ロバストサーボ系におけるインテグリティ

正員 藤田 政之 (金沢大)

正員 示村 悦二郎 (早稲田大)

1. はじめに

多変数制御系では、数多くのセンサやアクチュエータが制御装置の一部として用いられている。従って、多変数制御系はこれら操作端や検出端における故障の発生に対しフォールトトレラントであることが重要になると指摘されている⁽¹⁾。操作端や検出端の故障により、一つあるいはそれ以上のループが切れた場合でも、系が不安定とならない性質はインテグリティと呼ばれている。インテグリティに関する研究は、ロバスト制御と密接に関連する形で従来から行われており、特に任意のループ切断に対してインテグリティが保証されるための必要十分条件が明らかにされている⁽²⁾。

ところで、文献(2)では任意のループ切断に対し漸近安定性を保持する問題を議論していることから、制御対象自身と共に補償器も漸近安定であることが要請されている。しかしながら、例えば積分動作を含む補償器などのように、実際によく用いられる補償器のなかにはこの要請が満たされない場合がある。特に、ロバストサーボ系においては、すべてのループに「内部モデル」として漸近安定でない要素が含まれている⁽³⁾。従って、この場合には文献(2)の条件が適用できないことになる。

この問題に関連して Davison ら⁽⁴⁾は、ロバストサーボ系のインテグリティを文献(2)より弱い意味で定義することにより、これを実現する制御系の設計について議論を行っている。そこでは状態空間表現に基づき、パラメータ最適化法を援用した有用な設計法が提案されている。しかしながら、インテグリティが保証されるための必要十分条件については考察がなされていない。一方、Morari⁽⁵⁾は積分制御を有する系の場

合に限って、耐故障性に関する検討を行っている。しかし、そこでは必要条件などの幾つかの部分的な結果が示されるにとどまっている。

本論文では、Francis ら⁽³⁾により示されたロバストサーボ系の構造に基づき、そのインテグリティ問題に関して考察を行う。文献(4)、(5)と同様に制御対象は漸近安定であるものとし、更に生成される目標値信号は有界であるとする。先述したように、ロバストサーボ系ではすべてのループに漸近安定でない要素があるために、どのループが切れた場合でもはや系全体の漸近安定性は保持されない。ここでは切断の生じたループを分離して得られるフィードバック系に着目し、この系が漸近安定であるときにロバストサーボ系はインテグリティを有すると定義する。次いで U 行列⁽²⁾を導入し、その幾つかの性質を示す。これらの準備のもとに、ロバストサーボ系においてインテグリティが保証されるための必要十分条件を導出する。この結果より、ロバストサーボ系における耐故障性を検証するための有用な条件が明らかにされる。また、その条件は制御系の伝達関数行列表現に基づいて導かれる。次に、インテグリティを有するロバストサーボ系が存在するための条件についても考察を行う。更に U 行列の諸性質により、周波数領域における十分条件を導出する。最後に、特に積分動作を有する場合について必要条件を導く。

〔記号〕 拡張された複素閉右半平面を C_{+e} とする。 S はプロバかつ複素閉右半面に極をもたない有理関数全体を、 $M(S)$ はその要素がすべて S に属する行列全体を表す。サイズを明示するときは $S^{m \times n}$ とかく。 U は S の可逆元の集合を表す。混乱のおそれがない場合には有理関数の変数 s は省略する。 $\|A\|_p$, $p=1, 2, \infty$ は、ベクトルノルムから導かれた行列 A のノルムを表し、また $\mu_2(A)$ は $\|A\|_2$ に対応する行列メジャーを表す⁽⁶⁾。

$M=\{1, 2, \dots, m\}$ は m 個の整数からなる集合を、また $J=\{j_1, j_2, \dots, j_r\}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq m$ は M の部分

Integrity Conditions for a Class of Robust Servo Systems. By Masayuki Fujita, Member (Faculty of Technology, Kanazawa University) & Etsujiro Shimemura, Member (School of Science and Engineering, Waseda University).

藤田政之: 正員, 金沢大学工学部電気・情報工学科
示村悦二郎: 正員, 早稲田大学理工学部電気工学科

集合を表す。 M のすべての部分集合からなる集合を $\mathcal{M}$ と書く。ベクトル x に対してその第 j 番目の要素を x_j と表す。また第 j 番目, $j \in J$ の要素を残し他の要素を消してできる部分ベクトルを x_J と書く。同様に, 正方行列 A の第 i 行, 第 j 列の要素を a_{ij} と表し, また A から第 i 行と第 j 列, $j \in J$ を残し他の行と列を消してできる $r \times r$ の主小行列を A_J と表す。

2. 問題の定式化

本論文では, Francis ら⁽³⁾により示されたロバストサーボ系の構造に基づいて議論する。まず, 図1に示すロバストサーボ系を考える。 P は $m \times m$ の制御対象の伝達関数行列を表し

$$P \in M(S), \lim_{s \rightarrow \infty} P(s) = 0_{m \times m} \quad (1)$$

である。一方, R_C は目標値信号発生器であり, 更に R_C の S 上での左既約分解を $D_R^{-1}N_R$ とするとき, D_R の最大の単因子を α で表す。一般性を失うことなく $\alpha \in U, \alpha(\infty)$ は非零定数とする。また, α の $\text{Re}(s) \geq 0$ にある零点を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ とおくと,

$$\text{Re}(\lambda_i) = 0, 1 \leq i \leq q \text{ かつ}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q \text{ はすべて相異なる} \quad (2)$$

とする。この条件は, 生成される目標値信号が有界であることを意味することとなる。ステップ状信号など実用上よく現れる目標値信号がこれに含まれることに注意する。 P は次の条件を満たすものとする。

$$\text{rank } P(\lambda_i) = m, 1 \leq i \leq q \quad (3)$$

すると, このとき補償器 C は以下のように与えられることが知られている⁽³⁾。

$$C = \alpha^{-1} C_1, \quad C_1 = W V^{-1} \quad (4)$$

ただし, $V, W \in M(S)$ は

$$\alpha V + P W = I \quad (5)$$

を満たす任意の行列である。

さてここで, 図1に示されるロバストサーボ系においてフィードバックループに切断が生じる場合を考えよう。そこで, 信号経路の接続状況を表すために, 次のようなスイッチング行列 $\Delta(J)$ を導入する。

$$\Delta(J) = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$$

図1 ロバストサーボ系
Fig. 1. Robust servo system.

$$\begin{cases} \delta_j = 1; & j \in J \\ \delta_j = 0; & j \notin J \end{cases}, J \in \mathcal{M} \quad (6)$$

(6)式は第 j 番目, $j \in J$ のループが接続されており, その他のループは切れていることを表している。従って, 任意の $J \in \mathcal{M}$ に対して, この $\Delta(J)$ を図2のようにフィードバックループ中に挿入することにより, 任意のループ切断を表現することが可能となる。

【例題1】 次の制御対象 P を考える。

$$P = \frac{1}{(s+1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

この制御対象の極は $\{-1, -4\}$ である。これに対して, ステップ状目標値に対する次のロバストサーボ補償器を考える。

$$C = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 10s+27 & -2(2s+9) \\ 3(s+2) & s+3 \end{bmatrix}$$

各ループに積分動作が含まれることに注意する。このとき構成される閉ループ系の極は $\{-3, -3, -3, -7\}$ となり, 漸近安定である。ところが, ここで第1番目のループに切断が生じたとする。すなわち, $\Delta = \text{diag}(0, 1)$ とする。このとき故障が生じた系の極は $\{1, 0, -3, -4\}$ となる。ここで, $\lambda=0$ なる極は切断したループの積分動作に対応しているものである。ところが, この系では更に $\lambda=1$ なる不安定極が現れる。従って, 制御対象が漸近安定であるにもかかわらず, 故障が生じた系は不安定になってしまうことがわかる。

ロバストサーボ系ではすべてのループに α^{-1} 在 S が存在するために, どのループが切れた場合でももはや図2の系全体の漸近安定性は保持されない^{*1}。そのためロバストサーボ系におけるインテグリティを適切に定義することが重要となる。ここでは, まず $\Delta(J)$ を以下のように分解することを考える。

$$\Delta(J) = E_{J*} E_{J*}^* \quad (7)$$

ただし, E_{J*} は $\Delta(J)$ から $\delta_j=1$ なる行を残し, その

図2 ループ故障を考慮したロバストサーボ系 (A)

Fig. 2. Robust servo system with loop failures (A).

*1 しかしながら, その系全体が著しく不安定になってしまうことは避けなければならない。

他の行を除いてできる行列である。また、 $E_{*j} = E_{j*}^T$ とする。これは、 E_{j*} が動作中の信号線のみを取出すことを意味している。また、更に J の補集合を K と表し、 E_{*k} を同様に定義するならば、ループ切断を考慮した系の構成線図は図2から図3のように変換することができる。図3の構成より、切断の生じたループ内に存在する α^{-1} がすべて分離されることになる^{*2}。従って、以下では切断に対応するループを分離した図3の破線内に示す系に着目するものとする。すなわち、図4に示すフィードバック系に着目する。

さてそこで、図4において入力 $\{(u_1)_j, u_2, u_3\}$ から出力 $\{(y_1)_j, y_2, y_3\}$ までの伝達関数行列を、いま $T(J)$ とする。(1)式より、このフィードバック系は well-posed³ であり、このときの $T(J)$ は次のように表せる^{*3}。

$$T(J) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha I & 0 & E_{j*} P \\ -E_{*j} & V & 0 \\ 0 & -W & I \end{bmatrix}^{-1} \quad \dots\dots\dots (8)$$

図3 ループ故障を考慮したロバストサーボ系 (B)

Fig. 3. Robust servo system with loop failures (B).

図4 考察の対象とするフィードバック系

Fig. 4. Feedback system under consideration.

^{*2} いまもし、この図3の破線内に示す系が不安定となるならば、図3の系全体は不安定になる。また逆に、この破線内の系が漸近安定であるとき、切断に対応するループの目標値信号を零とする、あるいはこれに対応する補償器内部の α^{-1} に関する回路を切離し動作しないようにすることができれば、ループ切断に対しても系全体のリアプノフの意味での安定性⁽¹⁰⁾を確保することが可能である。

^{*3} $J = \phi$ (すなわち、 $d=0_{m \times m}$) のときは $(u_1)_j$ や $(y_1)_j$ は存在しないことから、 $T(J)$ は (u_2, u_3) から (y_2, y_3) への伝達関数行列とする。

これより、ロバストサーボ系におけるインテグリティを次のように定義する。

〔定義1〕 図4に示す系において、次の条件
 $T(J) \in M(S), \forall J \in \mathcal{M} \dots\dots\dots (9)$

が成立するとき、図1のロバストサーボ系はインテグリティを有するという。□

〔定義1〕は、システムの入出力表現に基づいて述べられているが、この条件を状態空間表現のわく組みの中で意味づけておくことは重要である。これに関しては付録において述べる^{*4,5}。

なお、以上の議論は検出端の故障により対応するループに切断が発生する場合を主に考えている。これに対し操作端に故障が発生する場合も、スイッチング行列を補償器の出力側と制御対象の入力側との間に挿入することにより、全く同様に考察を進めることが可能である。

3. U 行列の諸性質

主要な結果を示す前に、まずそこで重要な役割を果たす行列のクラスを導入し、その諸性質を明らかにしておく。スカラー有理関数 $a \in S$ は、 $a^{-1} \in S$ となるとき可逆元と言い $a \in \mathcal{U}$ と表す。これを行列の場合に拡張すると、正交な有理関数行列 $A \in M(S)$ はその行列式が $\mathcal{U}$ に属するときに、これをユニモジュラ行列ということはよく知られている。

ところで、一般にスカラーにおける性質を正方行列の場合に拡張するには幾つかの方法が考えられる。そのなかでも、すべての主小行列式に着目することが有効である場合がしばしばある。そこでここでは、その行列式だけではなく、すべての主小行列式が $\mathcal{U}$ に属するような有理関数行列に着目する。

〔定義2〕⁽²⁾ 行列 $A \in S^{m \times m}$ は、互いに等価な次の3条件のうちいずれか一つを満たすとき U 行列であるといい、 $A \in \mathcal{U}$ と書く。

- (1) A のすべての主小行列式は $\mathcal{U}$ に属する。
- (2) 任意の $s \in C_{+e}$ と任意の $x \in C^m, x \neq 0$ 対

^{*4} 付録で示されるように、(9)式が成立することは、(2)式の仮定のもとで、図3の破線外の部分をも含めた系全体がリアプノフの意味で安定となり、更に図4の系が漸近安定となることと等価である。従って、〔定義1〕はループ切断に対して系全体がリアプノフの意味での安定性を保つことを意味している。また本論文では、付録の仮定(付1)式が成り立っているものとしておく。

^{*5} しかしながら、系全体としては漸近安定ではないので、切断が生じた後もこれに対応するループに外部入力に加えられた場合、この系の出力が零に収束することは保証されない。また更に、切断が生じたループにおける目標値追従特性などの定常特性も保証されない。

してある番号 $j, 1 \leq j \leq m$ が存在し、 $|\bar{x}_j(A(s)x)_j| > 0$ となる。

(3) 任意の $s \in C_{+e}$ に対して、 $A(s)$ 自身および $A(s)$ の主小行列のすべての固有値は非零である。

□

U 行列は明らかにユニモジュラ行列である。またこれは、すべての主小行列式に関して特徴づけられている点で P 行列⁽⁷⁾ の概念と類似していると言える。更に、 U 行列に関しては、以下に示す性質がある。

[補題 1]⁽²⁾

$$(1) \quad A \in U \Rightarrow A^{-1} \in U \quad (10)$$

$$(2) \quad A \in U \Rightarrow DA, AD \in U \quad (11)$$

ただし、

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m) \in U \quad (12) \quad \square$$

対角要素がすべて可逆元であるような三角行列、特に対角行列は U 行列である。

ところが、更に対角要素がすべて可逆元であるような一般化対角優勢行列もまた U 行列となる。いま、行列 $A = [a_{ij}]$ に対して $A_d = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{mm})$ と定義すると、次の結果がある。

[補題 2]⁽²⁾ $A \in S^{m \times m}$ に対して、 $a_{ii} \in \mathcal{U}, 1 \leq i \leq m$ とする。また $X = AA_d^{-1} - I, Y = A_d^{-1}A - I$ とおく。このとき、(12)式で表される適当な対角行列 D が存在して

$$\sup_{\omega \in R} \|D(j\omega)X(j\omega)D^{-1}(j\omega)\|_1 < 1 \quad (13)$$

あるいは

$$\sup_{\omega \in R} \|D(j\omega)Y(j\omega)D^{-1}(j\omega)\|_\infty < 1 \quad (14)$$

となるならば、 $A \in U$ である。 □

ただし、上の補題で、 $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ である⁽⁶⁾。

一方、相対次数が零であるようなスカラ強正実関数は明らかに $\mathcal{U}$ に属する。これに対応して、 A が強正実行列であるならば、 A は U 行列となる。

[補題 3]⁽²⁾ 行列 $A \in S^{m \times m}$ に対し、 $Z = I - A$ とおく。このとき、(12)式で表される適当な対角行列 D が存在して、

$$\sup_{\omega \in R} \mu_2\{D(j\omega)Z(j\omega)D^{-1}(j\omega)\} < 1 \quad (15)$$

となるならば、 $A \in U$ である。 □

ただし、 $\mu_2(A) = \max_i [\lambda_i(A + A^*)/2]$ である⁽⁶⁾。

これらの補題は虚軸上の振舞のみで U 行列になるかどうかを調べることができる点で特徴的である。

4. インテグリティ条件

<4-1> 必要十分条件 ここでは、図 1 に示すロ

バストサーボ系がインテグリティを有するための必要十分条件を導出する。まず、次の行列を定義しておく。

$$R = I + PC \quad (16)$$

R は還送差行列である。このとき、次の結果が成立する。

[定理 1] (1)~(5)式が成り立つとする。このとき、図 1 に示すロバストサーボ系がインテグリティを有するための必要十分条件は

$$\alpha C \in M(S), \text{ かつ} \quad (17)$$

$$\alpha R \in U \quad (18)$$

となることである。 □

(証明) まず、(8)式は右既約分解となっていることが容易に示されるから、(9)式が成り立つことは

$$\det \begin{bmatrix} \alpha I & 0 & E_{j*}P \\ -E_{*j} & V & 0 \\ 0 & -W & I \end{bmatrix} \in \mathcal{U}, \forall j \in \mathcal{M} \quad (19)$$

と等価となる。ところが計算により、

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} \alpha I & 0 & E_{j*}P \\ -E_{*j} & V & 0 \\ 0 & -W & I \end{bmatrix} \\ &= \det \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 & E_{j*}P \\ -\alpha^{-1}E_{*j} & I & 0 \\ 0 & -C_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha I_r & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right\} \\ &= \alpha' \cdot \det V \cdot \det \begin{bmatrix} I & 0 & E_{j*}P \\ -\alpha^{-1}E_{*j} & I & 0 \\ 0 & -C_1 & I \end{bmatrix} \\ &= \alpha' \cdot \det V \cdot \det \{I + PC_d(J)\} \\ &= \alpha' \cdot \det V \cdot \det \{(I + PC)_j\} \\ &= \det V \cdot \det \{\alpha(I + PC)\}_j \quad (20) \end{aligned}$$

を得る。ここで、上の変形において(7)式が用いられている。従って、(9)式が成り立つための必要十分条件は、 $\det V \in \mathcal{U}$ かつ $\alpha(I + PC)$ のすべての主小行列式が可逆元になることである。よって、題意を得る。

Q. E. D.

[定理 1]は C_1 が漸近安定であり、かつ還送差行列 R に α をかけて得られる行列が U 行列となるときに、またそのときに限りインテグリティが保証されることを示している。従って、 αR のすべての主小行列式に着目することにより、インテグリティを検証することができる。この結果は、ロバストサーボ系の耐故障性を考察するための有用な条件を示している。また、[補題 1](1)項より、感度行列 $S = R^{-1}$ に関しても同様の必要十分条件を述べることが可能である。文

献(4)ではここで示したような必要十分条件については考察が行われていない。更に、この結果において $\alpha=1$ とおくと、文献(2)に示されたインテグリティ条件に完全に一致する。従って[定理1]は、従来得られている結果をロバストサーボ系の場合へ拡張したものとなっていることがわかる。

〔例題2〕 ここで、〔例題1〕で考えた制御系を考える。この場合、 $\alpha=s/(s+1)$ とすると

$$aR = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+4)} \begin{bmatrix} s^2+12s+31 & -4(s+4) \\ 3s+13 & (s-1)(s+4) \end{bmatrix}$$

を得る。ここで、第(2,2)要素に着目すれば明らかに、 $aR \in U$ であるから、[定理1]よりインテグリティは保証されないことが直ちにわかる。

〈4・2〉 可解条件 前節の結果より、(4)、(5)式で表されるロバストサーボ補償器がいま(17)、(18)式を満たすならば、これをインテグリティを有するロバストサーボ補償器と呼ぶことができる。ここでは、このインテグリティを有するロバストサーボ補償器が存在するための可解条件について議論する。ところが、このためにはまず通常のロバストサーボ問題が可解でなければならないことは明らかである。すなわち、(3)式が必要条件となる。以下では、これが十分条件でもあることを示す。

さて、(4)、(5)式を用いると、 $\alpha C = WV^{-1}$ 、 $aR = V^{-1}$ となることが計算より確かめられる。従って、(17)、(18)式が成立するためには* $V \in U$ でなければならない。そこで逆に、

$$\alpha U + PW = I \dots\dots\dots (21)$$

を満たす任意の $U \in U$ 、 $W \in M(S)$ を用いて

$$C = \alpha^{-1} W U^{-1} \dots\dots\dots (22)$$

とおくと、これが(17)、(18)式を満たすことは容易に示される。従って、(21)式を満たす $U \in U$ 、 $W \in M(S)$ が存在するならば、インテグリティを有するロバストサーボ補償器を構成できることになる。以上の考察に基づき、次の結果が得られる。

〈系1〉 (1)、(2)式が成り立つとする。このときインテグリティを有するロバストサーボ補償器が存在するための必要十分条件は、(3)式が成立することである。 □

〔証明〕 インテグリティを有するロバストサーボ補償器が存在するためには、まず通常のロバストサーボ補償器が存在しなければならないから、(3)式が

必要となることは明らかである。従って十分性のみを示す。いま $\det P$ の C_{+e} にある零点を z_i 、 $1 \leq i \leq n$ とし、対応する重複度を m_i 、 $1 \leq i \leq n$ とおく。更に、 z_i のうち実数であるものを z_i 、 $1 \leq i \leq \mu$ とする。このとき(3)式より、 $\alpha(z_i) \neq 0$ 、 $1 \leq i \leq n$ を得る。更に、 α は $\text{Re}(s) > 0$ に零点をもたないことから、 $\alpha(z_i)$ 、 $1 \leq i \leq \mu$ は同符号である。従って、文献(8, 定理2.3.3)より、

$$v^{(j)}(z_i) = \alpha^{(j)}(z_i), 0 \leq j \leq m_i - 1, 1 \leq i \leq n$$

を満たす $v \in U$ が存在する。そこで、いま $U = v^{-1}I$ とおけば $U \in U$ であり、更に

$$P^{-1}(I - \alpha U) = (v - \alpha)v^{-1}(\det P)^{-1}(\text{adj } P) \in M(S)$$

を得る。ここで、 $\text{adj } P$ は P の余因子行列である。よって、(21)式を満たす $U \in U$ 、 $W \in M(S)$ が存在するので、(22)式よりインテグリティを有するロバストサーボ補償器が構成できる。 Q. E. D.

〈系1〉は、通常のロバストサーボ問題が可解であるならば、インテグリティを保証するロバストサーボ補償器が必ず存在することを意味している。なお、この可解条件に関しては文献(4)においても同様の結果が述べられている。しかし、本論文ではそれとは全く異なる手法に基づいて証明を行っている。また、更にここでの証明の過程から明らかのように、可逆元によるある補間問題の解を求めることにより、インテグリティを保証するロバストサーボ補償器の一つを構成することが可能である。

〈4・3〉 十分条件 前節までに導いたように、還送差行列のすべての主小行列式に着目することによりインテグリティを検証することができる。しかし、系の入出力数が多くなり還送差行列のサイズが大きくなるにつれてその主小行列の数は多くなる。また一方、制御系の性質を解析するには周波数応答に基づいて行えることが望ましい場合がある。これらを考慮し、ここでは U 行列に関する諸性質からインテグリティに対する十分条件を示す。以下では行列 $R = [r_{ij}]$ に対して、 $R_d = \text{diag}(r_{11}, \dots, r_{mm})$ とおくことにする。

〈系2〉 (1)~(5)式が成り立つとし、また $\alpha C \in M(S)$ とする。このとき、次のいずれかの条件が成立するならば、図1に示すロバストサーボ系はインテグリティを有する。

(1) $\alpha r_{ii} \in U$ 、 $1 \leq i \leq m$ であり、更に(12)式で表される適当な対角行列 D が存在して

$$\sup_{\omega \in R} \|D(j\omega)R_x(j\omega)D^{-1}(j\omega)\|_1 < 1 \dots\dots\dots (23)$$

あるいは

$$\sup_{\omega \in R} \|D(j\omega)R_y(j\omega)D^{-1}(j\omega)\|_\infty < 1 \dots\dots\dots (24)$$

* (10)式を考慮すると

となる。ただし、 $R_z = RR_d^{-1} - I$, $R_y = R_d^{-1}R - I$ である。

(2) (12)式で表される適当な対角行列 D が存在して

$$\sup_{\omega \in R} \mu_2\{D(j\omega)R_z(j\omega)D^{-1}(j\omega)\} < 1 \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。ただし、 $R_z = I - \alpha R$ である。 $\square$

(証明) [定理 1] および [補題 2, 3] より直ちに得られる。 Q.E.D.

この結果は、 αR が一般化対角優勢、あるいは強正実であるならば、インテグリティが保証されることを示している。[補題 1] (1) 項より、感度行列に関しても同様の十分条件を述べるができる。またこの結果は一般化対角優勢の概念に基づく INA 法などの制御系設計法が、インテグリティを保証するためには有効であることを意味していると解釈できる。

これらの条件は十分条件であることから、場合によっては結果が保守的になってしまう恐れがある。しかしこれに関しては、対角行列 D を乗ずることによりスケーリングを行って、その保守性を減ずることが期待される。この行列ノルムの大きさを最小化する行列のスケーリング問題については、文献(9)に報告がなされている。

〈4・4〉 必要条件 ここでは、特に積分動作を有するロバストサーボ系の場合について、インテグリティが保証されるための必要条件に関して述べる。まず、次の行列を定義しておく。

$$L = \alpha PC \quad \dots\dots\dots (26)$$

このとき、以下の結果が得られる。

〈系 3〉 (1)~(5)式が成り立ち、更に $\alpha(0) = 0$ とする。このとき、図 1 に示すロバストサーボ系がインテグリティを有すならば

$$\alpha(\infty) \cdot \det[L_f(0)] > 0, \forall J \in \mathcal{M} \quad \dots\dots\dots (27)$$

でなければならない。 $\square$

(証明) [定理 1] より、ある $U \in \mathcal{U}$ に対して $\alpha I + PC_1 = U$ でなければならない。従って、 $\alpha(0) = 0$ より $\forall J \in \mathcal{M}$ に対し、 $\det[L_f(0)] = \det[U_f(0)]$ となる。ところが、ここで $\det[U_f] \in \mathcal{U}$ であることから、 $\det[U_f(0)]$ と $\det[U_f(\infty)]$ は同符号をもつことになる。一方、 $P(\infty) = 0$ より $U(\infty) = \alpha(\infty)I$ であるから、 $\det[U_f(\infty)]$ と $\alpha(\infty)$ は同符号である。よって、 $\alpha(\infty) \cdot \det[L_f(0)] > 0$ を得る。 Q.E.D.

この結果より、 $P(0)C_1(0)$ のある主小行列式の符号が $\alpha(\infty)$ と異なるならば、インテグリティは保証されないことがわかる。この条件に関しては、一つのループのみが切れる場合について、同様の結果が文献(5)

に示されている。ここでは任意のループ切断を考慮した場合について検討を行い、[定理 1] の系として全く別の証明を与えたものである。

【注】 ここまでの議論で、(16)式あるいは(26)式において、 PC を CP と置き換えることにより、すべて操作端側におけるインテグリティに対する結果とすることができる。

〈4・5〉 例題

〔例題 3〕 次の P, C を考える⁽⁴⁾。

$$P = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} 1-s & 2-s \\ (1/3)-s & 1-s \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -(606s+4960) & 87s-2690 \\ 595s+4720 & -117s+2280 \end{bmatrix}$$

ここで、完全な閉ループ系は漸近安定であり、また C はステップ状目標値に対するロバストサーボ補償器となっている。そこで、 $\alpha = s/(s+1)$ とする。まず、 $R = I + PC$ とおき、検出端の故障に対しインテグリティを有するかどうかを検討してみる。 αR の第 (1, 1) 要素 αR_{11} は

$$\alpha R_{11}(s) = \frac{s^3 + 13s^2 + 825s + 4480}{(s+1)^3}$$

となる。よって、 $\alpha R_{11} \in \mathcal{U}$ である。一方、第 (2, 2) 要素 αR_{22} は

$$\alpha R_{22}(s) = \frac{3s^3 + 96s^2 + 969s + 4150}{3(s+1)^3}$$

となり、やはり $\alpha R_{22} \in \mathcal{U}$ である。従って、 $\alpha R \in \mathcal{U}$ となることから、文献(4)にも示されているように、この系は任意の検出端の故障に対しインテグリティを有している。

ところが、ここで $L^- = \alpha CP$ を計算してみる。そうすると、その第 (1, 1) 要素 L_{11}^- は

$$L_{11}^-(s) = \frac{1557s^2 + 21219s - 17570}{3(s+1)^3}$$

となる。よって、 $L_{11}(0) < 0$ であるから、(27)式において PC を CP と置き換えた条件を満たさない。以上をまとめると、この系は検出端の故障に対しインテグリティを有しているものの、操作端の故障に関するインテグリティは保証されないことがわかる。

5. 終りに

本論文では、ロバストサーボ系におけるインテグリティ問題を定式化し、これに対する必要十分条件を導出した。この結果より αC が漸近安定であり、かつ αR が $\mathcal{U}$ 行列となるとときに、またそのときに限りインテグリティが保証されることが示された。次いで、インテグリティを有するロバストサーボ補償器が存在

するための可解条件について議論した。更に、インテグリティに対する十分条件および必要条件を導いた。

〔定理1〕および〈系2〉に示されている必要十分条件および十分条件は、文献(2)で得られている結果をロバストサーボ系の場合へ拡張したものとなっている。一方、〈系1〉に示された可解条件に関しては文献(4)においても同様の結果が述べられているものの、しかし本論文の証明はそれとは全く異なる手法に基づいたものである。しかもその証明から、可逆元によるある補間問題の解を求めることにより、インテグリティを保証するロバストサーボ補償器の一つを系統的に構成することが可能であることが示される。しかしながら、この構成問題に関しては更に研究を行う必要があり、今後の課題であると言える。

最後に、有益な御討論をいただいた金沢大学松村文夫教授に謝意を表します。

(昭和63年7月27日受付, 同63年10月6日再受付)

文 献

- (1) "Challenges to Control: A Collective View", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-32, 275 (1987)
- (2) M. Fujita & E. Shimemura: "Integrity against Arbitrary Feedback-Loop Failure in Linear Multivariable Control Systems", *Automatica*, 24, 765 (1988); in Preprints 10th IFAC World Congress, 8, 240 (1987)
- (3) B. A. Francis and M. Vidyasagar: "Algebraic and Topological Aspects of the Regulator Problem for Lumped Linear Systems", *Automatica*, 19, 87 (1983)
- (4) E. J. Davison & I. J. Ferguson: "The Design of Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods", *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-26, 93 (1981)
- (5) M. Morari: "Robust Stability of Systems with Integral Control", *ibid.*, AC-30, 574 (1985)
- (6) C. A. Desoer & M. Vidyasagar: *Feedback Systems: Input-Output Properties* (1975) Academic Press
- (7) M. Fiedler & V. Pták: "On Matrices with Non-Positive Off-Diagonal Elements and Positive Principal Minors", *Czech. Math. J.*, 12, 382 (1962)
- (8) M. Vidyasagar: *Control System Synthesis: A Factorization Approach* (1985) MIT Press
- (9) M. G. Safonov: "Stability Margins of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback Systems", *IEE Proc. D*, 129, 251 (1982)
- (10) C. T. Chen: *Linear System Theory and Design* (1984) Holt, Rinehart and Winston

付 録

ここでは(9)式の意味を状態空間表現の枠組みで考え、これに関する二つの結果を示す。まず準備として、プロパな有理関数行列 $G(s)$ が次のような状態空間表現

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

をもつとき、以下では

$$G \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

と記すこととする。さて、いま

$$P \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_P & B_P \\ \hline C_P & 0 \end{array} \right], \quad C_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]$$

$$a^{-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_{IM} & b_{IM} \\ \hline C_{IM} & d_{IM} \end{array} \right]$$

と表されるとし、

$(A_P, B_P), (A_c, B_c), (A_{IM}, b_{IM})$ は可安定であり、 $(A_P, C_P), (A_c, C_c), (A_{IM}, C_{IM})$

は可検出である……………(付1)

とする。このとき、まず以下の事実が成り立つ。

〔補題付1〕 (付1)式が成り立つとする。このとき、任意の $J \in \mathcal{M}$ に対して図4の系が漸近安定であるための必要十分条件は、(9)式が成立することである。□

(証 明) まず、 $J \neq \phi$ (すなわち、 $r > 0$) とする。任意の $J \in \mathcal{M}, J \neq \phi$ に対して

$$A_J = \text{block diag}(\overbrace{A_{IM}, \dots, A_{IM}}^{r \text{ 回}})$$

とし、同様に B_J, C_J, D_J をブロック対角行列として定義する。よって、

$$a^{-1} I_r \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_J & B_J \\ \hline C_J & D_J \end{array} \right]$$

となる。さて、ここで

$$A = \text{block diag}(A_J, A_c, A_P)$$

とし、全く同様に B, C, D をブロック対角行列として定義すると、

$$T \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_F \\ \hline C_F & D_F \end{array} \right] \\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A - B(I + FD)^{-1}FC & B(I + FD)^{-1} \\ \hline (I + DF)^{-1}C & D(I + FD)^{-1} \end{array} \right]$$

となることが示される。ただし、

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{J*} \\ -E_{*J} & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \end{bmatrix}$$

である。

仮定(付1)式より、 (A, B) は可安定、 (A, C) は可検出である。よって、 $A - BK_1, A - K_2C$ のすべての固有値が $\text{Re}(s) < 0$ にあるような行列 K_1, K_2 が存在する。ここで、 $K_{1F} = -FC + (I + FD)K_1, K_{2F} = K_2(I + DF) - B(I + FD)^{-1}F(I + DF)$ とおく。すると、 $A_F - B_F K_{1F} = A - BK_1, A_F - K_{2F} C_F = A - K_2 C$ となる。従って、 (A_F, B_F) は可安定、 (A_F, C_F) は可検出となる。よって、文献(8)(補題5.1.18)より、 A_F の

すべての固有値が $\text{Re}(s) < 0$ に存在することは $T \in M(S)$ と等価になる。 Q.E.D.

一方、 $J = \phi$ のときは、 $A_F = \text{block diag}(A_C, A_F)$ となり、 B_F, C_F, D_F についても同様である。従って仮定より、 (A_F, B_F) は可安定、 (A_F, C_F) は可検出である。よって、上の議論と同様に A_F のすべての固有値が $\text{Re}(s) < 0$ に存在することは、やはり $T \in M(S)$ と等価である。 Q.E.D.

この結果より、更に次の結果が導かれる。

(補題付2) (付1)式が成り立つとする。このとき、(9)式が成立するならば、任意の $J \in \mathcal{M}$ に対して図3の系はリアプノフの意味で安定である。また、特に $J = M$ のとき、 $T \in M(S)$ ならば図3の系は漸近安定となる。 □

(証明) まず、 $J \neq M$ (すなわち、 $r < m$) とする。そして、任意の $J \in \mathcal{M}, J \neq M$ に対して、 J の M に関する補集合を K とおく。更に、

$$A_K = \text{block diag}(\overbrace{A_{IM}, \dots, A_{IM}}^{m-r \text{ 個}})$$

とし、同様に B_K, C_K, D_K をブロック対角行列として定義する。いま、

$$\alpha^{-1} I_{m-r} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}$$

である。

(2)式より A_{IM} のすべての固有値は $\text{Re}(s) \leq 0$ にあり、特にその実数部が零であるものは $\lambda_i, 1 \leq i \leq q$ である。また、これらはすべて相異なるので A_{IM} の最小多項式の1位の零点である。すると明らかに、 A_K のすべての固有値もやはり $\text{Re}(s) \leq 0$ にあり、特にその実数部が零であるものは $\lambda_i, 1 \leq i \leq q$ であり、やは

りこれらは A_K の最小多項式の1位の零点となる。

さて、いま図3の系を $\begin{bmatrix} A_w & B_w \\ C_w & D_w \end{bmatrix}$ と表す。

ところが、これは $\begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix}$ の縦続結合となることから、 $A_w = \begin{bmatrix} A_K & 0 \\ * & A_F \end{bmatrix}$ なるブロック三角行列として A_w は表されることになる。一方、(補題付1)より(9)式が成立するならば、 A_F のすべての固有値は $\text{Re}(s) < 0$ にある。更に上述のように、 A_K のすべての固有値は $\text{Re}(s) \leq 0$ にある。従って、 A_w のすべての固有値は $\text{Re}(s) \leq 0$ にあることがわかる。また、明らかに実数部が零となる固有値は $\lambda_i, 1 \leq i \leq q$ であることもわかる。

次に、 A_w が相似変換 $T_w = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ によって、以下のようにジョルダン標準形 J_w へ変換されたとする。

$$J_w = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = T_w^{-1} A_w T_w$$

そして、ここでその (1, 1)-ブロックに着目すると、 $J_1 = T_{11}^{-1} A_K T_{11}$ を得る。これは A_K と J_1 が相似であることを意味している。従って、その特性多項式および最小多項式は相等しい。よって、 $\lambda_i, 1 \leq i \leq q$ は J_w の最小多項式の1位の零点となることが示される。一方、 $J = M$ のときは、切断の生じたループが存在しないことから図3の系と図4の系は同一となる。従って(補題付1)より、 $T \in M(S)$ ならば図3の系は特に漸近安定となる。 Q.E.D.