多数のパラメータ変動を伴う熱交換器 ネットワークの最適設計

正 員 西 谷 紘 一 (大阪大)

非会員 清 水 浩 司 (大阪大)

非会員 樫 田 榮 一 (大阪大)

1. はじめに

操業条件が頻繁に変化するプロセスでは、種々のパラメータが変動するが、常に決められた範囲内の定常特性が得られるように設計したいことがある。このようなプロセスの設計では、各種パラメータの変動をパラメータ空間での領域としてとらえ、その領域内の任意の変動に対して必ず実行可能な操作が存在するように設計しておく方法がとられる。この設計問題を領域内のすべての変動に対して実行可能性を保证する最適化問題として定式化すると、無限個の制約式が含まれる計画問題となる。

従来の研究では、変動パラメータの空間でシステム設計者が実行可能性を保证しておきたい変動許容領域が超直方体（オルソトープ）で与えられ、システムが潜在的にもつ変動を許容する領域が凸あるいは各直交座標軸方向に平行な線分上で凸、すなわち一次元凸である場合について考察されてきた⁽¹⁾⁻⁽³⁾。このとき、オルソトープのすべての端点上でシステムの仕様を満たす操作の存在を保证すれば、オルソトープ内の任意の点でシステムの実行可能性を保证することができる。しかし、オルソトープの全端点上でシステム制約式をたてると変動パラメータの数が多くなったとき、制約式の数が幾何級数的に多くなる。一般に制約条件付きの非線形計画問題では問題のサイズに対する制限が厳しい。例えば、ACOS アプリケーションシステム NMPS-6 では扱える問題の大きさを、独立変数の数-

50 個、不等号条件式の数-50 個、等号条件式の数-50 個というように制限している⁽⁴⁾。

本論文では、数多くの変動パラメータを考慮しなければならない具体的なプロセスとして、ほとんどの製造プラントでエネルギー回収のため付けられている熱交換ネットワークを取上げ、対象プロセスの特徴を利用してできるだけ制約条件式の数少なくして、非線形計画問題を解く設計法を提案する。最後に開発したアルゴリズムを用いて、それぞれ 5、15 個の変動パラメータをもつ設計問題を解いた結果を示す。

2. 従来の研究

プロセスに課せられるすべての制約条件を次のように一般的な不等号条件式の集合で表す。

$$f_j(d, z, \theta) \leq 0, \quad \forall j \in J \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $d \in R^n$ は設計変数ベクトル、 $z \in R^q$ は操作変数ベクトル、 $\theta \in R^p$ は変動が予想される変動パラメータベクトルを表す。このとき、すべての制約条件を満たす操作変数ベクトル z の存在が保証される変動パラメータベクトル θ の領域 S を次のように表す。

$$S \equiv \{\theta \mid \exists z [f_j(d, z, \theta) \leq 0, \quad \forall j \in J]\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

この領域 S を設計 d がもつ変動許容（トレランス）領域と呼ぶ。

一方、パラメータの変動を考慮してプロセスの設計を行う場合、予想されるパラメータの変動領域 T を次式の超直方体（オルソトープ）で与える。

$$T \equiv \{\theta \mid \theta^L \leq \theta \leq \theta^U\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 θ^L 、 θ^U はそれぞれベクトルの下限値および上限値を表す。このとき、領域 T 内のすべての点 θ に対して、プロセスに課せられたすべての制約条件を満足する操作 z が常に存在することを次のように表現し、これをパラメータ変動を考えた場合の設計仕様と

Optimal Design of Heat Exchanger Network with a Large Number of Uncertain Parameters. By Hirokazu Nishitani, Member, Kouji Shimizu, Non-member & Eiichi Kunugita, Non-member (Faculty of Engineering Science, Osaka University).

西谷紘一：正員，大阪大学基礎工学部情報工学科
清水浩司：非会員，大阪大学基礎工学部化学工学科
樫田榮一：非会員，大阪大学基礎工学部情報工学科

する。

$$\{z[f_j(d, z, \theta) \leq 0, \forall j \in J]\} \forall \theta \in T \dots (4)$$

この条件を領域 T での実行可能 (フィジビリティ) 条件と呼ぶことにする。

いまパラメータの各要素を確率変数と考え、それぞれの変動は独立とする。このときパラメータ変動に対して操作コストを最小にする最適操作 $z^*(\theta)$ をとると、操作コストの期待値 $E\{C(z^*(\theta), \theta)\}$ を評価に用いるのがふさわしい⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} & E\{C(z^*(\theta), \theta)\} \\ &= \int_{\theta_1} \dots \int_{\theta_p} C(z^*(\theta), \theta) g_1(\theta_1) \dots g_p(\theta_p) \\ & \quad \times d\theta_1 \dots d\theta_p, \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

ここで、 $g_j(\theta_j)$ は θ_j に関する確率密度関数である。領域 T 内での実行可能性を保証し、プロセスの装置コスト $F(d)$ と操作コストの期待値の和を最小にする最適設計問題は次のように定式化することができる。

〔設計問題 1〕

$$\begin{aligned} & \text{"Minimize } F(d) + E\{C(z^*(\theta), \theta)\} \dots (6) \\ & \text{subject to} \\ & \{z[f_j(d, z, \theta) \leq 0, \forall j \in J]\} \forall \theta \in T \dots (4) \\ & \text{with respect to } d \text{ and } z^*(\theta), \forall \theta \in T." \end{aligned}$$

しかし、この問題は領域 T 内の任意のパラメータ値 θ に対する制約条件式 $\{f_j, j \in J\}$ を含むため、このままでは解くことはできない。そのため、操作コストの期待値をパラメータ θ 空間の n 個の代表点での操作コストの線形和で近似する。

〔設計問題 2〕

$$\begin{aligned} & \text{"Minimize } F(d) + \sum_{i=1}^n w^i C(z^i, \theta^i) \dots (7) \\ & \text{subject to} \\ & [f_j(d, z^i, \theta^i) \leq 0, \forall j \in J] \forall i = \{1, \dots, n\} \\ & \dots \dots \dots (8) \\ & \text{with respect to } d \text{ and } z^i, i = \{1, \dots, n\}." \end{aligned}$$

ここで、 w^i は点 θ^i の重み係数である。仮に有限個の決定変数をもつこの最適化問題が解けたとしても、 n 個の代表点 $\theta^i, i = \{1, \dots, n\}$ でしか操作変数ベクトル z の存在を保証していない。それゆえ得られた設計 d が領域 T 内の任意のパラメータ値 θ に対して実行可能である保証はない。

一方、何らかの方法によって得られた設計 d^* に対し、領域 T 内の任意の点 θ で操作変数ベクトル z が存在するか否かを判定することを実行可能性 (フィジビリティ) テストと呼ぶ。(4)式で表された領域 T での実行可能条件は次式と等価であることが知ら

れている⁽⁶⁾。

$$\max_{\theta \in T} \min_z \max_{j \in J} f_j(d^*, z, \theta) \leq 0 \dots \dots \dots (9)$$

上式の左辺の max-min-max 問題の解をクリティカルポイントと呼ぶが、一般に求めるのは難しい。また (9) 式は次のように書き表すことができる⁽³⁾。

$$\max_{\theta \in T} \phi(d^*, \theta) \leq 0 \dots \dots \dots (10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \phi(d^*, \theta) \equiv \min_{\{u, z\}} \{u | f_j(d^*, z, \theta) \leq u, \forall j \in J\} \\ \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

関数 $\phi(d^*, \theta)$ は、設計 d^* のもとで θ でのシステム制約条件式の満たし具合を表す指標となる。 θ で関数 $\phi(d^*, \theta)$ の値が非正であれば z が存在し (実行可能)、更に全制約条件式をその値だけ強化できることを示す。また正であればそのままでは実行不可能であるが一つの十分条件として、もし全制約条件式をその値だけ緩和すれば z が存在することを意味する。

指定したパラメータ値 θ についての実行可能性テストは容易にできるが、 T 内の無限個のパラメータ値 θ について、これを繰返すことは不可能である。しかし、特にトレランス領域 S が凸または一次元凸のとき、オルソトープ T の全端点で実行可能であれば T 全体での実行可能性が保証される⁽¹⁾⁻⁽³⁾。このとき設計問題は次のように簡略化できる。

〔設計問題 3〕

$$\begin{aligned} & \text{"Minimize } F(d) + \sum_{i=1}^n w^i C(z^i, \theta^i) \dots (7) \\ & \text{subject to} \\ & \phi(d, \theta) \leq 0, \forall \theta \in V \dots \dots \dots (12) \\ & \text{with respect to } d \text{ and } z^i, i = \{1, \dots, n\}." \end{aligned}$$

ここで V はオルソトープ T のすべての端点からなる集合である。しかし、この問題では 2^n 個の全端点についてすべての制約条件式が必要となる。従って、変動パラメータの次元の増加と共に全端点数は幾何級数的に増加し、それに比例して制約条件数も増える。その結果、問題のサイズに厳しい制限をもつ非線形計画法パッケージでは扱いきれない。それゆえ、設計段階で保証すべき変動パラメータベクトルの点をより少ない個数で済ます方法が必要になる。次章では、具体的なプロセスとして熱交換器ネットワークを取上げ、制約条件式の特徴を利用して最適設計問題のサイズをできるだけ小さくして効果的に解を得る方法を示す。

3. 熱交換器ネットワークの設計問題

図 1 に一般的な熱交換器ネットワークを示す。ネットワークでは L 個の高温流体と M 個の低温流体間

図 1 一般的な熱交換器ネットワーク

Fig. 1. General representation of a heat exchanger network.

の熱交換を N 個の熱交換器によって行っている。必要があれば高温流体の末端にはクーラを、低温流体の末端にはヒータを取付けて、目的とする出口温度を達成する。図中流れ $H_l (l=1 \sim L)$ は高温流体、流れ $C_m (m=1 \sim M)$ は低温流体を表し、両流体の熱容量流量は F_{Hl} , F_{Cm} 、ネットワークへの入口温度は t_{Hl}^1 , t_{Cm}^1 、ネットワークからの出口温度は t_{Hl}^0 , t_{Cm}^0 で表す。流体 C_m に取付けられたヒータを S_m , $m \in M_S$ 、流体 H_l に取付けられたクーラを W_l , $l \in L_W$ 、熱回収用の熱交換器を $\{1, \dots, N\}$ で表し、ネットワークを構成する全熱交換器ユニットの集合を E とする。

一般の熱交換器 $e \in \{1, \dots, N; W_l, l \in L_W\}$ の場合、設計方程式は次のように入温度 t_{He}^1 , t_{Ce}^1 と出口温度 t_{He}^0 , t_{Ce}^0 の線形関係式として表すことができる^{7c}。

$$\left. \begin{aligned} t_{Ce}^0 &= (1 - \alpha_e) t_{Ce}^1 + (\alpha_e) t_{He}^1 \\ t_{He}^0 &= (\alpha_e R_e) t_{Ce}^1 + (1 - \alpha_e R_e) t_{He}^1 \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

ここで、 α_e は設計変数である伝熱面積 A_e および設計パラメータである総括伝熱係数 U_e から決まる変数（熱交換効率）で、熱交換器の種類により関数形が変わる。例えば向流形熱交換器の場合、 α_e は熱容量流量比 R_e によって次のように表される。

(i) $R_e = F_{Cm}/F_{Hl} \neq 1$ のとき

$$\alpha_e = (k_e - 1)/(k_e R_e - 1) \dots (14)$$

ただし、

$$k_e = \exp(A_e U_e (R_e - 1)/F_{Cm})$$

(ii) $R_e = 1 (F_{Cm} = F_{Hl} = F_e)$ のとき

$$\alpha_e = U_e A_e / (F_e + U_e A_e) \dots (15)$$

一方、スチームヒータ $e \in \{S_m, m \in M_S\}$ の出口温度 t_{Ce}^0 , t_{He}^0 は次のように低温流体の入口温度 t_{Ce}^1 、スチーム入口温度 t_{se} により表される。

$$\left. \begin{aligned} t_{Ce}^0 &= (1 - \alpha_e) t_{Ce}^1 + (\alpha_e) t_{se} \\ t_{He}^0 &= t_{se} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

ここで、

$$\alpha_e = 1 - \exp(-A_e U_e / F_{Cm}) \dots (17)$$

等号制約式 (13), (16) を使って左辺の変数を消去することによって、ネットワーク内の任意の場所の温度は、各流れのネットワークへの入口温度、入口流量および各熱交換器の総括伝熱係数（以上は変動パラメータと見なされる）と伝熱面積（設計変数）のみによって決まる。

熱交換器ネットワークの設計では、更に次の不等号制約条件式が課せられる。

(1) 各熱交換器について両流体の入口温度は、必ず高温流体入口温度 t_{Hl}^1 が低温流体入口温度 t_{Ce}^1 より高くなければならない。

$$f_e = t_{Ce}^1 - t_{Hl}^1 \leq 0, e \in E \dots (18)$$

(2) 両流体のネットワークからの出口温度について、高温流体は決められた温度 t_{Hl}^* よりも低く、低温流体は決められた温度 t_{Cm}^* よりも高くなければならない。

$$f_l = t_{Hl}^0 - t_{Hl}^* \leq 0, l = 1, \dots, L \dots (19)$$

$$f_m = t_{Cm}^* - t_{Cm}^0 \leq 0, m = 1, \dots, M \dots (20)$$

(3) 従来、熱交換器の設計では、最小接近温度条件が課せられたが、この条件は熱交換器の伝熱面積があまり大きくならないように制約を与えるためのものであり、伝熱面積を含んだ目的関数の最小化によりネットワークを設計するときは除いても支障はない。

結局、熱交換器の個数と高温、低温両流体の個数の和 $(L + M + N)$ の数だけの不等号条件式がシステム制約条件式となる。設計問題は予想した領域内のパラメータの任意の変動のもとで、常に (18) ~ (20) 式の不等式を満足するように各熱交換器の伝熱面積を決定する問題となる。それらの不等号条件式を一般的に (1) 式で表現したとき、各ベクトル d , z , θ には次の変数が対応する。

(i) 設計変数ベクトル 各熱交換器の伝熱面積 $d = \{A_e, e \in E\}$

(ii) 変動パラメータ 各流体入口温度および流量、各熱交換器の総括伝熱係数

$$\theta = \{t_{Hl}^1, F_{Hl}, (l = 1 \dots L); t_{Cm}^1, F_{Cm}, (m = 1 \dots M); U_e, e \in E\}$$

(iii) 操作変数ベクトル 出口温度を調節するため操作する変数で、ヒータではスチーム入口温度 $\{t_{sm}, m \in M_S\}$ クーラでは冷却水出口温度 $\{t_{wl}^0, l \in L_W\}$ または冷却水流量 $\{F_{wl}, l \in L_W\}$ が相当する。

$$z = \{t_{sm}, m \in M_S; t_{wl}^0 \text{ or } F_{wl}, l \in L_W\}$$

システム制約式である不等号条件式 (18) ~ (20) は次

の特徴をもつ。

(1) 各制約条件式左辺はすべての変動パラメータ、すなわち各流体入口温度、流量および各熱交換器の総括伝熱係数について単調関数である。このことは直接一次導関数の符号を調べることににより簡単に確かめられる。

(2) システムがもつ変動パラメータについてのトレランス領域 S は一次元凸となる。これは注目する一つの変動パラメータ以外のパラメータを固定したとき、そのパラメータと操作変数の空間で全制約式が作る実行可能領域が連結となることを確かめることによって証明できる⁽⁷⁾。

(3) 各流れについてヒータまたはクーラが補助的な熱交換のためにのみ使用されることにより、各制約条件式は高々一つの操作変数を含む。

これらの特徴を使えば領域 T での実行可能条件を表す max-min-max 問題の解の候補点を次に示すように求めることができる。

ふつう操作変数を含まない各制約条件式についてのワーストポイントは次式により定義される⁽⁸⁾。

$$\max_{\theta \in T} f_k(d, \theta) \dots\dots\dots (21)$$

操作変数を含む制約条件式についても、操作変数の存在を無視して同様にワーストポイントを求めてみる。このようにして得たワーストポイントの中に真のクリティカルポイントが含まれるとは限らない⁽⁹⁾。しかし、熱交換器ネットワークの設計問題では、各制約式について操作変数の存在を無視して得たワーストポイントの集合が必ず真のクリティカルポイントを含んでいる(付録参照)。このことによって、領域 T での実行可能条件は全ワーストポイントより作られるクリティカルポイントの候補点で保証すればよいことがわかる。これらの候補点は高々不等号条件式の数だけある。その結果、クリティカルポイントの全候補点 $\{\theta^i, i \in N\}$ でのみ操作の実行可能性を保証し、変動パラメータ θ の幾つかの代表点 $\{\theta^i, i \in M\}$ での操作コストの加重平均を評価関数に含む最適設計問題は次のように定式化できる。

〔設計問題4〕

$$\text{“Minimize } F(d) + \sum_{i \in M} w^i C(z^i, \theta^i) \dots (22)$$

subject to

$$(f_j(d, z^i, \theta^i) \leq 0, \forall j \in J) \forall i \in M \cup N \dots (23)$$

with respect to d & $z^i, i \in M \cup N$.”

この問題によって設計の段階で実行可能性を保証すべき点は大幅に減らすことができる。しかし、設計問題をそのまま解くにはまだサイズは大きい。一回の最

適化計算によって設計を済ませる代わりに、設計—実行可能性テストの繰返しによって設計仕様を満足させる設計を見つけるのが現実的である。すなわち、何らかの方法で求められた設計に対して実行可能性テストを実施して実行不可能な点が探し出されたとき、次の再設計では、それらの点での実行可能性を追加する。この二段階設計法においても、再設計のための最適設計問題において、制約条件式の数をできるだけ少なくすることが必要である。そのためには問題設定の段階で種々の考察によって、満たされることが明らかな不平等制約条件式を削除しておくことが有効である。

4. 設計アルゴリズム

具体的な設計手法を以下に述べる。

〔ステップ1〕 全制約条件 J を操作変数 z を含むもの J^z と、そうでないもの J^d に分類する。

$$f_j(d, z, \theta) \leq 0, j \in J^z \dots\dots\dots (24)$$

$$f_j(d, \theta) \leq 0, j \in J^d \dots\dots\dots (25)$$

各制約条件式の変動パラメータに対する一次導関数の符号からワーストポイントを見つけ、クリティカルポイントの候補点の集合 K を作る。各候補点 $\theta^{c^i} \in K$ について、その点で最大値をとる制約条件式の指数集合 J^{zc^i}, J^{dc^i} を作る。

〔ステップ2〕 $k=1$ とおき、標準値 θ^0 だけでの実行可能性を考慮した標準設計 d_0 を次の問題を解いて求める。

〔設計問題5〕

$$\text{“Minimize } F(d_0) + C(z_0^0, \theta^0) \dots\dots\dots (26)$$

subject to

$$f_j(d_0, z_0^0, \theta^0) \leq 0, j \in J^z \dots\dots\dots (27)$$

$$f_j(d_0, \theta^0) \leq 0, j \in J^d \dots\dots\dots (28)$$

with respect to d_0 and z_0^0 .”

〔ステップ3〕 クリティカルポイントの全候補点で設計 d_{k-1} の実行可能性テストを行う。全候補点で実行可能ならば終了する。そうでなければ、非負条件を満たさなかった制約条件に注目し、それを抑えるための候補点を指数集合 J^{zc^i}, J^{dc^i} を用いて選び、候補点の集合 K_k を作る。なおこの集合の指数集合を N_k とする。

〔ステップ4〕 標準点 θ^0 および $\theta^{c^i} \in K_k$ での実行可能性を保証した設計問題を定式化する。

〔設計問題6〕

$$\text{“Minimize } F(d_k) + C(z_k^0, \theta^0) \dots\dots\dots (29)$$

subject to

$$f_j(d_k, z_k^0, \theta^0) \leq 0, j \in J^z \dots\dots\dots (30)$$

$$f_j(d_k, \theta^0) \leq 0, j \in J^d \dots\dots\dots(31)$$

$$f_j(d_k, z_k^i, \theta c^i) \leq 0, j \in J^z, i \in N_k \dots\dots(32)$$

$$f_j(d_k, \theta c^i) \leq 0, j \in J^d c^i, i \in N_k \dots\dots(33)$$

with respect to d_k, z_k^0 & $z_k^i, i \in N_k$.

本論文では、この問題を ACOS アプリケーションソフトウェア NMPS-6 に組込まれた SUMT によって解いた。

ここで述べた設計アルゴリズムの特徴は、実行可能条件を満たさない原因となっている制約条件を見つけ、それらの制約条件式の値に直接影響をもつクリティカルポイントの候補点を用いて、実行可能性を保証しようとするものである。制約条件を操作変数を含むか否かで分け、候補点 $\theta^i, i \in N_k$ で満たされない可能性のある制約条件だけを制約条件として含めている。これによって候補点の集合 K_k の要素数を I_k とすると制約条件の数は

$$\sum_{i=1}^{I_k} (J^d - J^d c^i) \dots\dots\dots(34)$$

だけ減らすことができる。またアルゴリズムでは操作コストを標準点でしか評価していないが、これは操作コストの期待値の近似計算のための代表点によって問題が大きくなることを避けるためである。クリティカルポイントの候補点を同時に代表点として扱うとき、繰返しごとに新たな候補点を評価関数に加えていかねばならず、そのたびに実行不可能な点が現れ、解を得るまでの繰返し回数が増えることがある。

5. 設 計 例

【例1】 図2に示した熱交換器ネットワークは高温、低温それぞれ二つの流れがあり、3個の熱交換器とスチームヒータ、ウォータクーラ各1個で構成されている。変動パラメータは各熱交換器、ヒータ、クーラの5個の総括伝熱係数 U_i で、標準値から $\pm 20\%$

図2 熱交換器ネットワーク I
Fig. 2. Heat exchanger I.

表1 熱交換器ネットワーク I の設計データ

Table 1. Design data for heat exchanger network I.

確定パラメータ値					
$F_1=21,912$	$F_4=27,461$	$F_7=38,009$	$F_{11}=31,674$	(kJ/hK)	
$t_1=389$	$t_4=333$	$t_7=522$	$t_{11}=433$	$t_{14}=311$	(K)
変動パラメータの標準値					
$U_1=3,066$	$U_2=3,066$	$U_3=3,066$	$U_4=4,088$	$U_5=3,066$	(kJ/m ² hK)

の変動が予想されているとする。設計条件および変動パラメータの標準値を表1に示す。この問題での操作変数はヒータ用スチーム温度 t_{13} と冷却水出口温度 t_{15} で、次の条件が課せられている。

$$544 \leq t_{13} \leq 556; 314 \leq t_{15} \leq 355 \dots\dots\dots(35)$$

設計に際しシステムに課せられる制約条件式は(18)～(20)式に対応するものがそれぞれ5, 2, 2個あり、合計9個となる。ただし4個は設定条件から常に満たされることがわかり、結局、次の5個の不等号制約式が残る。これらを操作変数 t_{13} または t_{15} を含むものとそうでないものに分けて次に示す。

$$\left. \begin{aligned} f_1^d &= 434 - t_6 \leq 0 & f_2^d &= t_{12} - 367 \leq 0 \\ f_3^d &= t_5 - t_8 \leq 0 & f_4^z &= 534 - t_3 \leq 0 \\ f_5^z &= t_{10} - 411 \leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

予想されるパラメータの変動に対応でき、更に装置コストと標準点での操作コストの和を最小にする各熱交換器ユニットの伝熱面積 A_i を求める。各コスト関数は次式で表されている。

$$F(d) = 145.6 \sum A_i^{0.6} \dots\dots\dots(37)$$

$$C(z^0) = 0.923 F_w^0 + 18.5 F_s^0 \dots\dots\dots(38)$$

ここで、 F_w^0, F_s^0 は標準パラメータ値でのスチームおよび冷却水の流量 (kg/hr) であり、コストの単位は (\$/yr) である。

各制約条件式の変動パラメータに対する一次導関数の符号を調べた結果を表2に示す。この表をもとに符号が重なるものをまとめ、クリティカルポイントの3個の候補点を求め、各候補点で最大となる制約条件

表2 各制約条件式の変動パラメータについての導関数の符号

Table 2. Sign of the first derivatives.

		変動パラメータ				
		U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
制約条件式	f_1^d	-	+	-	0	0
	f_2^d	-	0	0	0	0
	f_3^d	+	+	0	0	0
	f_4^z	0	-	0	-	0
	f_5^z	+	-	-	0	-

表 3 クリティカルポイントの候補点
および支配的な制約条件式集合

Table 3. Candidates of the critical point
& its dominant constraint set.

クリティカル ポイント	変動パラメータ					支配的な制約条件式集合	
	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	$J^{d_c i}$	$J^{z_c i}$
1	L	U	L	N	N	1, 2	
2	U	U	N	N	N	3	
3	U	L	L	L	L		4, 5

ここで、 U は上限値を、 L は下限値を、 N は標準値を示す。

表 4 設計過程および結果

Table 4. Iterative design process.

設 計	d_0		d_1	
伝熱面積 A_i (m^2)				
A_1	23.807		29.759	
A_2	70.530		68.744	
A_3	41.562		40.003	
A_4	4.058		4.077	
A_5	1.634		2.497	
評価関数値 (\$/year)	10,090		11,367	
	$\Psi(d, \theta)$	violated f_i	$\Psi(d, \theta)$	active f_i
クリティカル ポイント				
1	4.376	2	0.000	2
2	-0.590		-4.874	4, 5
3	3.152	4, 5	0.000	4, 5

の指数集合 $J^{z_c i}$, $J^{d_c i}$ を表 3 のように作った。標準値 θ^0 での最適化より得られた標準設計 d_0 に対して、クリティカルポイントの全候補点について実行可能性テストを行った結果を表 4 に示す。この結果、満たされない不等号条件式は f_2^d , f_4^d , f_5^d であることがわかる。これらの制約式の左辺の値を抑えるために、表 3 より $N_1 = \{1, 3\}$ を選んだ。このとき設計問題 6 は操作変数の上下限制約の 12 個を含めて、合計 23 個の不等号制約条件式をもつ。問題を解いて設計 d_1 を求め、その設計に対し全候補点について実行可能性テストを行った結果を表 4 右欄に示す。このとき、クリティカルポイントの候補点 3 点すべてで実行可能となり、得られた設計は決められた範囲内のすべての変動に対して実行可能であることがわかる。この問題で五次元オルソトープの 32 個の全端点で形式的に不等号制約式をたてると 288 個の制約条件式が生じ、ここで使ったソフトウェアでは扱えなくなる。

【例 2】 図 3 に示した 4 個の熱交換器と 1 個のスチームヒータで構成された熱交換器ネットワークの設計で総括伝熱係数は $\pm 10\%$ 、入口流量は $\pm 5\%$ 、低温流体の入口温度は $\pm 2\text{ K}$ 、高温流体の入口温度は $\pm 5\text{ K}$ の変動が予想される。このとき、15 個の変動パラメータに対して、操作変数はスチーム温度 t_{15} 一個のみである。各変動パラメータの標準値および設定

図 3 熱交換器ネットワーク II

Fig. 3. Heat exchanger II.

表 5 熱交換器ネットワーク II の設計データ

Table 5. Design data for heat exchanger network II.

変動パラメータの標準値									
$F_1=46.5$	$F_2=46.9$	$F_3=41.0$	$F_9=47.8$	$F_{12}=59.8$	(kW/K)				
$t_1=339.0$	$t_2=366.0$	$t_3=311.0$	$t_4=478.0$	$t_{12}=522.0$	(K)				
$U_1=3.066$	$U_2=3.066$	$U_3=3.066$	$U_4=3.066$	$U_5=4.088$	(kW/m ² K)				

表 6 各制約条件式の変動パラメータ
についての導関数の符号

Table 6. Sign of the first derivatives.

		変 動 パ ラ メ ー タ											
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_6	t_7	t_8	t_{12}	F_1	F_2	F_3	F_9
制 約 条 件 式	f_1^d	-	0	0	-	0	+	0	-	0	-	0	0
	f_2^d	0	-	0	0	-	0	+	0	0	-	0	0
	f_3^d	+	0	+	0	-	0	-	+	0	-	0	0
	f_4^d	+	+	+	+	-	-	+	+	+	-	+	-
	f_5^d	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	0
f ^z	f_6^z	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	-
	f_7^z	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	0

条件を表 5 に示す。設定条件から 3 個の条件が削除でき、設計で考慮すべき制約条件式は次の 7 式となる。

$$\left. \begin{aligned} f_1^d &= 455 - t_2 \leq 0 & f_2^d &= 477 - t_4 \leq 0 \\ f_3^d &= t_{11} - 339 \leq 0 & f_4^d &= t_6 - t_{12} \leq 0 \\ f_5^d &= t_{14} - 395 \leq 0 & f_6^z &= 477 - t_8 \leq 0 \\ f_7^z &= t_7 - t_{15} \leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

操作変数であるヒータ用スチーム温度 t_{15} については次の条件が課せられる。

$$489.0 \leq t_{15} \leq 509.0 \dots\dots\dots (40)$$

予想されるパラメータの変動に対して、実行可能でしかも伝熱面積の和を最小にする各熱交換ユニットの伝熱面積 A_i を求める。各制約条件式の 15 個の変動パラメータに対する一次導関数の符号を表 6 に、その結果より求めた 6 個のクリティカルポイントの候補点お

表 7 クリティカルポイントの候補点および支配的な制約条件式集合
Table 7. Candidates of the critical point & its dominant constraint set.

クリティカル ポイント	変 動 パ ラ メ ー タ															支配的な制約条件式集合	
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_{12}	F_1	F_2	F_3	F_4	F_{12}	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	$J_{d_0}^i$	$J_{d_1}^i$
1	L	L	N	L	L	U	U	N	L	L	L	N	L	N	N	1, 2	
2	U	N	U	U	N	L	N	L	U	N	L	L	N	N	N	3	
3	U	U	U	U	L	L	U	L	U	L	L	U	L	N	N	4	
4	U	U	U	U	L	L	L	L	U	U	L	U	L	L	N	5	
5	L	L	L	L	L	U	U	U	L	L	U	L	U	L	L		6
6	U	U	U	U	U	L	L	L	U	U	L	U	L	U	N		7

ここで、 U は上限値を、 L は下限値を、 N は標準値を示す。

表 8 設計過程および結果
Table 8. Iterative design process.

設 計	d_0	d_1
伝熱面積 A_1	71.68	159.8
A_2	15.82	20.67
A_3	30.25	42.79
A_4	17.82	29.39
A_5	12.31	15.52

	$\Psi(d, \theta)$	violated f_i	$\Psi(d, \theta)$	active f_i
クリティカル 1	12.73	2, 1, 6	0.000	1, 2
ポイント 2	9.64	5, 3	0.000	3
3	11.35	2, 3, 5	-1.046	2
4	15.19	5, 3	0.000	5
5	11.54	6, 1, 2	0.000	6
6	11.74	5, 3	-2.127	3

およびその点で最大値をとる制約式の指数集合を表 7 にまとめて示す。パラメータの標準値に対する最適化問題から標準設計 d_0 を求め、全候補点について実行可能性テストを行った結果を表 8 に示す。 d_0 はすべてのクリティカルポイントの候補点で実行不可能である。各点で実行不可能の原因となっている制約式は f_1^d , f_2^d , f_3^d , f_4^d , f_5^d , f_6^d であることより、それらに直接影響を与える候補点の集合として $N_1 = \{1, 2, 4, 5\}$ を選び、設計問題 6 を定式化した。制約条件式の数 は操作変数の上下限制約 10 個を含めて合計 29 個となる。得られた設計 d_1 に対し、全候補点について実行可能性テストを行った結果を表 8 右欄に示す。すべての点で実行可能度が非正となり、設計 d_1 は 15 次元のオルソトープ内の任意の変動に対して実行可能であることがわかる。

6. 終 り に

プロセスの設計に際して不確かさ、または変動をプロセスモデル中のパラメータの変動としてとらえ、予想される変動領域内のすべての変動に対応可能な設計を行う方法について考察した。多数のパラメータ変動を考慮してプロセスの設計を行う例として熱交換ネッ

トワークを取上げ、プロセスの特徴を利用して設計計算の負担を小さくする方法を示した。その結果、問題のサイズに厳しい制限をもつソフトウェアをもちいても、制限いっぱいまで利用してできるだけ多くの変動パラメータをもつ設計問題を解くことが可能になった。

(昭和 63 年 5 月 24 日受付, 同 63 年 9 月 26 日再受付)

文 献

- (1) J. W. Bandler: "Optimization of design tolerances using nonlinear programming", *J. Optimiz. Theory & Appl.*, **14**, 99 (1974)
- (2) J. W. Bandler, P. C. Liu & J. H. K. Chen: "Worst case network tolerance optimization", *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, **MTT-23**, 630 (1975)
- (3) K. P. Halemane & I. E. Grossmann: "Optimal process design under uncertainty", *AIChE J.*, **29**, 425 (1983)
- (4) NEC: ACOS アプリケーションシステム非線形数理計画システム説明書 (昭 58) 日本電気
- (5) D. F. Rudd & C. C. Watson: *Strategy of Process Engineering*, chapt. 12 (1968) John Wiley & Sons, New York
- (6) E. Polak & A. Sangiovanni-Vincentelli: "Theoretical and computational aspects of the optimal design centering, tolerancing, and tuning problem", *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, **CAS-26**, 795 (1979)
- (7) H. Nishitani, Y. Kutsuwa, K. Shimizu & E. Kunugita: "Design of heat exchanger network under uncertainty in the overall heat transfer coefficients", *J. Chem. Eng., Japan*, **21**, 375 (1988)
- (8) B. M. Kwak & E. J. Haug Jr.: "Optimum design in the presence of parameter uncertainty", *J. Optimiz. Theory & Appl.*, **19**, 527 (1976)
- (9) K. P. Halemane: "Studies on the optimal design of flexible chemical plants", Ph. D. Dissertation, Carnegie-Mellon University, p. 92 (1982)

付 録

各制約式についてのワーストポイントと max-min-max 問題の解 (クリティカルポイント) との関係

第 3 章で述べたように、熱交換器ネットワークでは各制約条件式は高々一つの操作変数しか含まない。いま、すべての制約条件式がその中に含まれている操作変数 z_i ごとに次のように整理できたとする。

$$z_i \leq f_{j^1 i}(d, \theta), \quad j \in J_i^1 \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 1)$$

$$f_{j^2 i}(d, \theta) \leq z_i, \quad j \in J_i^2 \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 2)$$

上式より、 z_i について次のように表される。

$$\max_{j \in J_i^1} \{f_{j^1 i}(d, \theta)\} \leq z_i \leq \min_{j \in J_i^2} \{f_{j^2 i}(d, \theta)\} \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 3)$$

z_i が存在するための条件は次式となる。

$$\max_{j \in J_i^1} \{f_{j^1 i}(d, \theta)\} - \min_{j \in J_i^2} \{f_{j^2 i}(d, \theta)\} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 4)$$

この条件は操作変数を含まない。ここで操作変数 z_i を消去した(付4)式と操作変数を含まない制約式を合せて次のように表す。

$$g_k(d, \theta) \leq 0, \quad k \in K \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 5)$$

上の各制約条件式についてのワーストポイントを次式より求め、 θ_c^k とする。

$$\max_{\theta \in T} g_k(d, \theta), \quad k \in K \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 6)$$

いま、各ワーストポイント θ_c^i で次の条件を満たすように設計 d を決めたとする。

$$g_k(d, \theta_c^i) \leq 0, \quad k \in K \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 7)$$

このとき、任意の $\theta \in T$ について次式が成立する。

$$g_k(d, \theta) \leq g_k(d, \theta_c^i) \leq 0, \quad k \in K \quad \dots\dots (\text{付 } 8)$$

それゆえ(付5)式で表した各制約条件式について得たワーストポイントの集合の中には、必ずクリティカルポイントが含まれていることがわかる。

次に、操作変数の存在を無視してワーストポイントを求める是非について述べる。例として熱交換ネットワークの操作変数の一つスチーム温度 t_{sm} について調べる。すべての制約条件式の中で操作変数 t_{sm} を含む制約条件を書き直すと次のようになる。

$$\{t_{cm}^* - (1 - \alpha_{sm})t_{cm}\} / \alpha_{sm} \leq t_{sm} \quad \dots (\text{付 } 9)$$

$$t_{cm} \leq t_{sm} \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 10)$$

$$\underline{t_{sm}} \leq t_{sm} \leq \overline{t_{sm}} \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 11)$$

ここで、 α_{sm} はヒータにおける熱交換効率を表す。 t_{sm} が存在するための条件は、

$$\max[\{t_{cm}^* - (1 - \alpha_{sm})t_{cm}\} / \alpha_{sm}, t_{cm}, \underline{t_{sm}}] - \overline{t_{sm}} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 12)$$

となり、次式で表される。

$$\{t_{cm}^* - (1 - \alpha_{sm})t_{cm}\} / \alpha_{sm} - \overline{t_{sm}} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 13)$$

$$t_{cm} - \overline{t_{sm}} \leq 0 \quad \dots\dots\dots (\text{付 } 14)$$

(付13)、(付14)式は操作変数 t_{sm} が $\overline{t_{sm}}$ で置き換えられただけで、元の制約条件式(付9)、(付10)式と全く同じ形をしている。それゆえ(付9)、(付10)式について操作変数の存在を無視して求めたワーストポイントが操作変数を消去して求める真のワーストポイントと一致することがわかる。同じ性質がクーラの出口温度または冷却水流量についても成立する。