レベル M ファジー集合について

正 員 中 西 祥八郎 (東海大)

1. ま え が き

あいまいな概念を取扱う手段として Zadeh によってファジー集合⁽¹⁾が提唱されて以来、ファジー集合は様々な分野に応用され、その有用性が幅広く認められている。あいまいな概念は人間の関与するあらゆるシステムに必ずと言っていいほど存在し、その種類も極めて多様である。この中にはあいまいな概念がそのシステムの重要な要素となっている場合も多くある。従って、これらの多様な要求に応えるためには幅広くあいまいな概念を表現することのできるファジー集合が必要となる。

通常ファジー集合と比べてよりあいまいな概念や事象を表現する方法として、まず最初にタイプ n ファジー集合が挙げられるが、この中で人間の感覚でとらえられるのはタイプ 2 ファジー集合までではないかと考えられる。タイプ 2 ファジー集合は通常ファジー集合の帰属度を更にファジー化したもので、これに関しては水本ら⁽²⁾によって詳細な報告がなされている。

タイプ 2 ファジー集合で表されるような概念のほか、一つの事象や概念が複数のあいまい性を内包するようなものが考えられる。自然言語には、このように複数のあいまい性を内包するようなものが多い。例えば「色」という言葉を考えてみる。この「色」の中には「赤」、「青」、「黄」などの通常ファジー集合で表される多くのあいまい性が内包されている。

すなわち、「色」は赤、青、黄などのファジー集合の集まりで表されると考えられる。このような通常ファジー集合の集まりを本論文ではレベル 2 の多値ファジー集合として表す。また「色」は当然のことながらそれ自身ファジー集合と考えられるので、このようにときには、先の「色」を表すレベル 2 の多値ファジ

ー集合をファジー化してレベル 2 ファジー集合でこれを表す。すなわち、レベル 2 ファジー集合はレベル 2 の多値ファジー集合のファジー集合として表される。更に、「絵」という言葉には「色」、「形」などのレベル 2 ファジー集合が内包されている。このような場合にはレベル 3 の多値ファジー集合もしくはレベル 3 ファジー集合で表現される。このように複数のあいまい性を内包する概念や事象を表現する方法として、Zadeh⁽³⁾はレベルファジー集合の概念を提案し、言語への応用とその重要性について述べている。また、Grattan-Guinness⁽⁴⁾は区間のメンバシップを用いて多値ファジー量の概念を提案し、その代数的性質を明らかにしている。更に、Goguen⁽⁵⁾もレベルファジー集合の言語への応用について解説し、その概念的構造と簡単な数値例を述べている。Gottwald⁽⁶⁾はハイレベルのファジー集合をファジー集合の通常集合として表し、その集合論的性質を詳細に述べている。

本論文では、ある事象や概念が複数のあいまい性を内包しているようなものを表現する手段として、まず初めに多値ファジー集合⁽⁷⁾を導入する。通常集合の多値集合に関しては Young⁽⁸⁾による詳しい報告がある。ここではレベル 2 の多値ファジー集合のメンバシップ関数を通常メンバシップ関数の集まりとして規定し、これから帰納的に階層構造をもつように全体を構成する。更に、種々の基本的演算をこれに導入しその性質を明らかにする。

レベル 2 ファジー集合は通常ファジー集合の集まりのファジー集合であると考えられるから、本論文ではレベル 2 ファジー集合をレベル 2 の多値ファジー集合を用いて規定し、これから階層的にレベル m ファジー集合を導入する。また、これらのレベル m ファジー集合間に基本的な演算を導入し、その演算の基にレベル m ファジー集合は通常ファジー集合とほとんど同じ性質をもつことを示す。またレベル m ファジー集合はこの集合とタイプ 2 ファジー集合やその他の確率的ファジー集合などと組合せてできる拡張ファジー集合の基礎となるものと考えられる。

Some Properties of Level M Fuzzy Sets. By Shohachiro Nakamishi, Member (Department of Electrical Engineering, Tokai University).

中西祥八郎：正員，東海大学工学部電気工学科

2. 多値ファジィ集合⁽⁷⁾

X を普遍集合とし、 x をその要素とする。通常のファジィ集合 A は次のようなメンバシップ関数 μ_A によって完全に特性づけられる。

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1] \dots\dots\dots (1)$$

通常、ファジィ集合を取扱うとき、そのファジィ集合は何らかのあいまいな概念を表している。例えば「青」という色を表す場合、上の例ではファジィ集合 A に青というラベルが付いているものとする。本論文では、一度に複数のあいまいな概念を取扱うので各メンバシップ関数がいかなるあいまい性を表しているかを明確にする必要がある。そこで、メンバシップ関数を次のように記述する。

$$\mu_A(x|u) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u はあいまいさの内容を表し、タームと呼ぶことにする。例えば、青という色を表す場合には

$$\mu_A(x|\text{青}) \dots\dots\dots (3)$$

のように記述して、このメンバシップ関数がどのようなあいまい性を表しているかを明確にする。

T をタームの普遍集合とし、 $\{\rho_i\}$ を T 上の同値関係の集合とする。この同値関係 ρ_i を用いて商集合 U_i^2 を次のように構成する。

$$U_i^2 = T/\rho_i^1 = \{u_{ij}^1\} \dots\dots\dots (4)$$

この商集合 U_i^2 のことをここではレベル 2 の商集合と呼び、 u_{ij}^1 はその要素である。例えば、 ρ_i^1 を「色」という同値関係とすると、 u_{ij}^1 は赤、青、黄などを表していることになり、その集まりが U_i^2 である。従って、 U_i^2 は「色」を表していることになる。

レベル 2 の商集合全体からなる集合を T^2 で表し、その上の同値関係の集合を $\{\rho_i^2\}$ とすると、いまと同様にしてレベル 3 の商集合を次のように構成することができる。

$$U_i^3 = T^2/\rho_i^2 = \{u_{ij}^2\} \dots\dots\dots (5)$$

例えば、 ρ_i^2 を「絵」を表す同値関係と仮定すると u_{ij}^2 は色、形などを表していることになる。一般に、この手続きを繰返してレベル m の商集合を得ることができる。

$$U_i^m = T^{m-1}/\rho_i^{m-1} = \{u_{ij}^{m-1}\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 T^{m-1} はレベル $m-1$ の商集合全体からなる集合で、 ρ_i^{m-1} はその上の同値関係である。

次に、多値ファジィ集合とレベルファジィ集合を構成するために一般的多値ファジィ集合を導入する。一般的多値ファジィ集合は次のような一般的多値メンバシップ関数 F によって特性づけられる。

$$F(x|\Lambda)$$

$$= \{\#_1(x|u_{i1}^{1-1}), \dots, \#_i(x|u_{is}^{m-1}), \dots, \#_n(x|u_{kt}^{1-1})\}, \\ \#_i \in \Lambda, u_{ir}^{1-1} \in U^1, u_{js}^{m-1} \in U^m,$$

$$u_{kt}^{1-1} \in U^h, \forall x \in X, \dots\dots\dots (7)$$

$$\Lambda = \{\# | \text{任意のファジィ集合のメンバシップ関数}\}$$

ここで、 $\#_i$ は通常のファジィ集合、タイプ 2 ファジィ集合、レベル m ファジィ集合などのような任意のファジィ集合のメンバシップ関数であり、 $u_{ir}^{1-1}, u_{js}^{m-1}, u_{kt}^{1-1}$ などは任意の商集合の要素である。

まず初めに、この一般的多値メンバシップ関数の要素 $\#_i$ として通常ファジィ集合のメンバシップ関数を採用し、レベル 2 の多値ファジィ集合を導入する。レベル 2 の多値ファジィ集合は次のようなレベル 2 の多値メンバシップ関数 M^2 によって特性づけられる。

$$M^2(x|U^2) = F(x|\Omega^2)|U^2 \\ = \{\mu_1(x|u_i^1), \dots, \mu_n(x|u_n^1), \dots, \\ \mu_i(x|v_j^1), \dots, \mu_m(x|w_k^1)\}|U^2 \\ = \{\mu_i(x|u_i^1), \dots, \mu_n(x|u_n^1)\} \\ = \{\mu_i(x|u_i^1)\} = \{M_i^1(x|u_i^1)\}, \\ u_i^1 \in U^2, \forall x \in X, \\ \dots\dots\dots (8)$$

$\Omega^2 = \{\text{通常ファジィ集合のメンバシップ関数}\}$ すなわち、レベル 2 の多値メンバシップ関数は通常ファジィ集合のメンバシップ関数を要素とする一般的多値メンバシップ関数をレベル 2 の商集合で制限したものとして構成されている。例えば U^2 を「色」を表す商集合とすると $M^2(x|U^2)$ は $M^2(x|\text{色})$ のように書かれ、その要素である $M_i^1(x|u_i^1)$ は色に内包される赤、青などのあいまいさを表しており、 $M_i^1(x|\text{赤})$ 、 $M_i^1(x|\text{青})$ のように書かれる。

いまと同様の方法で、レベル 2 多値メンバシップ関数を用いてレベル 3 の多値メンバシップ関数を次のように構成することができる。

$$M^3(x|U^3) = F(x|\Omega^3)|U^3 \\ = \{M_i^2(x|u_i^2), \dots, M_n^2(x|u_n^2), \dots, \\ M_i^2(x|v_j^2), \dots, M_m^2(x|w_k^2)\}|U^3 \\ = \{M_i^2(x|u_i^2)\}, \\ u_i^2 \in U^3, \forall x \in X, \\ \dots\dots\dots (9)$$

$$\Omega^3 = \{\text{レベル 2 の多値メンバシップ関数}\}$$

この式からわかるように、レベル 3 の多値メンバシップ関数はレベル 2 の多値メンバシップ関数を一般的多値メンバシップ関数の要素 $\#_i$ に代入し、それをレベ

ル3の商集合で制限したものとして構成されている。レベル3の多値ファジー集合の例として「絵」という言葉を取上げてみると $M^3(x|U^3)$ は $M^3(x|絵)$ のように書かれ、その要素 $M^2(x|u_i^2)$ は $M^2(x|色)$, $M^2(x|形)$ のように表現される。一般にこの手続きを繰返してレベル m の多値メンバシップ関数を次のように構成することができる。

$$\begin{aligned} M^m(x|U^m) &= F(x|\Omega^m)|U^m \\ &= \{M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}, \\ u_i^{m-1} &\in U^m, \forall x \in X \\ &\dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$\Omega^m = \{\text{レベル } m-1 \text{ の多値メンバシップ関数}\}$
ここで、 $M^{m-1}(x|u_i^{m-1})$ はレベル $m-1$ の多値メンバシップ関数を表し、 U^m はレベル m の商集合を示している。このようにレベル m の多値ファジー集合は、レベル2の多値ファジー集合から帰納的に階層構造をもつ集合として構成されている。

次に、多値ファジー集合間の基本的関係と演算を導入する。 A と B を二つのレベル m の多値ファジー集合とし、それらの多値メンバシップ関数をそれぞれ

$$\begin{aligned} M^m(x|U^m) &= \{M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}, \\ N^m(x|V^m) &= \{N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1})\}, \dots\dots\dots (11) \\ u_i^{m-1} &\in U^m, v_j^{m-1} \in V^m, \forall x \in X \end{aligned}$$

とする。二つの多値メンバシップ関数 $M^m(x|U^m)$ と $N^m(x|V^m)$ が等しいとき、多値ファジー集合 A と B は等しいという。すなわち、

$$A=B \iff M^m(x|U^m)=N^m(x|V^m) \dots (12)$$

である。ここで、 $M^m(x|U^m)$ と $N^m(x|V^m)$ が等しいとは $M^m(x|U^m)$ のすべての要素が $N^m(x|V^m)$ の要素に等しく、かつ U^m と V^m が等しいことである。

(8)式よりレベル2の多値ファジー集合のメンバシップ関数は

$$M^2(x|U^2) = \{\mu_i(x|u_i^1)\} = \{M_i^1(x|u_i^1)\} \dots (13)$$

であるから $M_i^1(x|u_i^1)$ は通常のファジー集合のメンバシップ関数である。この中で一番大きなものを $M^2(x|U^2)$ の大きな値とし、それを $\alpha(M^2)$ と略記する。また一番小さなものを $M^2(x|U^2)$ の小さな値とし、 $\beta(M^2)$ と書いて $M^2(x|U^2)$ に対する大小の値を定める。更に $M^3(x|U^3)$ に対しては、 $M^3(x|U^3)$ の各要素の大きな値 $\alpha(M_i^2)$ のうち一番大きなものを $M^3(x|U^3)$ の大きな値とし、 $\alpha(M^3)$ で表す。また $M^3(x|U^3)$ の各要素小さな値 $\beta_i(M_i^2)$ のうち一番小さなものを $M^3(x|U^3)$ の小さな値とし、 $\beta(M^3)$ で表す。一般に、 $M^m(x|U^m)$ に関しても同様の手続きを繰返して、帰納的に $\alpha(M^m)$ と $\beta(M^m)$ を定めることがで

きる。

二つの多値ファジー集合のメンバシップ関数をそれぞれ $M^m(x|U^m)$ および $N^m(x|V^m)$ とする。 $M^m(x|U^m)$ の各要素の $\alpha_i(M_i^{m-1})$ が $N^m(x|V^m)$ のある要素の $\alpha_j(N_j^{m-1})$ より小さく、同時に $N^m(x|V^m)$ のすべての要素の $\beta_i(N_i^{m-1})$ が $M^m(x|U^m)$ のある要素の $\beta_i(M_i^{m-1})$ より大きいとき、 $M^m(x|U^m)$ は $N^m(x|V^m)$ より小さい、または $N^m(x|V^m)$ は $M^m(x|U^m)$ より大きいと言ひ、次のように表す。

$$M^m(x|U^m) \odot N^m(x|V^m) \dots\dots\dots (14)$$

更に、この条件を少しゆるめた「優劣」関係を次に導入する。 $M^m(x|U^m)$ の各要素の $\alpha_i(M_i^{m-1})$ が $N^m(x|V^m)$ のある要素の $\alpha_j(N_j^{m-1})$ に等しいか小さく、または $N^m(x|V^m)$ のすべての要素の $\beta_i(N_i^{m-1})$ が $M^m(x|U^m)$ のある要素の $\beta_i(M_i^{m-1})$ に等しいか大きいとき、 $M^m(x|U^m)$ は $N^m(x|V^m)$ より劣っている、または $N^m(x|V^m)$ は $M^m(x|U^m)$ より優っていると云ひ、次のように表す。

$$M^m(x|U^m) \ominus N^m(x|V^m) \dots\dots\dots (15)$$

多値ファジー集合の補集合を導入しよう。多値ファジー集合 A の補集合 A^c は A の多値メンバシップ関数を用いて次のように定義される。

$$\begin{aligned} A^c \iff & \begin{cases} \ominus M^m(x|U^m) = 1 \ominus M^m(x|U^m) \\ = \{1 \ominus M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}, \\ 1 \ominus M^2(x|U^2) = \{1 - M_i^1(x|u_i^1)\} \end{cases} \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、記号 $\ominus$ と $\ominus$ はそれぞれ多値メンバシップ関数の否定と減法を表しており、 $M_i^1(x|u_i^1)$ は通常のファジー集合のメンバシップ関数である。また、記号 1 は多値メンバシップ関数の単位元である。

多値メンバシップ関数間に次のような和と積に関する新しい演算を導入しよう。

$$\begin{aligned} M^m(x|U^m) \odot N^m(x|V^m) &= S(M^m, N^m) = \{S_{ij}(M^m, N^m)\} \\ M^m(x|U^m) \odot N^m(x|V^m) &= T(M^m, N^m) = \{T_{ij}(M^m, N^m)\} \\ &\dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ただし、これらの成分は次のようである。

$$\begin{aligned} S_{ij}(M^m, N^m) &= \begin{cases} M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1}) \odot N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1}) & U^m \neq V^m \\ M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1}) \odot N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1}) & (u_i^{m-1} = v_j^{m-1}) \\ 0 & (u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}) \end{cases} \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$T_{ij}(M^m, N^m) = \begin{cases} M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1}) \odot N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1}) & U^m \neq V^m \\ M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1}) \odot N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1}) & (u_i^{m-1} = v_j^{m-1}) \\ \emptyset & (u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}) \end{cases} \quad U^m = V^m$$

..... (19)

ここで、記号 $\odot$ と $\otimes$ はそれぞれ多値メンバシップ関数の和と積を表しており、 $M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})$ と $N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1})$ はそれぞれレベル m の多値メンバシップ関数 $M^m(x|U^m)$ と $N^m(x|V^m)$ の要素である。また記号 $\emptyset$ は $U^m = V^m$ で $u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}$ のとき、演算は行わないことを意味している。このような演算に関する規則を次に詳しく述べる。

〔演算規則〕 多値メンバシップ関数間の演算はそれを制限している商集合によって類別される。すなわち、(i) 商集合が等しい ($U^m = V^m$) 場合と、(ii) 等しくない ($U^m \neq V^m$) の場合に大別される。(i) の場合には多値メンバシップ関数の要素のターム、例えば、 u_i^{m-1} と v_j^{m-1} が (a) 等しい場合 ($u_i^{m-1} = v_j^{m-1}$) と (b) 等しくない ($u_i^{m-1} \neq v_j^{m-1}$) 場合がある。(a) の場合には、それぞれのタームが属する要素、例えば $M_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})$ と $N_j^{m-1}(x|v_j^{m-1})$ との間の演算は行い、(b) の場合には、それぞれのタームが属する要素間の演算は行わない。(ii) の場合には、二つの多値メンバシップ関数のそれぞれの要素全体にわたって演算を行う。この演算規則は 2 個以上の多値メンバシップ関数間の演算に対しても適応される。

多値メンバシップ関数の和と積を用いて多値ファジー集合の和と積を次のように定める。

$$\begin{aligned} A \cup B &\iff M^m(x|U^m) \odot N^m(x|V^m) \\ A \cap B &\iff M^m(x|U^m) \otimes N^m(x|V^m) \end{aligned} \quad \text{..... (20)}$$

これまで述べてきたことからレベル m の多値メンバシップ関数に関して次の定理を得る。次の定理では、レベル m の多値メンバシップ関数 $M^m(x|U^m)$, $N^m(x|V^m)$, $K^m(x|W^m)$ をそれぞれ $M^m(x)$, $N^m(x)$, $K^m(x)$ のような省略形で表すことにする。

〔定理 1〕

A, B, C を任意のレベル m の多値ファジー集合とし、それらの多値メンバシップ関数をそれぞれ $M^m(x)$, $N^m(x)$, $K^m(x)$ とする。このとき、レベル m の多値メンバシップ関数は、先に導入した和と積に関する演算 $\odot$ と $\otimes$ および否定と不等式に対する演算 $\ominus$ と $\oslash$ に関して次の関係が成立する。

- (1) 反射則：
 $M^m(x) \odot M^m(x)$
- (2) 推移則：
 $M^m(x) \odot N^m(x), N^m(x) \odot K^m(x) \Rightarrow M^m(x) \odot K^m(x)$
- (3) べき等則：
 $M^m(x) \odot M^m(x) = M^m(x)$
 $M^m(x) \otimes M^m(x) = M^m(x)$
- (4) 交換則：
 $M^m(x) \odot N^m(x) = N^m(x) \odot M^m(x)$
 $M^m(x) \otimes N^m(x) = N^m(x) \otimes M^m(x)$
- (5) 結合則：
 $(M^m(x) \odot N^m(x)) \odot K^m(x) = M^m(x) \odot (N^m(x) \odot K^m(x))$
 $(M^m(x) \otimes N^m(x)) \otimes K^m(x) = M^m(x) \otimes (N^m(x) \otimes K^m(x))$
- (6) 分配則：
 $M^m(x) \odot (N^m(x) \otimes K^m(x)) = (M^m(x) \odot N^m(x)) \otimes (M^m(x) \odot K^m(x))$
 $M^m(x) \otimes (N^m(x) \odot K^m(x)) = (M^m(x) \otimes N^m(x)) \odot (M^m(x) \otimes K^m(x))$
- (7) 二重否定則：
 $\ominus(\ominus M^m(x)) = M^m(x)$
- (8) ドウ・モルガン則：
 $\ominus(M^m(x) \odot N^m(x)) = (\ominus(M^m(x))) \otimes (\ominus(N^m(x)))$
 $\ominus(M^m(x) \otimes N^m(x)) = (\ominus(M^m(x))) \odot (\ominus(N^m(x)))$
- (9) 定数則：
 $M^m(x) \odot 0 = M^m(x), M^m(x) \otimes 1 = M^m(x),$
 $M^m(x) \odot 1 = 1, M^m(x) \otimes 0 = 0$

ただし、 0 は零元である。

3. レベル m ファジー集合

ここでは、さきに導入した多値ファジー集合の概念を用いてレベル m ファジー集合を規定し、その性質について述べる。まず初めに通常ファジー集合の集まりのファジー集合であるレベル 2 ファジー集合を導入し、レベル 2 ファジー集合から帰納的にレベル m ファジー集合を構成する。

レベル 2 ファジー集合を導入するために、もう一度レベル 2 の多値メンバシップ関数を次のように記述する。

$$\tilde{M}^2(x|U^2) = F(x|\Gamma^2)|U^2$$

$$= \{\tilde{\mathfrak{M}}_i^1(x|u_i^1)\} = \{\mu_i(x|u_i^1)\} \\ u_i^1 \in U^2, \tilde{\mathfrak{M}}_i^1 \in \Gamma^2, \forall x \in X \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 Γ^2 は通常のメンバシップ関数の集合を表している。

$P(\tilde{\mathfrak{M}}^2)$ を $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|\cdot)$ のべき集合とすると、レベル 2 ファジ集合は次のようなメンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^2$ によって特性づけられる。

$$f^1: P(\tilde{\mathfrak{M}}^2) \rightarrow [0, 1] \\ \tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2) = f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)/\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2) \\ = f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)/\{\tilde{\mathfrak{M}}_i^1(x|u_i^1)\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)$ は $f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2))$ を略記したものであり、 x での $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ のグレードを表している。なお、本論文では $\tilde{\mathfrak{M}}^2$ のような記号の用い方をした場合は、特に断わらない限り $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ を意味するものとする。添え字、肩文字が変わっても同様である。(22)式において $\tilde{\mathfrak{M}}^2$ のグレードが 1、すなわち $f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)=1$ のときには、 $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ である度合いが 1 なので $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ は $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ と同じものを意味していることになる。また (21) 式からわかるように、 $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ は前章の $M^2(x|U^2)$ と同じなので、 $f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)=1$ のときには、 $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ は $M^2(x|U^2)$ に等しくなる。すなわち、レベル 2 の多値ファジ集合はレベル 2 ファジ集合の特殊な場合であると考えられる。

ここで「色」という言葉について考えてみると、色はさきに述べたようにレベル 2 の多値ファジ集合で表される。このことは $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|\text{色})$ のように記述される。一方、「色」そのものもファジ集合であると考えられる。このことは $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|\text{色})$ があるグレードをもつことを意味しており、このグレードを $f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|\text{色})) = (f^1\tilde{\mathfrak{M}}^2)$ で表す。この内容を表しているのが (22) 式であり、この場合

$$\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|\text{色}) = f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)/\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|\text{色}) \quad \dots\dots\dots (23)$$

のように記述される (図 1 参照)。

図 1 にレベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数の一例が示してある。レベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数は

$$\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2) = f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)/\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2) \\ = f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)/\{\tilde{\mathfrak{M}}_i^1(x|u_i^1)\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

のように表され、 $\tilde{\mathfrak{M}}_i^1(x|u_i^1)$ は通常ファジ集合のメンバシップ関数である。図 1 の面 A に書かれているメンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}_1^1(x|u_1^1)$ 、 $\tilde{\mathfrak{M}}_2^1(x|u_2^1)$ の集まり $\{\tilde{\mathfrak{M}}_i^1(x|u_i^1), \tilde{\mathfrak{M}}_2^1(x|u_2^1)\}$ はレベル 2 の多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ を表している。また面 B の関数 $f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2)$ は図 1 から容易にわかるようにレベル 2 の多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ のグレードを表してい

る。なお、図 1 の面 C におけるメンバシップ関数はレベル 2 の多値メンバシップ関数のタイプ 2 化を示している。本論文では、タイプ 2 化に関して詳細に論ずることは避けるが、タイプ 2 ファジ集合の多値ファジ集合やレベル m ファジ集合を構成することもでき、またレベル m ファジ集合のタイプ 2 ファジ化も考えることができる⁽⁹⁾。

レベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数を一般的多値メンバシップ関数 F の $\#_i$ に代入し、それをレベル 3 の商集合で制限すれば次のようなレベル 3 の多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^3$ を構成することができる。

$$\tilde{\mathfrak{M}}^3(x|U^3) = F(x|\Gamma^3)|U^3 \\ = \{\tilde{\mathfrak{M}}_i^2(x|u_i^2)\} \\ u_i^2 \in U^3, \tilde{\mathfrak{M}}_i^2 \in \Gamma^3, \\ \forall x \in X \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 Γ^3 はレベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数からなる多値メンバシップ関数の集合を表している。この $\tilde{\mathfrak{M}}^3$ を用いてレベル 3 ファジ集合のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^3$ を次のように構成する。

$$f^2: P(\tilde{\mathfrak{M}}^3) \rightarrow [0, 1] \\ \mathfrak{M}^3(x|U^3) = f^2(\tilde{\mathfrak{M}}^3)/\tilde{\mathfrak{M}}^3(x|U^3) \\ = f^2(\tilde{\mathfrak{M}}^3)/\{\tilde{\mathfrak{M}}_i^2(x|u_i^2)\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $P(\tilde{\mathfrak{M}}^3)$ は $\tilde{\mathfrak{M}}^3$ のべき集合を表している。

レベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ を構成しているレベル 2 の多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^2(x|U^2)$ は、通常ファジ集合のメンバシップ関数を要素とする多値メンバシップ関数で、前節で導入した $M^2(x|U^2)$ と同一である。しかし、レベル 3 ファジ集合のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^3(x|U^3)$ を構成しているレベル 3 の多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^3(x|U^3)$ は (25) 式からわかるように、その要素としてレベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数をもつ多値メンバシップ関数なので、前節のレベル 2 の多値メンバシップ関数を要素とする $M^3(x|U^3)$ とは異なる。そこで、ここでは多値メンバシップ関数を表す記号として M の代わりに $\mathfrak{M}$ を用いている。

一般に、上述したような手続きを繰返してレベル m ファジ集合のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m$ をレベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数から帰納的に次のように構成することができる。

$$f^{m-1}: P(\tilde{\mathfrak{M}}^m) \rightarrow [0, 1] \\ \mathfrak{M}^m(x|U^m) = f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m)/\tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \\ = f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m)/\{\tilde{\mathfrak{M}}_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\} \\ \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $P(\tilde{\mathfrak{M}}^m)$ は $\tilde{\mathfrak{M}}^m$ のべき集合であり、 $\tilde{\mathfrak{M}}^m$ と

図 1 レベル 2 ファジー集合のメンバシップ関数

Fig. 1. Membership function of level 2 fuzzy sets.

$\tilde{\mathfrak{M}}^{m-1}$ はそれぞれレベル m の多値メンバシップ関数とその要素を表しており、関数 f^{m-1} の値はレベル m の多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^m$ のグレードを表している。もしレベル集合のグレードを表す関数が次の関係

$$f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) = \dots = f^2(\tilde{\mathfrak{M}}^3) = f^1(\tilde{\mathfrak{M}}^2) = 1 \quad \dots (28)$$

を満たすならば、レベル m ファジー集合のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m$ は前節で述べたレベル m の多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^m$ に等しくなる。従って、レベルファジー集合はその特殊な場合として多値ファジー集合に等しくなる。

ここで、レベル m ファジー集合とそのメンバシップ関数間に基本的演算を導入しよう。任意の二つのレベル m ファジー集合を A および B とし、それらに対応するメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m$ と $\mathfrak{N}^m$ をそれぞれ次のようにする。

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^m(x|U^m) &= f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) / \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \\ &= f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) / \{\tilde{\mathfrak{M}}_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\}, \\ \mathfrak{N}^m(x|V^m) &= g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m) / \tilde{\mathfrak{N}}^m(x|V^m) \\ &= g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m) / \{\tilde{\mathfrak{N}}_j^{m-1}(x|v_j^{m-1})\}, \\ u_i^{m-1} &\in U^m, v_j^{m-1} \in V^m, \forall x \in X \\ &\dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

このとき、メンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m$ と $\mathfrak{N}^m$ が等しいならば、二つのレベル m ファジー集合 A と B は等しいと言う。すなわち、

$$A = B \iff \mathfrak{M}^m(x|U^m) = \mathfrak{N}^m(x|V^m), \dots (30)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^m(x|U^m) &= \mathfrak{N}^m(x|V^m) \\ \iff \begin{cases} f^{m-1} = g^{m-1} \\ \text{and} \\ \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) = \tilde{\mathfrak{N}}^m(x|V^m) \end{cases} \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

である。

任意のレベル m ファジー集合 A と B のメンバシップ関数を $\mathfrak{M}^m$ と $\mathfrak{N}^m$ とするとき、グレード

$f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m)$ が $g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m)$ の値より小さく (大きく)、同時に多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m)$ が $\tilde{\mathfrak{N}}^m(x|V^m)$ より小さい (大きい) とき、 $\mathfrak{M}^m(x|U^m)$ は $\mathfrak{N}^m(x|V^m)$ より小さい (大きい) と言う。このことを式で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^m(x|U^m) &\leq \mathfrak{N}^m(x|V^m) \\ \iff \begin{cases} f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) < g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m) \\ \text{and} \\ \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \odot \tilde{\mathfrak{N}}^m(x|V^m) \dots\dots\dots (32) \end{cases} \end{aligned}$$

多値ファジー集合の場合と同様に、上の条件を少し緩めた「優劣」関係を次に導入する。任意のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m$ と $\mathfrak{N}^m$ において、 $f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m)$ の値が $g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m)$ の値より小さいか等しく、同時に多値メンバシップ関数 $\tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m)$ が $\tilde{\mathfrak{N}}^m(x|V^m)$ より劣っているとき、 $\mathfrak{M}^m$ は $\mathfrak{N}^m$ より劣っていると言い、次のように表す。

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^m(x|U^m) &\leq \mathfrak{N}^m(x|V^m) \\ \iff \begin{cases} f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) \leq g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m) \\ \text{and} \\ \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \odot \tilde{\mathfrak{N}}^m(x|V^m) \dots\dots\dots (33) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、記号 $\leq$ はレベル m ファジー集合のメンバシップ関数の優劣関係を表している。

レベル m ファジー集合 A の補集合 A^c を導入しよう。 A のメンバシップ関数を $\mathfrak{M}^m$ とするとき、その補集合 A^c は A のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m$ の否定によって次のように表される。

$$\begin{aligned} A^c &\iff \Box \mathfrak{M}^m(x|U^m) \\ &= 1 \Box \mathfrak{M}^m(x|U^m) \\ &= (1 - f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m)) / (1 \ominus \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m)) \\ &= (1 - f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m)) / \{1 \ominus \tilde{\mathfrak{M}}_i^{m-1}(x|u_i^{m-1})\} \quad (34) \end{aligned}$$

ここで、記号 $\Box$ と $\ominus$ はそれぞれレベル m ファジー集合のメンバシップ関数の否定と減法を表している。

上に導入したメンバシップ関数間の関係を用いて、レベル m ファジー集合 A と B の包含関係を次のように規定する。すなわち、 A のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m(x|U^m)$ が B のメンバシップ関数 $\mathfrak{N}^m(x|V^m)$ より劣っているとき、 A は B に含まれると言う。これを式で表すと次のようになる。

$$A \subset B \iff \mathfrak{M}^m(x|U^m) \leq \mathfrak{N}^m(x|V^m) \quad \dots (35)$$

次に、レベル m ファジー集合のメンバシップ関数間の和と積を次のように導入する。

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^m(x|U^m) &\vee \mathfrak{N}^m(x|V^m) \\ &= f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) / \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \\ &\quad \vee g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m) / \tilde{\mathfrak{N}}^m(x|V^m) \\ &= (f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) \vee g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{N}}^m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& /(\tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \odot \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|V^m)) \\
& \mathfrak{M}^m(x|U^m) \triangle \mathfrak{M}^m(x|V^m) \\
& = f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) / \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \\
& \quad \triangle g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) / \mathfrak{M}^m(x|V^m) \\
& = (f^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m) \wedge g^{m-1}(\tilde{\mathfrak{M}}^m)) \\
& \quad /(\tilde{\mathfrak{M}}^m(x|U^m) \odot \tilde{\mathfrak{M}}^m(x|V^m)) \dots\dots\dots (36)
\end{aligned}$$

ここで、記号 ∇ と $\triangle$ はそれぞれメンバシップ関数間の和と積を表している。このメンバシップ関数の和と積を用いてレベル m ファジ集合間の和と積を次のように規定することができる。

$$\begin{aligned}
A \cup B & \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^m(x|U^m) \nabla \mathfrak{M}^m(x|V^m), \\
A \cap B & \Longleftrightarrow \mathfrak{M}^m(x|U^m) \triangle \mathfrak{M}^m(x|V^m) \dots (37)
\end{aligned}$$

レベル m ファジ集合のメンバシップ関数 $\mathfrak{M}^m(x|U^m)$, $\mathfrak{M}^m(x|V^m)$, $\mathfrak{R}^m(x|W^m)$ をそれぞれ $\mathfrak{M}^m(x)$, $\mathfrak{N}^m(x)$, $\mathfrak{R}^m(x)$ のように略して書くことにする。このような表現の基にレベル m ファジ集合のメンバシップ関数に関して次の定理を得る。

〔定理 2〕

A, B, C を任意のレベル m ファジ集合とし、それらのメンバシップ関数をそれぞれ $\mathfrak{M}^m(x)$, $\mathfrak{N}^m(x)$, $\mathfrak{R}^m(x)$ とする。このとき、任意のレベル m ファジ集合のメンバシップ関数は、さきに導入した和と積に関する演算 ∇ と $\triangle$ および否定と不等式に対する演算 $\neg$ と $\leq$ に関して次の関係が成立する。

- (1) 反射則：
 $\mathfrak{M}^m(x) \leq \mathfrak{M}^m(x)$
- (2) 推移則：
 $\mathfrak{M}^m(x) \leq \mathfrak{N}^m(x), \mathfrak{N}^m(x) \leq \mathfrak{R}^m(x)$
 $\Rightarrow \mathfrak{M}^m(x) \leq \mathfrak{R}^m(x)$
- (3) べき等則：
 $\mathfrak{M}^m(x) \nabla \mathfrak{M}^m(x) = \mathfrak{M}^m(x)$
 $\mathfrak{M}^m(x) \triangle \mathfrak{M}^m(x) = \mathfrak{M}^m(x)$
- (4) 交換則：
 $\mathfrak{M}^m(x) \nabla \mathfrak{N}^m(x) = \mathfrak{N}^m(x) \nabla \mathfrak{M}^m(x)$
 $\mathfrak{M}^m(x) \triangle \mathfrak{N}^m(x) = \mathfrak{N}^m(x) \triangle \mathfrak{M}^m(x)$
- (5) 結合則：
 $(\mathfrak{M}^m(x) \nabla \mathfrak{N}^m(x)) \nabla \mathfrak{R}^m(x)$
 $= \mathfrak{M}^m(x) \nabla (\mathfrak{N}^m(x) \nabla \mathfrak{R}^m(x))$
 $(\mathfrak{M}^m(x) \triangle \mathfrak{N}^m(x)) \triangle \mathfrak{R}^m(x)$
 $= \mathfrak{M}^m(x) \triangle (\mathfrak{N}^m(x) \triangle \mathfrak{R}^m(x))$
- (6) 分配則：
 $\mathfrak{M}^m(x) \nabla (\mathfrak{N}^m(x) \triangle \mathfrak{R}^m(x))$
 $= (\mathfrak{M}^m(x) \nabla \mathfrak{N}^m(x)) \triangle (\mathfrak{M}^m(x) \nabla \mathfrak{R}^m(x))$
 $\mathfrak{M}^m(x) \triangle (\mathfrak{N}^m(x) \nabla \mathfrak{R}^m(x))$

$$= (\mathfrak{M}^m(x) \triangle \mathfrak{N}^m(x)) \nabla (\mathfrak{M}^m(x) \triangle \mathfrak{R}^m(x))$$

(7) 二重否定則：

$$\neg(\neg \mathfrak{M}^m(x)) = \mathfrak{M}^m(x)$$

(8) ドゥ・モルガン則：

$$\neg(\mathfrak{M}^m(x) \nabla \mathfrak{N}^m(x)) = (\neg \mathfrak{M}^m(x)) \triangle (\neg \mathfrak{N}^m(x))$$

$$\neg(\mathfrak{M}^m(x) \triangle \mathfrak{N}^m(x)) = (\neg \mathfrak{M}^m(x)) \nabla (\neg \mathfrak{N}^m(x))$$

(9) 定数則：

$$\mathfrak{M}^m(x) \nabla 0 = \mathfrak{M}^m(x), \quad \mathfrak{M}^m(x) \triangle 1 = \mathfrak{M}^m(x),$$

$$\mathfrak{M}^m(x) \nabla 1, \quad \mathfrak{M}^m(x) \triangle 0 = 0$$

ここで、記号 0 と 1 はそれぞれ零元と単位元を意味している。

(証明)

数学的帰納法により証明する。任意のレベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数を $\mathfrak{M}^2(x|U^2)$ および $\mathfrak{N}^2(x|V^2)$ とする。これらのメンバシップ関数間の優劣関係は定義より次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{M}^2(x|U^2) \leq \mathfrak{N}^2(x|V^2) \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} f^1(\mathfrak{M}^2) \leq g^1(\mathfrak{N}^2) \\ \text{and} \\ \mathfrak{M}^2(x|U^2) \odot \mathfrak{N}^2(x|V^2) \dots\dots\dots (38) \end{cases}
\end{aligned}$$

反射則はこの式より明らかである。また、これらのメンバシップ関数のグレードを示す関数は実数値関係であることからグレードは推移則を満たし、同時にこれらを構成する多値メンバシップ関数は〔定理 1〕により推移則を満たす。従って、レベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数は推移則を満たす。

レベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数間の和と積に関する演算は次の式で表される。

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{M}^2(x|U^2) \nabla \mathfrak{N}^2(x|V^2) \\
& = (f^1(\mathfrak{M}^2) \vee g^1(\mathfrak{N}^2)) / (\mathfrak{M}^2(x|U^2) \odot \mathfrak{N}^2(x|V^2)) \\
& \mathfrak{M}^2(x|U^2) \triangle \mathfrak{N}^2(x|V^2) \\
& = (f^1(\mathfrak{M}^2) \wedge g^1(\mathfrak{N}^2)) / (\mathfrak{M}^2(x|U^2) \odot \mathfrak{N}^2(x|V^2)) \\
& \dots\dots\dots (39)
\end{aligned}$$

上式からわかるようにレベル 2 ファジ集合のメンバシップ関数間の演算は、そのグレード間の演算と多値メンバシップ関数間の演算に分けられる。多値メンバシップ関数の演算については、レベル 2 の多値メンバシップ関数 $\mathfrak{M}^2(x|U^2)$ および $\mathfrak{N}^2(x|V^2)$ などの要素は通常のメンバシップ関数であり、これらは〔定理 1〕で述べた諸法則を満たす。更にグレードの演算に関しては、メンバシップ関数 $\mathfrak{M}^2(x|U^2)$ および $\mathfrak{N}^2(x|V^2)$ などのグレードを表す関数 f および g は区間 $[0, 1]$ にその値をとる実数値関数であるから、これらはべき等則、交換則、結合則、分配則、ドゥ・モルガン則、定数則などを満たす。従って、レベル 2 ファジ集合の

メンバシップ関数はべき等則, 交換則, 結合則, 分配則, ドウ・モルガン則, 定数則などを満たす。

レベル 2 ファジー集合のメンバシップ関数の否定は次のように表される。

$$\begin{aligned} \neg \mathfrak{M}^2(x|U^2) &= 1 \ominus \mathfrak{M}^2(x|U^2) \\ &= (1 - f^1(\mathfrak{M}^2)) / (1 \ominus \mathfrak{M}^2(x|U^2)) \\ &\dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

この式でも演算はグレードの演算と多値メンバシップ関数の演算に分けられ, 両者はともに二重否定則を満たすので, $\mathfrak{M}^2(x|U^2)$ は二重否定則を満たす。

いまレベル $m-1$ ファジー集合のメンバシップ関数は(定理 2)を満たしているものと仮定する。レベル m ファジー集合のメンバシップ関数は, その定義からわかるようにレベル $m-1$ ファジー集合のメンバシップ関数を要素とするレベル m の多値メンバシップ関数とそのグレードから構成されている。レベル m ファジー集合のメンバシップ関数間の優劣関係は

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^m(x|U^m) \leq \mathfrak{M}^m(x|V^m) \\ \iff \begin{cases} f^{m-1}(\mathfrak{M}^m) \leq g^{m-1}(\mathfrak{M}^m) \\ \text{and} \\ \mathfrak{M}^m(x|U^m) \leq \mathfrak{M}^m(x|V^m) \dots\dots\dots (41) \end{cases} \end{aligned}$$

のように表される。仮定により, レベル $m-1$ ファジー集合のメンバシップ関数は反射則, 推移則を満たしているので, レベル m の多値メンバシップ関数は反射則, 推移則を満たす。従って(定理 2)の反射則, 推移則が成立する。

レベル m ファジー集合のメンバシップ関数間の和と積についての演算は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^m(x|U^m) \vee \mathfrak{M}^m(x|V^m) &= (f^{m-1}(\mathfrak{M}^m) \vee g^{m-1}(\mathfrak{M}^m)) \\ &\quad / (\mathfrak{M}^m(x|U^m) \odot \mathfrak{M}^m(x|V^m)) \\ &= (f^{m-1}(\mathfrak{M}^m) \vee g^{m-1}(\mathfrak{M}^m)) \\ &\quad / \{\mathfrak{M}^{m-1}(x|U^{m-1}) \odot \mathfrak{M}^{m-1}(x|v_j^{m-1})\} \\ \mathfrak{M}^m(x|U^m) \wedge \mathfrak{M}^m(x|V^m) &= (f^{m-1}(\mathfrak{M}^m) \wedge g^{m-1}(\mathfrak{M}^m)) \\ &\quad / (\mathfrak{M}^m(x|U^m) \odot \mathfrak{M}^m(x|V^m)) \\ &= (f^{m-1}(\mathfrak{M}^m) \wedge g^{m-1}(\mathfrak{M}^m)) \\ &\quad / \{\mathfrak{M}^{m-1}(x|u_j^{m-1}) \odot \mathfrak{M}^{m-1}(x|v_j^{m-1})\} \\ &\dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

上式で示されるように, レベル m ファジー集合のメンバシップ関数に関する演算もグレード間の演算と, レベル $m-1$ ファジー集合のメンバシップ関数を要素

とするレベル m 多値メンバシップ関数間の演算に分けられる。仮定によりレベル $m-1$ ファジー集合のメンバシップ関数は(定理 2)を満たしている。従って, レベル $m-1$ ファジー集合のメンバシップ関数を要素とするレベル m の多値メンバシップ関数は(定理 1)を満たしている。また, グレードを示す関数は実数値関数であるから, それらは多値メンバシップ関数の満たす性質はすべて満たしている。すなわち, レベル m ファジー集合のメンバシップ関数は(定理 2)のべき等則, 交換則, 結合則, 分配則, ドウ・モルガン則, 定数則などを満たす。

二重否定則に対しても同様にして成立することが証明される。

4. ま と め

レベル m の多値ファジー集合を導入し, これらの間の基本的演算を規定した。これらの演算のもとでレベル m の多値ファジー集合は通常ファジー集合とほぼ同様の性質をもつことを示した。更に, 多値ファジー集合の概念を用いてレベル m ファジー集合を階層的に構成し, 基本的演算を導入した。これらの演算に関してレベル m ファジー集合は, 多値ファジー集合と同様に, 通常ファジー集合とほぼ同様の性質をもつことを示し, レベル m ファジー集合の基本的代数構造を明らかにした。

本論文で導入したレベル m ファジー集合とタイプ 2 ファジー集合やその他確率的ファジー集合などと組合せることにより, 更にあいまいな概念を表すことができる拡張ファジー集合を構成することができる。このような拡張ファジー集合を用いれば, 現存するあいまいな概念のかんりの部分が表現できるものと考えられる。

(昭和63年 6 月27日受付, 平成元年 4 月12日再受付)

文 献

- (1) L. A. Zadeh: "Fuzzy Sets", *Inf. & Control*, 18, 338 (1965)
- (2) M. Mizumoto & T. Tanaka: *ibid.*, 31, 312 (1976)
- (3) L. A. Zadeh: *Inf. Science*, 3, 159 (1971)
- (4) I. Grattan-Guinness: *Zeitschr. F. Math. Logic und Grundlagen d. Math. Bd. 22*, 149 (1976)
- (5) J. A. Goguen, Jr.: *Int. J. Man-Machine Studies*, 6, 513 (1974)
- (6) S. Gottwald: *Fuzzy Sets and Systems*, 2, 125 (1979)
- (7) S. Nakanishi: *ibid.*, 30, (1989) (掲載予定)
- (8) R. C. Young: *Mathematische Annalen*, 104, 260 (1931)
- (9) 高木・中西: 第4回ファジィシステムシンポジウム論文集, p.333 (昭63)