互いに影響を及ぼしあう二つのデフォルト推論システムから得られる知識集合の性質

正 員 村 上 研 二 (愛媛大)

正 員 相 原 恒 博 (愛媛大)

1. ま え が き

現在の知識情報処理システムにおいて最もよく用いられる知識表現のモデルとして、プロダクションルール、フレーム、セマンティックネットワーク、形式論理などがある。中でも形式論理は理論的に体系化された唯一の知識表現モデルであることから特に重要である。この形式論理では、現在のところ主に命題論理と述語論理（多くの場合、一階述語論理）が用いられているが、これらの論理は「新しい公理（知識）を追加したとき、導出される定理の集合は少なくとも減少はしない」という性質をもつことから、単調論理とも呼ばれる。この単調論理に基づく知識情報処理システムは、新しい知識の追加に対して既存の定理との間の矛盾を調べる必要がないこと、定理証明に際してその手順を記憶しておく必要がないことなど実用上の大きな利点をもつが、一方ではシステムのもっている知識の範囲内での推論能力しかもち得ないという制約も受ける。従って、システムの問題解決能力を向上させるには、システムに与える知識の量を増加させる以外に方法はなく、必要な知識（問題領域のすべてをカバーする完全な知識）をすべて与えることが一般には困難であることを考えると、この単調論理のみで知識情報処理システムを構成することには限界があると思われる⁽¹⁾。

ところで、人間が行っているような常識による推論や不完全な知識による推論では、人間がその時点でもっている知識以上の結論を導き出すことができると考えられる。これはある時点で推論を行うのに十分な知

識がなければ、とりあえず常識的な知識を用いて推論を進めておき、後に常識的知識を否定するような新しい知識が与えられれば、この推論結果を取消すといった柔軟な推論を行っているためであると考えられる。このような推論を可能とする論理は、さきの単調論理に対して非単調論理と呼ばれる^{(2)~(5)}。すなわち、非単調論理では「新しい公理（知識）が追加されたとき、それまでに導出された定理が成り立たなくなることがある」ということを認める。この非単調論理の定式化の一つとして、Reiter はデフォルト推論を提案した⁽⁶⁾。このデフォルト推論は常識的知識をデフォルト式と呼ばれる推論規則で表現している点に特色がある。デフォルト推論により最終的に得られる知識の集合（一階述語論理式の集合）は拡張世界（extension）と呼ばれ、これを用いてデフォルト論理と従来の一階述語論理との関係が議論される^{(7)~(9)}。

ところで、実際に知識情報処理システムを構成する場合、比較的小さな規模の知識情報処理システムを複数個相互に結合し、各システムの間で知識のやり取りを行うことでそれぞれの知識ベースを改変し、総合的な知識情報処理システムを構成することが考えられる。このような状況をデフォルト推論を行うシステムについて考えると、Reiter が考察しているような単一のデフォルト推論システムに対する動作解析だけでは不十分であり、複数個のデフォルト推論システムの動作の記述、各システム間での知識のやり取りの記述、その結果それぞれのシステムが最終的にもつであろう知識集合の記述などを行う必要が出てくる。

本論文では、デフォルト推論を行う複数の異なる知識情報処理システムを考え、これらのシステムが互いに知識のやり取りをしながらデフォルト推論を行う状況を定式化する。そして、知識のやり取りとデフォルト推論の結果、各デフォルト推論システムが最終的にもつ知識集合の組を相互拡張世界と呼び定式化する。

Some Properties of Knowledge Information Inferred by Two Interactive Default Reasoning Systems. By Kenji Murakami, Member & Tsunehiro Aibara, Member (Faculty of Engineering, Ehime University).

村上研二：正員、愛媛大学工学部電子工学科

相原恒博：正員、愛媛大学工学部情報工学科

また、この相互拡張世界のもつ性質を明らかにする。

2. デフォルト推論と相互拡張世界

通常の一階述語論理式 (well-formed formula, wff と略記) の集合全体を L と表す。wff が自由変数を含まないとき wff は閉じているという。

デフォルト式 d を $d = a: Mb/c$ で表す。ここで a, b, c は wff である。デフォルト式 d は、直観的には「 a が成り立ち、かつ b が充足可能 (b の否定 ($\neg b$) が証明されない) ならば、 c を推論する」ことを意味する。 a, b, c をそれぞれ、前提、弁明、帰結と呼ぶ。 a, b, c が閉じた wff であるとき、 d を閉じたデフォルト式という。なお、Reiter は自由変数をもつ wff を含めてデフォルト式を与えているが、自由変数を具体例 (instance) で置き換えたときには閉じた場合と同様になるため、本論文では閉じた場合に限定して議論を行う。

デフォルト理論 A を $A = (D, W)$ で表す。 D はデフォルト式の集合、 W は閉じた wff の集合である。

〔定義 1〕(拡張世界) $A = (D, W)$ をデフォルト理論とする。 $S \subseteq L$ なる wff の集合 S に対して、 $\Gamma(S)$ を次の条件 D1-D3 を満たす最小の集合とする。

$$D1. \quad W \subseteq \Gamma(S)$$

$$D2. \quad Th(\Gamma(S)) = \Gamma(S)$$

$$D3. \quad a: Mb/c \in D, a \in \Gamma(S), \neg b \in S \text{ ならば } c \in \Gamma(S)$$

このとき、 $\Gamma(E) = E$ を満たす wff の集合 E をデフォルト理論 $A = (D, W)$ の拡張世界と定義する。ただし、 $Th(S)$ は一階述語論理の推論規則を用いて S から導かれる定理式の集合を表す。

この拡張世界 E は、 D に含まれるデフォルト式で与えられる推論規則と通常の一階述語論理における推論規則とを用いて、 W から得られる (推論される) 知識の集合という意味をもつ⁽⁶⁾。

なお、デフォルト式 $d = a: Mb/c$ は、「 a が成り立ち、かつ b が充足可能ならば、 c を推論する」という直観的な意味から導入されたものであるが、あるデフォルト理論 $A = (D, W)$ に対してそれから導かれる (推論される) 知識集合 (拡張世界) を〔定義 1〕で与えたことにより、間接的にはあるがデフォルト式の意味 (推論方法) を厳密に与えたことになる。

本論文では、上記のようなデフォルト理論 (デフォルト推論システム) が複数個存在し、これらの間で知識のやり取りが行われる場合を考察する。このとき、デフォルト推論と知識のやり取りにより、それぞれの

システムが最終的にもち得る知識集合の組を「相互拡張世界」と呼ぶ^{(10)~(12)}。この相互拡張世界の概念は、異なる知識 (常識) をもった複数のエージェント (理想的な知的行為者) が互いに会話をしながらそれぞれ推論を行い、その結果それぞれのエージェントが獲得するであろう知識の集合を記述したものにもなっている。この場合、やり取りする知識集合の条件をどのように設定するかにより、得られる相互拡張世界の性質は異なる。本論文では、相互拡張世界を次のように定義することで、やり取りする知識集合の条件を規定する。なお、簡単のためここでは考察するデフォルト理論の個数は 2 個と仮定する。

〔定義 2〕(相互拡張世界) $A_1 = (D_1, W_1)$ およ $A_2 = (D_2, W_2)$ をデフォルト理論とする。この A_1, A_2 に対して、任意の wff の集合の組 S^1, S^2 を考える。このとき、 S^1, S^2 に対する $\Gamma_1(S^1), \Gamma_2(S^2)$ とは、次の D1 から D4 までの条件を同時に満たす wff の集合の中で最小の集合である。

$$D1. \quad W_1 \subseteq \Gamma_1(S^1)$$

$$W_2 \subseteq \Gamma_2(S^2)$$

$$D2. \quad Th(\Gamma_1(S^1)) = \Gamma_1(S^1)$$

$$Th(\Gamma_2(S^2)) = \Gamma_2(S^2)$$

$$D3. \quad a: Mb/c \in D_1, a \in \Gamma_1(S^1), \neg b \in S^1 \text{ ならば } c \in \Gamma_1(S^1)$$

$$a: Mb/c \in D_2, a \in \Gamma_2(S^2), \neg b \in S^2 \text{ ならば } c \in \Gamma_2(S^2)$$

$$D4. \quad g \in \Gamma_2(S^2), \neg g \in S^1 \text{ ならば } g \in \Gamma_1(S^1)$$

$$g \in \Gamma_1(S^1), \neg g \in S^2 \text{ ならば } g \in \Gamma_2(S^2)$$

このとき、 $\Gamma_1(E^1) = E^1, \Gamma_2(E^2) = E^2$ を同時に満たす wff の集合 E^1, E^2 の組を A_1, A_2 に対する相互拡張世界と定義する。

Γ_1, Γ_2 を wff の集合に対する演算子と見れば、相互拡張世界の組 E^1, E^2 とはそれぞれ演算子 Γ_1, Γ_2 の不動点である。

なお、条件 D3 における wff の集合 $\{c\}$ はデフォルト推論により各システムが得る知識の集合を表し、条件 D4 における wff の集合 $\{g\}$ は相手のシステムとの知識のやり取りにより各システムが獲得する知識の集合を表す。特に、条件 D4 は Reiter の拡張世界の定義にはない新しい条件で直観的には「相手が最終的にもつ知識集合に含まれ、かつ自分が最終的にもつ知識集合に矛盾しない知識は相手から受け取る」ことを表す。

相互拡張世界の例を次に示す。ここで、 p, q, r などの文字は命題論理式を表すものとする。

〔例題 1〕 $A_1=(D_1, W_1)=(\{p: Mq/r, r: Ms/t, v: Mw/x\}, \{p\})$, $A_2=(D_2, W_2)=(\{u: M \neg t/\neg t, \neg t: Mu/v, t: My/z\}, \{u\})$ とする。このとき, A_1, A_2 に対する相互拡張世界は, $E^1=Th(\{p, r, t, u, v, x\})$, $E^2=Th(\{u, \neg t, v, p, r, x\})$ の組と $E^1=E^2=Th(\{p, u, r, t, z\})$ の組の二組存在する。

3. 相互拡張世界の諸性質

〈3・1〉 拡張世界と相互拡張世界 $A_1=(D_1, W_1)$ および $A_2=(D_2, W_2)$ をデフォルト理論とする。ここでは, $A_1, A_2, A_1 \cup A_2$ それぞれの拡張世界と A_1, A_2 に対する相互拡張世界との関係を考察する。 A_1, A_2 それぞれの拡張世界は複数個のデフォルト推論システムが独立に存在する場合の知識集合を, $A_1 \cup A_2=(D_1 \cup D_2, W_1 \cup W_2)$ の拡張世界は複数個のデフォルト推論システムを完全に統合して新しいデフォルト推論システムを構築した場合の知識集合を, A_1, A_2 に対する相互拡張世界は複数個のデフォルト推論システムが互いに影響を及ぼしあうように相互に結合された場合の知識集合を表している。

〈性質 1〉 一般には, A_1, A_2 に対する相互拡張世界は, $A_1, A_2, A_1 \cup A_2$ などの拡張世界とは異なる。

〔例題 2〕 〔例題 1〕で考察したデフォルト理論 A_1, A_2 の拡張世界はそれぞれ $Th(\{p, r, t\})$, $Th(\{u, \neg t, v\})$ であり, $A_1 \cup A_2$ の拡張世界は $Th(\{p, u, r, t, z\})$ である。

〈性質 2〉 デフォルト理論 A_1, A_2 の拡張世界が存在する場合でも, 相互拡張世界が存在しない場合がある。

〔例題 3〕 $A_1=(\{p: Mq/r\}, \phi)$, $A_2=(\{M \neg r/p\}, \phi)$ とする。このとき, A_1 の拡張世界は ϕ , A_2 の拡張世界は $Th(\{p\})$ であるが相互拡張世界 E^1, E^2 は存在しない。

〈性質 3〉 デフォルト理論 A_1, A_2 の拡張世界が存在しない場合でも, 相互拡張世界が存在する場合がある。

〔例題 4〕 $A_1=(\{M p/\neg p\}, \{\neg q\})$, $A_2=(\{M q/\neg q\}, \{\neg p\})$ とする。このとき, A_1, A_2 の拡張世界はともに存在しないが, 相互拡張世界は $E^1=E^2=Th(\{\neg p, \neg q\})$ である。

〈性質 4〉 デフォルト理論 A_1, A_2 に対して, $A_1 \cup A_2$ の拡張世界が存在する場合でも, 相互拡張世界が存在しない場合がある。

〔例題 5〕 $A_1=(\{M p/\neg p\}, \{r\})$, $A_2=(\{M q/\neg q\}, \{\neg r\})$ とする。このとき, $A_1 \cup A_2=(\{M p/\neg p, M q/\neg q\}, \{r, \neg r\})$ の拡張世界は L (wff の言語全

体) となるが, 相互拡張世界は存在しない。

〈性質 5〉 デフォルト理論 A_1, A_2 に対して, $A_1 \cup A_2$ の拡張世界が存在しない場合でも, 相互拡張世界が存在する場合がある。

〔例題 6〕 $A_1=(\{M p/q\}, \phi)$, $A_2=(\{M p/\neg q\}, \phi)$ とする。このとき, $A_1 \cup A_2=(\{M p/q, M p/\neg q\}, \phi)$ の拡張世界は存在しないが, $E^1=Th(\{q\})$, $E^2=Th(\{\neg q\})$ なる相互拡張世界が存在する。

以上の考察結果から, 複数個のデフォルト推論システムが独立に存在する場合, 複数個のデフォルト推論システムを完全に統合した場合, 複数個のデフォルト推論システムが互いに影響を及ぼし合う場合のそれぞれの知識集合の間には, その性質・存在性に関して直接的な関連がないことがわかる。すなわち, 複数個のデフォルト推論システムはその結合状態が変われば, 得られる知識集合の性質・存在条件が変わることを示しており, 例えば個々のシステムについては推論結果(知識集合)が存在しない場合でも, 各システムを相互に結合し知識のやり取りを行うことで全体として推論結果(知識集合)をもたせ得る場合があることを示している。これは大規模なデフォルト推論システムを構築するうえで有用な結果である。

〈3・2〉 相互拡張世界の一般的性質 ここでは拡張世界の性質⁽⁶⁾と対応させて, 相互拡張世界のもつ一般的な性質を明らかにする。

〔定理 1〕 二つのデフォルト理論 $A_1=(D_1, W_1)$, $A_2=(D_2, W_2)$ において

$$E_0^1=W_1$$

$$E_0^2=W_2$$

とし, $0 \leq i$ なる i に対して

$$E_{i+1}^1=Th(E_i^1) \cup \{c|a: Mb/c \in D_1, a \in E_i^1, \neg b \in E_i^1\} \cup G_i^2$$

$$E_{i+1}^2=Th(E_i^2) \cup \{c|a: Mb/c \in D_2, a \in E_i^2, \neg b \in E_i^2\} \cup G_i^1$$

$$G_i^1=\{g|g \in E_i^1, \neg g \in E_i^2\}$$

$$G_i^2=\{g|g \in E_i^2, \neg g \in E_i^1\}$$

とする。このとき, wff の集合 E^1, E^2 の組がデフォルト理論 A_1, A_2 に対する相互拡張世界となるための必要十分条件は

$$E^1=\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1$$

$$E^2=\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$$

が同時に成立することである。

(証 明)

$\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$ が次の D1' から D4' の関係を満たすことは明らかである。

$$D1'. W_1 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1$$

$$W_2 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$$

$$D2'. Th(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1) = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1$$

$$Th(\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2) = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$$

$$D3'. a: Mb/c \in D_1, a \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, \neg b \in E^1 \text{ ならば } c \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1$$

$$a: Mb/c \in D_2, a \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2, \neg b \in E^2 \text{ ならば } c \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$$

$$D4'. g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2, \neg g \in E^1 \text{ ならば } g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1$$

$$g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, \neg g \in E^2 \text{ ならば } g \in \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$$

一方、 $\Gamma_1(E^1), \Gamma_2(E^2)$ は上記の関係を満たす一階述語論理式の集合の中で最小の集合であるから、次の関係が成立している。

$$\Gamma_1(E^1) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\Gamma_2(E^2) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2 \dots\dots\dots (2)$$

この(1)、(2)式の関係を用いて以下の証明を行う。

〈必要性の証明〉 E^1, E^2 の組が A_1, A_2 の相互拡張世界であるとき (すなわち、 $\Gamma_1(E^1) = E^1, \Gamma_2(E^2) = E^2$ のとき)、 $E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1$ および $E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$ が成立することを示す。

すべての $i(\geq 0)$ に対して、 $E_i^1 \subseteq E^1, E_i^2 \subseteq E^2$ であることを帰納法で証明する。

$i=0$ のとき、 $E_0^1 = W_1 \subseteq \Gamma_1(E^1), E_0^2 = W_2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ であり、 $\Gamma_1(E^1) = E^1, \Gamma_2(E^2) = E^2$ なる仮定より、 $E_0^1 \subseteq E^1, E_0^2 \subseteq E^2$ である。

次に、 $E_k^1 \subseteq E^1, E_k^2 \subseteq E^2$ を仮定して、 $E_{k+1}^1 \subseteq E^1, E_{k+1}^2 \subseteq E^2$ を導く。

(1) $E_{k+1}^1 \subseteq E^1$ を示す。

$p \in E_{k+1}^1$ なる任意の論理式 p を考える。すると、① $p \in Th(E_k^1)$ である、② $a: Mb/p \in D_1, a \in E_k^1, \neg b \in E^1$ なるデフォルト式が少なくとも一つ存在する、③ $p \in E_k^2, \neg p \in E^1$ である、のうちの少なくとも一つが成立している。

①の場合： $E_k^1 \subseteq E^1$ なる仮定より、 $p \in Th(E^1) = E^1$ である。

②の場合： $E_k^1 \subseteq E^1, E^1 = \Gamma_1(E^1)$ なる仮定より、 $a: Mb/p \in D_1, a \in E_k^1, \neg b \in E^1$ なるデフォルト式 $a: Mb/p$ に対して、 $a \in E^1 = \Gamma_1(E^1)$ でもあるから、条件 D3 より $p \in \Gamma_1(E^1) = E^1$ である。

③の場合： $E_k^2 \subseteq E^2, E^2 = \Gamma_2(E^2)$ なる仮定より、 $p \in E_k^2, \neg p \in E^1$ であれば、 $p \in E^2 = \Gamma_2(E^2), \neg p \in E^1$ でもあるから、条件 D4 より、 $p \in \Gamma_1(E^1) = E^1$ である。

以上の①～③より、 $E_{k+1}^1 \subseteq E^1$ が示された。

(2) $E_{k+1}^2 \subseteq E^2$ についてもほぼ同様に示すことが

できる (省略)。

従って、すべての $i(\geq 0)$ に対して、 $E_i^1 \subseteq E^1, E_i^2 \subseteq E^2$ である。

ところで、すべての $i(\geq 0)$ に対して $E_i^1 \subseteq E^1, E_i^2 \subseteq E^2$ であれば、 $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1 \subseteq E^1, \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2 \subseteq E^2$ である。従って、(1)式、(2)式の関係および $\Gamma_1(E^1) = E^1, \Gamma_2(E^2) = E^2$ なる仮定より、 $E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$ が成り立つ。

〈十分性の証明〉 $E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$ であるとき、 E^1, E^2 の組は A_1, A_2 の相互拡張世界であること (すなわち、 $\Gamma_1(E^1) = E^1, \Gamma_2(E^2) = E^2$) を示す。

すべての $i(\geq 0)$ に対して、 $E_i^1 \subseteq \Gamma_1(E^1), E_i^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ であることを帰納法で証明する。

$i=0$ のとき、条件 D1 より、 $E_0^1 = W_1 \subseteq \Gamma_1(E^1), E_0^2 = W_2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ である。

次に、 $E_k^1 \subseteq \Gamma_1(E^1), E_k^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ を仮定して $E_{k+1}^1 \subseteq \Gamma_1(E^1), E_{k+1}^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ を導く。

(1) $E_{k+1}^1 \subseteq \Gamma_1(E^1)$ を示す。

$p \in E_{k+1}^1$ なる任意の論理式 p を考える。すると、① $p \in Th(E_k^1)$ である、② $a: Mb/p \in D_1, a \in E_k^1, \neg b \in E^1$ なるデフォルト式が少なくとも一つ存在する、③ $p \in E_k^2, \neg p \in E^1$ である、のうちの少なくとも一つが成立している。

①の場合： $E_k^1 \subseteq \Gamma_1(E^1)$ なる仮定より、 $p \in Th(\Gamma_1(E^1)) = \Gamma_1(E^1)$ である。

②の場合： $E_k^1 \subseteq \Gamma_1(E^1)$ なる仮定より、 $a: Mb/p \in D_1, a \in E_k^1, \neg b \in E^1$ なるデフォルト式 $a: Mb/p$ に対して、 $a \in \Gamma_1(E^1)$ でもあるから、条件 D3 より、 $p \in \Gamma_1(E^1)$ である。

③の場合： $E_k^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ なる仮定より、 $p \in E_k^2, \neg p \in E^1$ であれば、 $p \in \Gamma_2(E^2), \neg p \in E^1$ でもあるから、条件 D4 より $p \in \Gamma_1(E^1)$ である。

以上の①～③より、 $E_{k+1}^1 \subseteq \Gamma_1(E^1)$ が示された。

(2) $E_{k+1}^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ についてもほぼ同様に示すことができる (省略)。

従って、すべての $i(\geq 0)$ に対して、 $E_i^1 \subseteq \Gamma_1(E^1), E_i^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ である。

ところで、すべての $i(\geq 0)$ に対して $E_i^1 \subseteq \Gamma_1(E^1), E_i^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ であれば、 $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1 \subseteq \Gamma_1(E^1), \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2 \subseteq \Gamma_2(E^2)$ である。従って、(1)式、(2)式の関係および $E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$ なる仮定より、 $\Gamma_1(E^1) = E^1, \Gamma_2(E^2) = E^2$ が成り立つ。

以上の必要性および十分性の証明より、定理は証明された。

この定理は wff の集合 E^1, E^2 がデフォルト理論 A_1, A_2 の相互拡張世界であるか否かの判定に用いる

ことができる。これをさきの〔例題 1〕を用いて示す。

〔例題 7〕 〔例題 1〕で考察したデフォルト理論 A_1, A_2 において、 $E^1 = E^2 = Th(\{p, u, r, t, z\})$ の組が A_1, A_2 に対する相互拡張世界であることを示す。 $E^1 = E^2 = Th(\{p, u, r, t, z\})$ として、〔定理 1〕に従って E^1_i と E^2_i の系列を求める。

- (1) $E^1_0 = W_1 = \{p\}$
 $E^2_0 = W_2 = \{u\}$
- (2) $E^1_1 = Th(\{p\}) \cup \{r\} \cup \{u\}$
 $E^2_1 = Th(\{u\}) \cup \phi \cup \{p\}$
 $(\phi \text{ は空集合を表す})$
- (3) $E^1_2 = Th(\{p, r, u\}) \cup \{r, t\} \cup \{u\}$
 $E^2_2 = Th(\{u, p\}) \cup \phi \cup \{p, r\}$
- (4) $E^1_3 = Th(\{p, r, u, t\}) \cup \{r, t\} \cup \{u, p, r\}$
 $E^2_3 = Th(\{u, p, r\}) \cup \phi \cup \{p, r, u, t\}$
- (5) $E^1_4 = Th(\{p, r, u, t\}) \cup \{r, t\}$
 $\cup \{u, p, r, t\}$
 $E^2_4 = Th(\{u, p, r, t\}) \cup \{z\} \cup \{p, r, u, t\}$
- (6) $E^1_5 = Th(\{p, r, u, t, z\}) \cup \{r, t\}$
 $\cup \{u, p, r, t, z\}$
 $E^2_5 = Th(\{u, p, r, t, z\}) \cup \{z\}$
 $\cup \{p, r, u, t, z\}$
- (7) 以後
 $E^1_6 = E^1_5 \cdots = Th(\{p, r, u, t, z\})$
 $E^2_6 = E^2_5 \cdots = Th(\{p, r, u, t, z\})$

従って、

$$E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^1_i$$

$$E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E^2_i$$

なる関係が成立するので、 $E^1 = E^2 = Th(\{p, u, r, t, z\})$ の組は A_1, A_2 に対する相互拡張世界である。

〔定理 2〕 E^1, E^2 の組をデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 = (D_2, W_2)$ の相互拡張世界とすれば E^1, E^2 は次のように表される。

$$E^1 = Th(W_1 \cup \text{CONSEQUENTS}(GD(E^1, A_1)))$$

$$\cup \{g | g \in E^2, \neg g \in E^1\}$$

$$E^2 = Th(W_2 \cup \text{CONSEQUENTS}(GD(E^2, A_2)))$$

$$\cup \{g | g \in E^1, \neg g \in E^2\}$$

ただし、デフォルト理論 $A = (D, W)$, wff の集合 E に対して

$$GD(E, A) = \{a : Mb/c \in D | a \in E, \neg b \in E\}$$

$$\text{CONSEQUENTS}(D) = \{c | a : Mb/c \in D\}$$

とする。 $GD(E, A)$ を A の E に対する生成デフォルト式の集合、 $\text{CONSEQUENTS}(D)$ を D の帰結の集合と呼ぶ。 (証明略)

この定理は相互拡張世界の組 E^1, E^2 の性質および E^1, E^2 の関係を陽に表現しているが E^1, E^2 が E^1, E^2 を用いて再帰的に表されているため、この定理から直接 E^1, E^2 を求めることはできない。

〔定理 3〕 E^1, E^2 の組をデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 = (D_2, W_2)$ の相互拡張世界とすれば E^1, E^2 は次のように表される。

$$E^1 = Th(W_1 \cup \text{CONSEQUENTS}(GD(E^1, A_1)))$$

$$E^2 = Th(W_2 \cup \text{CONSEQUENTS}(GD(E^2, A_2)))$$

ただし

$$A'_1 = (D'_1, W_1)$$

$$A'_2 = (D'_2, W_2)$$

$$D'_1 = D_1 \cup \{ : Mg/g | g \in E^2 \}$$

$$D'_2 = D_2 \cup \{ : Mg/g | g \in E^1 \}$$

(証明略)

この定理は相互拡張世界の組 E^1, E^2 がそれぞれデフォルト理論 A'_1, A'_2 の拡張世界であることを主張している。ただし、逆は成立しない。すなわち、デフォルト理論 A'_1, A'_2 の拡張世界は一般には複数個存在するから、その任意の組が相互拡張世界になるとは限らない。これをさきの〔例題 1〕で示す。

〔例題 8〕 〔例題 1〕で考察したデフォルト理論 A_1, A_2 に対する相互拡張世界は前述のように二組存在する。ここではこのうち $E^1 = Th(\{p, r, t, u, v, x\})$, $E^2 = Th(\{u, \neg t, v, p, r, x\})$ の組について考察する。

〔定理 3〕によれば、この E^1, E^2 に対するデフォルト理論 A'_1, A'_2 はそれぞれ、 $A'_1 = (\{p : Mq/r, r : Ms/t, v : Mw/x, : Mu/u, : M \neg t / \neg t, : Mu/v, : Mp/p, : Mr/r, : Mx/x\}, \{p\})$, $A'_2 = (\{u : M \neg t / \neg t, \neg t : Mu/v, t : My/z, : Mp/p, : Mr/r, : Mt/t, : Mu/u, : Mu/v, : Mx/x\}, \{u\})$ である。このとき、 A'_1 の拡張世界は $Th(\{p, r, t, u, v, x\})$ の 1 個であるが、 A'_2 の拡張世界は $Th(\{u, \neg t, v, p, r, x\})$ および $Th(\{u, t, z, p, r, v, x\})$ の 2 個存在し、 A'_1, A'_2 の拡張世界の任意の組が相互拡張世界とはならないことがわかる。

〔定理 4〕 二つのデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 = (D_2, W_2)$ が相互拡張世界 E^1, E^2 をもつとする。このとき、 $E^1 = L(E^2 = L)$ となるための必要十分条件は、 $W_1(W_2)$ が充足不能であることである。

(証明略)

〔系 1〕 二つのデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 = (D_2, W_2)$ において、 $E^1 = L, E^2 = L$ の組が A_1, A_2 の相互拡張世界となるための必要十分条件は W_1, W_2 がともに充足不能であることである。

〔系 2〕 二つのデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 =$

$= (D_2, W_2)$ において $E^1 = L, E^2 = L$ の組が A_1, A_2 の相互拡張世界であれば、それは唯一の相互拡張世界である。

[系 3] 二つのデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 = (D_2, W_2)$ がそれぞれ拡張世界をもち、そのうちの少なくとも一方が L であれば、相互拡張世界は存在する。

[定理 5] 二つのデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 = (D_2, W_2)$ において E^1, E^2 の組および E^1, E^2 の組がともに相互拡張世界であり、 $E^1 \subseteq E^1, E^2 \subseteq E^2$ であれば、 $E^1 = E^1, E^2 = E^2$ である。

(証明)

$E^1 \subseteq E^1, E^2 \subseteq E^2$ のとき、[定理 1] における $E_i^1, E_i^1, E_i^2, E_i^2$ において、 $0 \leq i$ なるすべての i に対して、

$$E_i^1 \subseteq E_i^1$$

$$E_i^2 \subseteq E_i^2$$

が成立することを帰納法で証明する。

$i=0$ のとき、 $E_0^1 = E_0^1 = W_1, E_0^2 = E_0^2 = W_2$ より、 $E_0^1 \subseteq E_0^1, E_0^2 \subseteq E_0^2$ である。

次に、 $E_k^1 \subseteq E_k^1, E_k^2 \subseteq E_k^2$ を仮定して、 $E_{k+1}^1 \subseteq E_{k+1}^1, E_{k+1}^2 \subseteq E_{k+1}^2$ を導く。

(1) $E_{k+1}^1 \subseteq E_{k+1}^1$ を示す。

$p \in E_{k+1}^1$ なる任意の論理式 p を考える。すると、① $p \in E_k^1$ である、② $a: Mb/p \in D_1, a \in E_k^1, \neg b \in E^1$ なるデフォルト式 $a: Mb/p$ が少なくとも一つ存在する、③ $p \in E_k^2, \neg p \in E^1$ である、のうちの少なくとも一つが成立している。

①の場合： $E_k^1 \subseteq E_k^1$ を仮定しているから、 $p \in E_k^1 \subseteq Th(E_k^1) \subseteq E_{k+1}^1$ である。

②の場合： $E_k^1 \subseteq E_k^1, E^1 \subseteq E^1$ を仮定しているから、 $a: Mb/p \in D_1, a \in E_k^1, \neg b \in E^1$ であれば、 $a: Mb/p \in D_1, a \in E_k^1, \neg b \in E^1$ でもある。従って、 $p \in E_{k+1}^1$ である。

③の場合： $E_k^2 \subseteq E_k^2, E^1 \subseteq E^1$ を仮定しているから、 $p \in E_k^2, \neg p \in E^1$ であれば、 $p \in E_k^2, \neg p \in E^1$ でもある。従って、 $p \in E_{k+1}^1$ である。

以上の①～③より、 $E_{k+1}^1 \subseteq E_{k+1}^1$ が示された。

(2) $E_{k+1}^2 \subseteq E_{k+1}^2$ についてもほぼ同様に示すことができる (省略)。

従って、 $E^1 \subseteq E^1, E^2 \subseteq E^2$ のとき、 $0 \leq i$ なるすべての i に対して、 $E_i^1 \subseteq E_i^1, E_i^2 \subseteq E_i^2$ である。

ところで E^1, E^2 の組および E^1, E^2 の組はともに相互拡張世界であるから、 $E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2, E^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^1, E^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i^2$ である。従って、 $E^1 \subseteq E^1, E^2 \subseteq E^2$ である。この結果と $E^1 \subseteq E^1$ かつ $E^2 \subseteq E^2$ であるという定理の仮定より $E^1 = E^1, E^2 = E^2$ が証明さ

れた。

この定理は包含関係がある相互拡張世界は存在しないことを示している。

[定理 6] 二つのデフォルト理論 $A_1 = (D_1, W_1), A_2 = (D_2, W_2)$ において、 E^1, E^2 の組が相互拡張世界であり、 $E^1 \neq E^2$ であれば、 $E^1 \cup E^2$ は充足不能である。

(証明) $E^1 \neq E^2$ であれば、 $p \in E^1, p \notin E^2$ (あるいは、 $p \in E^2, p \notin E^1$) なる論理式 p が少なくとも一つは存在する。ところで E^1, E^2 の組は相互拡張世界であるから、 $E^1 = \Gamma_1(E^1), E^2 = \Gamma_2(E^2)$ が成立する。一方、[定義 2] 条件 D4 より、 $g \in \Gamma_1(E^1), \neg g \in E^2$ なるすべての g に対して $g \in \Gamma_2(E^2)$ でなければならないから、 $g \in E^1, \neg g \in E^2$ なるすべての g に対して $g \in E^2$ でなければならない。従って、上記の p に関しては $p \in E^1$ であるから、 $p \in E^2$ であるためには $\neg p \in E^2$ でなければならない。すなわち、 $p \in E^1, \neg p \in E^2$ である。従って、 $E^1 \cup E^2$ は充足不能である ($p \in E^2, p \in E^1$ の場合も同様に証明できる (省略))。

この定理は相互拡張世界の組 E^1, E^2 の間の関係を与えるものである。

以上の性質をまとめると[定理 1]、[定理 2]は、拡張世界で成り立っている性質がわずかな変更 (他のシステムからの知識の記述を加えることと、各システムにおける知識集合の性質を「連立」させること) で相互拡張世界でも成り立つことを示している。[定理 3]は、各システム間でやり取りする知識集合が $a: Mg/g$ の形のデフォルト式の集合として表されること、これを元のデフォルト式の集合に加えれば相互拡張世界は拡張世界と同様の形で取扱い得ることを示す重要な定理である。また、[定理 4]、[定理 5]は拡張世界で成立するのと同じ性質であり、これらの性質の成立に関しては、各システムの間での知識のやり取りがあるか否か (すなわち、各システムの動作が独立であるか、あるいは互いに影響を受けているか) は無関係である。一方、[定理 6]は知識のやり取りのない独立したシステムの動作からは得られない性質であり、複数個のシステムの間での相互作用の結果生ずる性質である。

<3.3> 正規デフォルト理論に対する相互拡張世界の性質 $a: Mb/b$ の形のデフォルト式は正規デフォルト式と呼ばれる。また、デフォルト理論 $A = (D, W)$ において、 D に含まれるデフォルト式がすべて正規デフォルト式であるとき、 A は正規デフォルト理論と呼ばれる。推論システムを構築する際よく用いられる閉世界仮説⁽⁶⁾がこの正規デフォルト理論を用いて記述できることなど、正規デフォルト理論は一般のデフォルト理論の中でも特に重要である。ここでは、与

えられた理論が正規デフォルト理論である場合の相互拡張世界の性質について議論する。

(定理 7) 二つのデフォルト理論 $A_1=(D_1, W_1)$, $A_2=(D_2, W_2)$ がともに正規デフォルト理論であれば, A_1, A_2 に対する相互拡張世界は存在する。

(証明) A_1, A_2 はともに正規デフォルト理論であるから, それぞれの拡張世界は存在する。 A_1 あるいは A_2 の拡張世界が充足不能 (L) であれば, [系 3] より相互拡張世界は存在する。従って, 以下では A_1 および A_2 の相互拡張世界は充足不能ではない (すなわち, [定理 4] より, W_1 および W_2 はともに充足不能ではない) と仮定して証明を行う。

F_1^i および F_2^i を次のように定義する。

$$F_0^1 = W_1$$

$$F_0^2 = W_2$$

とし, $0 \leq i$ なる i に対して,

$$F_{i+1}^1 = Th(F_1^i) \cup T_1^i$$

$$F_{i+1}^2 = Th(F_2^i) \cup T_2^i$$

とする。ただし, T_1^i, T_2^i は次の条件を満たす wff の最大の集合であるとする。

(1) $F_1^i \cup T_1^i$ および $F_2^i \cup T_2^i$ は充足可能である。

(2) もし $p \in T_1^i$ なら, 幾つかのデフォルト式 $a: Mb/b \in D_1$ に対して $a \in F_1^i, b=p$ であるか, $p \in F_1^i$ である。また, もし $p \in T_2^i$ なら幾つかのデフォルト式 $a: Mb/b \in D_2$ に対して $a \in F_2^i, b=p$ であるか, $p \in F_2^i$ である。

以上の F_1^i, F_2^i を用いて F^1, F^2 を次のように求める。

$$F^1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_1^i$$

$$F^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_2^i$$

以下, このようにして得られる F^1, F^2 の組が正規デフォルト理論 A_1, A_2 の相互拡張世界であること, すなわち上記の T_1^i, T_2^i がともに次のように表されることを証明する。

$$T_1^i = \{b | a: Mb/b \in D_1, a \in F_1^i, \neg b \in F^1\}$$

$$\cup \{g | g \in F_2^i, \neg g \in F^1\}$$

$$T_2^i = \{b | a: Mb/b \in D_2, a \in F_2^i, \neg b \in F^2\}$$

$$\cup \{g | g \in F_1^i, \neg g \in F^2\}$$

(これを証明すれば, [定理 1] より, F^1, F^2 の組が正規デフォルト理論 A_1, A_2 の相互拡張世界であることが証明されたことになる)

以下, 簡単のため $\{b | a: Mb/b \in D_1, a \in F_1^i, \neg b \in F^1\} \cup \{g | g \in F_2^i, \neg g \in F^1\}$ を $RHS^1, \{b | a: Mb/b \in D_2, a \in F_2^i, \neg b \in F^2\} \cup \{g | g \in F_1^i, \neg g \in F^2\}$ を RHS^2 と表す。

$T_1^i \subseteq RHS^1, T_2^i \subseteq RHS^2$ は明らかである。従って

$T_1^i \neq RHS^1, T_2^i \neq RHS^2$ を仮定して矛盾を導き, これより $T_1^i = RHS^1, T_2^i = RHS^2$ を示す。 $T_1^i \neq RHS^1, T_2^i \neq RHS^2$ を仮定する。

(1) $T_1^i \neq RHS^1$ が矛盾することを導く。

$T_1^i \subseteq RHS^1, T_1^i \neq RHS^1$ より, $p \in RHS^1 - T_1^i$ なる論理式 p が少なくとも一つは存在する。ところで T_1^i の最大性より, $F_1^i \cup T_1^i \cup \{p\}$ は充足不能である。すると $F_1^i \subseteq Th(F_1^i)$ より, $Th(F_1^i) \cup T_1^i \cup \{p\}$ は充足不能である。従って, $F_{i+1}^1 \cup \{p\}$ は充足不能である。また, $F_{i+1}^1 \subseteq F^1$ であるから $F^1 \cup \{p\}$ は充足不能である。従って, $\neg p \in F^1$ でなければならない。これは $p \in RHS^1$ に矛盾する。

(2) $T_2^i \neq RHS^2$ が矛盾することもほぼ同様に導くことができる (省略)。

従って $T_1^i \subseteq RHS^1, T_2^i \subseteq RHS^2$ において $T_1^i \neq RHS^1, T_2^i \neq RHS^2$ ではない。すなわち $T_1^i = RHS^1, T_2^i = RHS^2$ である。

この定理は相互拡張世界の存在を保証する重要な定理である。

このほか正規デフォルト理論に対して, その相互拡張世界は次のような性質をもつ。

(定理 8) D_1, D_1', D_2, D_2' を $D_1' \subseteq D_1, D_2' \subseteq D_2$ なる関係をもつ正規デフォルト式の集合, W_1, W_2 を充足可能な wff の集合, E^1, E^2 の組を正規デフォルト理論 $A_1'=(D_1', W_1), A_2'=(D_2', W_2)$ に対する相互拡張世界の一つとする。すると正規デフォルト理論 $A_1=(D_1, W_1), A_2=(D_2, W_2)$ は, $E^1 \subseteq E^1$ かつ $E^2 \subseteq E^2$ なる相互拡張世界 E^1, E^2 をもつ。

(証明略) 文献(7)参照。

この定理は正規デフォルト式の増加に対して相互拡張世界が単調に増大することを主張している。

(定理 9) 正規デフォルト理論 $A_1=(D_1, W_1), A_2=(D_2, W_2)$ が二組の異なる相互拡張世界 E^1, E^2 および E^1, E^2 をもてば, $E^1 \cup E^1$ あるいは $E^2 \cup E^2$ の少なくとも一方は充足不能である。

(証明略) 文献(7)参照。

この定理は, 異なる相互拡張世界の間での知識集合の直交性 (和集合が充足不能という性質) が部分的に成り立つことを主張している。

以上の性質をまとめると, [定理 7] は拡張世界で成立していたのと同様の性質である。[定理 8] および [定理 9] は, 同じく拡張世界に類似した性質ではあるが, [定理 8] では「 $E^1 \subseteq E^1$ かつ $E^2 \subseteq E^2$ なる相互拡張世界 E^1, E^2 をもつ」という結果に対し, [定理 9] では「 $E^1 \cup E^1$ あるいは $E^2 \cup E^2$ の少なくとも一方は充足不能である」という結果であり, 拡張世界の性質

と相互拡張世界の性質を対比させた場合、複数個のシステムに関する条件が 'AND' となる場合と 'OR' となる場合があることに注意を要する。

4. む す び

互いに影響を及ぼしあう複数個 (2 個) のデフォルト推論を行うシステムに対して相互拡張世界を定義し、その性質を明らかにした。各システムの間でやり取りされる知識集合の条件は、本論文で考察した条件の他にもいろいろ設定することができる⁽¹⁰⁾。また、その条件に対応して、いろいろの性質をもった相互拡張世界を得ることができる。本論文で得られた相互拡張世界の性質の中には、拡張世界で成立していたのと同じ性質のものがいくつか存在する (例えば(定理 7)) が、これはあくまで(定義 2)の条件の下での話であり、やり取りする知識集合の条件を変更すれば、必ずしも両者の共通性はなくなる。やり取りする知識集合の条件をどのように設定すればこれらの性質がどのように変化するか、その関係を明らかにすることは興味深い課題である。

先述したように、比較的小さな規模の知識情報処理システムを相互に結合し、大規模なシステムを構成する場合、本論文で定義した相互拡張世界の概念が必要となる。本論文では、デフォルト推論を行うシステムの個数を 2 個に限定して考察を行ったが、実際にはより多くの個数のシステムの相互作用を問題にする必要がある。この場合、各システムの接続状況 (すべてのシステムを互いに直接接続する、すべてのシステムから参照できる「共通の場所」を介して各システムを間接的に接続するなどが考えられる)、各システム間で

の知識の交換順序 (並列的に同時に行う、何らかの順序を付けて行うなどが考えられる)、複数個のシステムを介して交換される知識の取扱い (システム A の知識を、システム B を介して、システム C が受け取る場合などの条件の記述) など、システムの個数が 2 個の場合には生じなかった種々の問題が生じる。このような問題をどのように定式化すべきか、またその結果得られた相互拡張世界がどのような性質をもつかなどの検討は今後の課題である。

(昭和 63 年 10 月 24 日受付)

文 献

- (1) 大須賀: 「知識の獲得と学習」, 情報処理, 26, 1520 (昭 60-12)
- (2) J. Doyle: "A Truth Maintenance System", *Artif. Intell.*, 12, 231 (1979)
- (3) J. McCarthy: "Circumscription - A Form of Non-monotonic Reasoning", *ibid.*, 13, 27 (1980)
- (4) D. McDermott & J. Doyle: "Non Monotonic Logic I", *ibid.*, 13, 41 (1980)
- (5) D. McDermott: "Nonmonotonic Logic II: Non-monotonic Modal Theories", *J. ACM*, 29, 33 (1982)
- (6) R. Reiter: "A Logic for Default Reasoning", *Artif. Intell.*, 13, 81 (1980)
- (7) 相原・村上・馬場口・四反田: 「モデル理論に基づくデフォルト論理の基礎的考察」, 情報処理学会論, 28, 109 (昭 62-2)
- (8) 村上・相原・四反田: 「デフォルト推論における準拡張世界とその性質」, 同上, 28, 1280 (昭 62-12)
- (9) 村上・相原・四反田: 「デフォルト推論における非再帰的拡張世界とその性質」, 人工知能学誌, 3, 359 (昭 63-5)
- (10) 村上・相原: 「デフォルト推論における相互拡張世界」, 昭 62 信学部門全大講演論文集, 1, 1-130
- (11) 村上・相原: 「デフォルト推論における相互拡張世界の諸性質」, 昭 63 信学総全大講演論文集, D-1, 1-101
- (12) 村上・相原: 「デフォルト推論を行う知識情報処理システムにおける知識の統合について」, 情報処理学会, データベース・システム研究, DBS 66-1 (昭 63)