}(t) + c \xi_k(t) \quad \dots\dots\dots (15a) \end{aligned}$$

$$\xi_k(t_f) = 0 \quad \dots\dots\dots (15b)$$

ここで、

$$\begin{aligned} c = \max \{ &\|\tilde{A}\| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_y^{x^D}, (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_{\sigma^x}, \\ &(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_{\sigma^h}, \Gamma_{\sigma^h}, (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \Gamma_y^{h^D} \} \end{aligned}$$

以後、文献(10)の議論のように収束の十分条件 $e^{c(t_f - t_0)} < 2 \quad \dots\dots\dots (16)$

が導かれる。しかしながら、この条件式(16)は厳しすぎる。なぜなら、この条件式(16)が成立するためには $c > 0$ が十分小さいか、または時間区間 $[t_0, t_f]$ が十分短いことが必要である。この議論は $\tilde{A}$ などの性質に独立した一般的なものであり、環境によってはより緩い条件が求められるはずである。例えば、 $\tilde{A}$ は線形最適フィードバックの係数行列になっている⁽⁸⁾ので、もっと緩い条件が求められる。

〈4・3〉 緩い条件 まずアルゴリズム AR_{11} の収束性の条件を求める。(10), (11)式から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{x_k^j - x_{k-1}^j\} &= \tilde{A} \{x_k^j - x_{k-1}^j\} \\ &+ \bar{g}(x_{k-1}^j, h_k^j, t) - \bar{g}(x_{k-2}^j, h_{k-1}^j, t) \\ &\dots\dots\dots (17a) \end{aligned}$$

$$x_k^j(t_0) - x_{k-1}^j(t_0) = 0 \quad \dots\dots\dots (17b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{h_k^j - h_{k-1}^j\} &= -\tilde{A}^T \{h_k^j - h_{k-1}^j\} \\ &+ \bar{g}(x_{k-1}^j, h_{k-1}^j, t) - \bar{g}(x_{k-2}^j, h_{k-2}^j, t) \\ &\dots\dots\dots (18a) \end{aligned}$$

$$h_k^j(t_f) - h_{k-1}^j(t_f) = 0 \quad \dots\dots\dots (18b)$$

ここで次の仮定をする

〔仮定7〕 行列微分方程式

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \tilde{A} \Phi(t, t_0); \quad \Phi(t_0, t_0) = I_{n \times n} \quad \dots (19)$$

の解が存在し、

$$\begin{aligned} \exists M_0 > 0, \exists c > 0, \forall t, r \in [t_0, t_f], t \geq r: \\ \|\Phi(t, r)\| &\leq M_0 e^{-c(t-r)} \end{aligned}$$

次に微分方程式(17), (18)を、それと等価な積分方程式⁽⁶⁾に書き換えると次の二式を得る

$$\begin{aligned} \{x_k^j(t) - x_{k-1}^j(t)\} &= \int_{t_0}^t \Phi(t, r) \{ \bar{g}(x_{k-1}^j, h_k^j, r) \\ &- \bar{g}(x_{k-2}^j, h_{k-1}^j, r) \} dr \quad \dots\dots\dots (20) \\ \{h_k^j(t) - h_{k-1}^j(t)\} &= - \int_t^{t_f} \Phi^T(r, t) \{ \bar{g}(x_{k-1}^j, h_{k-1}^j, r) \\ &- \bar{g}(x_{k-2}^j, h_{k-2}^j, r) \} dr \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

簡単のため

$$\eta_k(t) = \|x_k^j(t) - x_{k-1}^j(t)\|$$

$$\xi_k(t) = \|h_k^j(t) - h_{k-1}^j(t)\|$$

と表し、

$$\begin{aligned} M = \max \{ &M_0 \Gamma_{\sigma^x}, M_0 \Gamma_{\sigma^h}, M_0 \Gamma_{\sigma^h}, \\ &M_0 \Gamma_y^{x^D}, M_0 \Gamma_y^{h^D} \} \end{aligned}$$

とおくと

$$\eta_k(t) \leq \int_{t_0}^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M e^{-c(t-r)} \eta_{k-1}(r)$$

$$+ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) M e^{-c(t-r)} \xi_k(r) dr \dots\dots\dots (22)$$

$$\xi_k(t) \leq \int_{t_0}^{t_f} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M e^{-c(t-r)} \cdot \{\eta_{k-1}(r) + \xi_{k-1}(r)\} dr \dots\dots\dots (23)$$

(22) 式を用い、途中部分積分を実行すると

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \cdot \{1 - e^{-c(t-t_0)}\} \cdot \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \eta_{k-1}(t) \\ & \quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) \xi_k(t)\} dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \cdot \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \eta_{k-1}(t) \\ & \quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) \xi_k(t)\} dt \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

同様に (23) 式を用い、途中部分積分を実行すると

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \xi_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M/c \cdot \{\eta_{k-1}(t) + \xi_{k-1}(t)\} dt \\ & \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

(24), (25) 式から

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{M/c + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) M^2/c^2\} \\ & \quad \cdot \{\eta_{k-1}(t) + \xi_{k-1}(t)\} dt \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

よって (25), (26) 式から

$$\begin{aligned} & \|\|x_k^j - x_{k-1}^j\|_1 + \|h_k^j - h_{k-1}^j\|_1 \\ & \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{2M/c + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) M^2/c^2\} \\ & \quad \cdot \{\|x_{k-1}^j - x_{k-2}^j\|_1 + \|h_{k-1}^j - h_{k-2}^j\|_1\} \\ & \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

従って、直積空間 $L^1 \times L^1$ のノルムを各ノルムの和で定義するとき

$$\begin{aligned} & \|T(x_{k-1}^j, h_{k-1}^j) - T(x_{k-2}^j, h_{k-2}^j)\| \\ & = \|x_k^j - x_{k-1}^j\|_1 + \|h_k^j - h_{k-1}^j\|_1 \\ & \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{2M/c + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) M^2/c^2\} \\ & \quad \cdot \| (x_{k-1}^j, h_{k-1}^j) - (x_{k-2}^j, h_{k-2}^j) \| \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここで、 $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{2M/c + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) M^2/c^2\} < 1$ が成り立つためには

$$\begin{aligned} & c > M \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ & \quad + \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1)}\} \\ & \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

が十分条件として得られる。この条件が成り立つとき T は縮小写像となるから、アルゴリズム AR_{11} は収束する。再び収束性の十分条件が得られた。この条件は制御区間や (10), (11) 式の係数の大きさに (16) 式の

ような厳しい制約がないという意味で緩い条件である。

次にアルゴリズム AR_{01} の収束性については、積分方程式 (20) の代わりに、

$$\begin{aligned} & \{x_k^j(t) - x_{k-1}^j(t)\} = \int_{t_0}^t \Phi(t, r) \\ & \quad \cdot \{\tilde{g}(x_k^j, h_k^j, r) - \tilde{g}(x_{k-1}^j, h_{k-1}^j, r)\} dr \\ & \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

を用いる。(30) 式から (24) 式の評価式の代わりに

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} M/c \cdot \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \eta_k(t) \\ & \quad + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) \xi_k(t)\} dt \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

が得られる。次に $c > (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M$ を仮定すれば、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) M / (c - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M) \xi_k(t) dt \\ & \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで (25), (32) 式から (26) の代わりに

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \eta_k(t) dt \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1) M^2 \\ & \quad / (c^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) M c)\} \cdot \{\eta_{k-1}(t) + \xi_{k-1}(t)\} dt \\ & \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

が成り立つ。(25), (33) 式から (29) 式に相当する条件式

$$\begin{aligned} & c \geq M \{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\} \\ & \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

が導かれる。

同様にアルゴリズム AR_{10} , AR_{00} の収束性についても議論できる。以上の結果を整理すると

(収束の十分条件)

第 2 章で定式化される非線形最適制御問題について、アルゴリズム $AR_{00} \sim AR_{11}$ はこれにより得られる関数列が有界で次の条件が満たされるとき収束する。

(1) 線形フィードバック係数 $\tilde{A} = A - BR^{-1}B^T S$ について⁽⁸⁾、これが構成する閉ループの微分方程式系

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} x(t) = \{A - BR^{-1}B^T S\}^T x(t) \\ & x(t_0) = x_i \end{aligned} \dots\dots\dots (35)$$

が指数安定⁽⁸⁾であり

(2) その安定性を表す式

$$\begin{aligned} & \|x(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)x_i\| \\ & \leq \|x_i\| M_0 e^{-c(t-t_0)} \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

の定数 M_0 , $c > 0$ および (10) ~ (11') 式の実線形項のリブシット定数 $\Gamma_{\theta^x} \sim \Gamma_{\theta^{hD}}$ および非線形項係数 ε_1 , ε_2 に関して AR_{11} については

$$c > M \{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1)} \} \quad (29)$$

AR_{01} については

$$c \geq M \{ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \} \quad (34)$$

AR_{10} については

$$c \geq \{ 3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sqrt{9(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \} M/2 \dots \dots (37)$$

AR_{00} については

$$c \geq \{ 3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sqrt{5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \} M/2 \dots \dots (38)$$

$$M = \max \{ M_0 \Gamma_{\theta^x}, M_0 \Gamma_{\theta^{h_1}}, M_0 \Gamma_{\theta^{h_2}}, M_0 \Gamma_{\theta^{y^D}}, M_0 \Gamma_{\theta^{hD}} \}$$

が成立する。

(29), (34), (37), (38) 式の条件は $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ がともに 0 に十分近く、かつ (36) 式の条件が成り立つ場合、すなわち第 2 章の問題が線形二次形式問題に近い場合で、その非線形項を 0 とおいて作られる線形二次形式問題の解 (線形フィードバックの閉ループ) が指数安定であれば必ず成り立つものと期待できる。実際、著者らの数値計算の経験から本論文の提案するアルゴリズムをこのような線形二次形式問題に近い問題に対して適用すると、ほとんどすべての場合収束することがわかっている。

この意味において上記の収束の十分条件は著者らの経験に一致する。

〈4・3〉節で著者らの提案するアルゴリズムの収束条件について定量的な考察を行った。非線形システムに関して〈4・3〉節のような局所的でない議論を、しかも定量的に行おうとすれば、非線形項にリブシット連続性などの制約を課することは止むを得ないことである。

しかし実際の問題では、このようなリブシット連続性が成り立つとは限らず、(29) 式などの不等式が成り立つことを確認することは容易でない場合がある。このような場合、議論が局所的な収束性に後退するがアルゴリズムの実行過程での x, h がある x_s, h_s の近傍 $\{ (x, h) \mid \|x_s - x\| \leq \varepsilon_1, \|h_s - h\| \leq \varepsilon_2 \}$

に含まれることを仮定する。この近傍内の非線形項の x, h に関する微分係数が有界で、かつ x, h に関して連続であれば局所的なリブシット条件が成り立つ⁽⁹⁾。

5. 数値計算例

著者らの導いた条件を具体的な数値例を用いて検討する。

〔例題〕 状態方程式が

$$\dot{x} = -3.0x + u + 0.15 \sin(x)u$$

$$x(0) = 1$$

であり、評価関数が

$$J = \int_0^{5.0} \{x^2 + u^2\} / 2 dt$$

である問題を考える。 x, u はスカラーとする。

アルゴリズム AR_{10} のための方程式は

$$A = -3.0, B = 1, g = \sin(x)u,$$

$$\varepsilon_1 = 0.15, \varepsilon_2 = 0$$

$$Q = 1, R = 1,$$

$$\rho(x, Sx + h) = -(Sx + h)(1 + 0.15 \sin(x))$$

$$\zeta(x, Sx + h) = Sx + h + \rho(x, Sx + h)$$

$$= -0.15 \sin(x)(Sx + h)$$

$$\tilde{g} = -(0.0225 \sin(x)^2 + 0.3 \sin(x))(h + Sx) - h$$

$$\tilde{y} = \{0.0225 h^2 + 0.045 S h x + 0.0225 S^2 x^2$$

$$\cdot \cos(x) \sin(x) + \{0.15 h^2 + 0.3 S h x$$

$$+ 0.15 S^2 x^2\} \cos(x) + 0.0225 \sin(x)^2$$

$$\{S h + S^2 x\} + 0.3 \sin(x) \{S h + S^2 x\}$$

$$\dot{x} = (-3 - S)x + \tilde{g}(x_{k-1}^i, h_{k-1}^i); x(0) = 1$$

$$\dot{h} = -(-3 - S)h + \tilde{y}(x_{k-1}^i, h); h(5) = 0$$

また、(5) 式による線形フィードバック係数 S を数値積分で求めると

$$0.16 \leq S \leq 0.0$$

ここで局所収束性を調べるため $|x_k^i|, |h_k^i| < 1$ を仮定する。まず〈4・2〉節の十分条件式 (16) については、 $c \geq 3.0$ であり $(t_f - t_0) = 5$ である。この旧来の十分条件

$$e^{c(t_f - t_0)} < 2 \quad (16)$$

は明らかに成立しない。しかし、〈4・3〉節の十分条件 (36), (37) 式については (36) 式が

$$\dot{x} = (-3.0 - S)x, x(0) = 1$$

となるから

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq e^{-3.0(t - \tau)}$$

よって $c \geq 3.0, M_0 = 1$ ここで

$$K_1 = 1, K_2 = 1, \varepsilon_1 = 0.15, \varepsilon_2 = 0,$$

$$L_{\theta^u} = 1, L_{\theta^x} = 1, L_{\theta^x} = 0, L_{\theta^u} = 0,$$

$$L_{\theta^x} = 1, L_{\theta^u} = 1, L_{\theta^x} = 0, L_{\theta^x} = 0,$$

$$|\sin(x)|, |\cos(x)| \leq 1$$

を用いれば、 $\Gamma_{\theta^x} = 3.83, \Gamma_{\theta^{h_1}} = 1, \Gamma_{\theta^{h_2}} = 0.49, \Gamma_{\theta^{y^D}}$

$=2.32$, $\Gamma_y^{AD}=2.83$ であり, $M \leq 3.83$ となる。従って〈4・3〉節の(37)式の十分条件

$$\begin{aligned} c &\geq 3 \\ &\geq \{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \sqrt{9(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\} M/2 \\ &= 2.58 \end{aligned}$$

が成り立つ。解が $|x|, |h| < 1$ を満たせば, 少なくとも局所収束するはずである。実際アルゴリズム AR₁₀ を実行すると繰返し5回で収束し $J=8.075 \times 10^{-2}$ を得た。初期近似として u_0 は -50 から $+25$ までの任意の値で収束した。初期近似 $u_0 = -50$ に対する J_0 は 6.96×10^{-3} であり, かなりかけ離れた初期解から収束している。これは局所収束であるとは考え難い。更に注目すべきことに, この問題は非線形項が $10.0 \sin(x)u$ であっても収束した。この場合, 〈4・3〉節の十分条件からも明らかにはずれている。すなわち, ε_1 は例題で与えたような微小係数でなくても収束する。また非線形項が $q=10.0 \sin(x)$ のように u を含まない場合は本法は更に良好な収束性を示す。

上記のように詳しく条件を調べなくても, (10)式の線形部分が指数安定ならばこのアルゴリズムを適用できるものと考えられる。実際, 前論文で報告した⁽²⁾ように文献(12)のどの例題もこのアルゴリズムを用いて解くことができた。比較のため同じ例題を文献(12)や文献(13)の方法を用いて解いたが, それらの数値計算の結果は著者らの提案する第3章のような繰返しアルゴリズムが従来この配法のような試行的なパラメータの選択も必要なく, 準ニュートン法に見られるような煩雑な式を用いなくても, 初期近似の選択にわずらわされることなく容易に解を求められるという十分有効な方法になり得ることを示している。しかも, それらのかなりかけ離れた初期近似の与え方から考えて, 第4章で与えた十分条件が必ずしも満たされているとは考えられない。むしろ, この結果は著者らの提案するアルゴリズムが第4章で示した収束の十分条件からはずれる場合でも収束する事例にもなっている。

6. 終りに

本論文では, 線形二次形式問題に定数 ε と非線形関数 g との積 $\varepsilon \cdot g$ の形の非線形項が加わった問題について一次近似解法を提案した。

その方法は繰返し計算で用いる計算式中に, 線形二次形式問題の解である線形フィードバックの効果を実現しようとするものである。特にその計算法の収束性に関して, 著者らの意図した効果により係数の大きさや制御区間の長さに絶対的な制約がないという意味で, 従来知られている十分条件(16)式よりも緩い定量的

な条件を導くことができた。その結果, 第1章で述べたように著者らの従前の方法を更に簡潔なものとすることができた。しかしこの十分条件からはずれた場合, すなわち線形フィードバックの効果が及ばないと考えられるほど非線形項が大きい場合も著者らの方法は収束する。この考察は今後の課題である。線形フィードバックを含む非線形系の安定性や, 制御系のロバスト性などの実施環境との関連も取上げるべきであろう。

(昭和63年5月26日受付, 同63年10月6日再受付)

文 献

- (1) 師玉・山浦・太田: 電学論C, **107**, 1141 (昭62-12)
- (2) 師玉・山浦・太田: 信学論A, **J71-A**, 1697 (昭63-9)
- (3) 師玉・山浦・太田: 第28回自動制御連合講演会予稿, p.101 (昭60)
- (4) 嘉納: システムの最適理論と最適化, p.215 (昭62) コロナ社
- (5) 日野: 境界値問題の解法 (昭56) 朝倉書店
- (6) シュヴァルツ: 解析学 1-7 (昭47) 東京図書
- (7) 西川・三宮・板倉: 計測自動制御学会誌, **7-1**, 79 (昭46)
- (8) 児玉・須田: システムのためのマトリクス理論, p.248 (昭53) 計測自動制御学会
- (9) ポントリャーギン: 常微分方程式, p.141 (昭59) 共立出版
- (10) 坂和: 最適化と最適制御 (昭55) 森北出版
- (11) 山本・杉浦: 計測自動制御学会誌, **9-1**, 71 (昭48)
- (12) N. B. Nedeljkovic: *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-26**, 4, 868 (1981)
- (13) D. H. Jacobson: *J. of Optimization Theory and Applications*, **2**, 411 (1968)

付 録

定数 Γ_θ^x , $\Gamma_\theta^{A_1}$, $\Gamma_\theta^{A_2}$, $\Gamma_y^{x^D}$, Γ_y^{AD} はそれぞれ以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \Gamma_\theta^x &= 2\|B\| \{K_1 + K_2\|S\|\} + \|B\|L_\theta^u\|R^{-1}\|\|S\| \\ &\quad + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{K_1L_\theta^u + K_2L_\theta^u\|S\|\} + L_\theta^x \\ \Gamma_\theta^{A_1} &= \|B\|^2\|R^{-1}\| \\ \Gamma_\theta^{A_2} &= \|B\|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \{2K_2 + L_\theta^u\|R^{-1}\|\} \\ &\quad + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 K_2L_\theta^u \\ \Gamma_y^{x^D} &= \|B\|DL_{\theta x}\|R^{-1}\|\|S\|\{\|S\| + 1\} \\ &\quad + 2\|B\|\|S\|\{K_1 + K_2\|S\|\} \\ &\quad + \|B\|\|R^{-1}\|\|S\|\{S\|L_\theta^u + L_{\theta x}^u\} \\ &\quad + 2D(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)K_1L_{\theta x}^u\{\|S\| + 1\} \\ &\quad + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\{K_1L_\theta^u\|S\| + K_1L_{\theta x}^u \\ &\quad + K_2L_\theta^u\|S\|^2 + K_2L_{\theta x}^u\|S\|\} \\ &\quad + 2L_\theta^x\|S\| + L_{\theta x}^x + DL_{\theta x}^x \\ \Gamma_y^{AD} &= \|B\|DL_{\theta x}\|R^{-1}\|\{\|S\| + 1\} \\ &\quad + \|B\|\|S\|\{2K_2 + L_\theta^u\|R^{-1}\|\} \\ &\quad + \|B\|L_{\theta x}\|R^{-1}\| + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)K_2 \\ &\quad \cdot \{DL_{\theta x}^u\|S\| + DL_{\theta x}^u + L_\theta^u\|S\| \\ &\quad + L_{\theta x}^u\} + L_\theta^x \end{aligned}$$