不確定需要を考慮した施設配置問題

正 員 西 田 直 矩 (東京理科大)

非会員 桧 垣 正 浩 (東京理科大)

非会員 馬 渕 透 (東京理科大)

The Facility Location Problem under Demand Uncertainty

Naonori Nishida, Member, Masahiro Higaki, Non-member, Mabuchi Tooru, Non-member
(Science University of Tokyo)

The facility location problem is one of the well-studied combinatorial optimization problems, and a number of algorithms which could find the optimal solution efficiently have been proposed. The facility location problem which considers the parametric analysis on demands has been studied, and this problem can handle the demand uncertainty to some extent. This paper deals with the facility location problem in which the customer's demands are given by the probability distribution functions. This model can provide more realistic information than the parametric analysis.

Firstly, the facility location problem under demand uncertainty is formulated as a mixed integer programming problem. The objective function to be minimized is the expected value of the total cost. To prevent the algorithm from finding such solutions that are very unlikely to satisfy the demand, a constraint is imposed so as to satisfy the total demand with more than a given probability. A branch-and-bound algorithm is proposed to find the exact solution. To find the optimal solution efficiently, a procedure for calculating the lower bound is presented. Moreover, to strengthen the lower bound, the Lagrangean relaxation is applied for the constraints on demand. Lastly, to illustrate the efficiency of the proposed method, the computational experience is given.

キーワード：施設配置問題，混合整数計画問題，確率計画問題

1. はじめに

幾つかの供給施設の建設候補地と需要地があり，供給地から需要地の需要量を満たすように製品を輸送するとき，施設の建設にかかる固定費と，輸送費の和の総費用を最小にするような建設方法を決定する問題が施設配置問題である。この問題は混合整数計画問題の代表的な問題であり，最適解を効率良く探索するいろいろな解法テクニックが研究されている^{(1)~(5)}。また，多重選択制約付き施設配置問題と言われる一建設候補地に対し複数の規模から建設施設を選択可能な問題⁽⁶⁾，需要量のパラメトリックな変化を考慮した問題⁽⁷⁾などが研究されている。

本論文で扱う施設配置問題は以下のようなものである。従

来の施設配置問題の定式化では，需要量は確定値として与える必要がある。しかし現実には，需要量にばらつきがある問題の解が要求されることが多い⁽⁸⁾。需要量の分布において，一部には相関がある分布なども考えられるが，本モデルでは，相関に関係なく任意の分布を考慮できる。

また，「絶対に需要を満たす条件」を設定すると，需要量のばらつきを考えたときに，不必要に巨大な施設の建設をする解が発生する。この防止の制約として，総供給量が，総需要量を例えば，99%以上の確率で満たすことを本定式化では制約として加えている。

その他，総費用に制限があり，その制限の超過にペナルティーが存在する問題も本アルゴリズムでは解く

ことができる。これは、確率計画法における上方向の分散の評価を近似的に考えたものである。

いろいろな問題の設定を考慮できるため、問題が複雑化しているように考えられるが、どれも現実要求されている制約である。本アルゴリズムの対象とする問題の特徴を以下にまとめて示す。

- (1) 需要量に任意の分布を想定できる。
- (2) 総需要を満たす確率の条件を考慮できる。
- (3) 総費用の制限のペナルティを設定できる。

単純な構造をもつ施設配置問題に対する解法⁽⁹⁾や、需要量以外のパラメータに不確定性を含んだ問題に対する解法⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾などは研究されているが、本問題はこれらと異なった問題である。

2. 不確定需要を考慮した施設配置問題

不確定需要を考慮した施設配置問題の定式化を行う。

m 個の建設予定地 i ($i=1, 2, \dots, m$) が存在し、それぞれの地点 i では、建設固定費 f_i 、供給量 a_i が与えられている。また、需要地 j ($j=1, 2, \dots, n$) があり、需要地 j の需要量は θ_j である。また、建設候補地 i から需要地 j へ製品 1 単位輸送するときにかかる輸送費用 c_{ij} が与えられている。

ここで、需要量の分布を表現するために、 $\theta_1, \dots, \theta_n$ の確率密度関数を $F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ とする。この関数は、需要地 j の需要が $\theta_j \sim \theta_j + d\theta_j$ ($j=1, \dots, n$) となる同時確率が、

$$F(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n \quad \cdots (1)$$

となることを表している。 F は確率密度関数より、次式が成立する。

$$\int_D F(\theta_1, \dots, \theta_n) d\theta_1 \cdots d\theta_n = 1 \quad \cdots (2)$$

$$D = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) | r_j \leq \theta_j \leq s_j, j=1, \dots, n\} \quad \cdots (3)$$

(3) 式の領域 D は需要量の有界な領域を示し、下限を r_j 、上限を s_j とする。また、以後の説明のため、 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ とおく。

需要量 $\theta_1, \dots, \theta_n$ がすべて独立な確率変数ならば、関数 F は、各々の需要地 j の需要の確率密度関数の積の形となるが、一般に相関のある分布を想定しておく。現実には、需要地の需要量間に相関の高い場合が多いと考えられる。

すべての需要地において、その需要を満たし、輸送費用と施設の建設固定費の総和の期待値を最小にする建設地点を求めるのが目的である。ここで、輸送方法については、実際の需要が決定してから輸送問題を解

いて求めるのが良い。パラメトリック問題と異なり、以後の議論において、建設地点が、需要量のパラメータの関数ではなく、領域 D に対し、最も有利な一つの建設方法を求めるのが目的であることに注意が必要であり、このような解を求めることができるのが、本アルゴリズムの特徴である。

建設候補地 i に施設を建設するかどうかの 0-1 変数を y_i 、建設候補地 i から需要地 j への輸送量を x_{ij} すると、不確定需要を考慮した施設配置問題は問題 P_0 のように定式化できる。

問題 P_0 :

$$\min_y V(y) \quad \cdots (4)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m a_i y_i \geq S(\alpha) \quad \cdots (5)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad (i=1, \dots, m) \quad \cdots (6)$$

ただし、 $V(y)$ は建設方法 y のときの費用の期待値である。また、ベクトル $y = (y_1, \dots, y_m)$ である。

$$V(y) = \int_D \left\{ T \left(\min_x \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i \right) F(\theta) \right\} d\theta_1 \cdots d\theta_n \quad \cdots (7)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i y_i \quad (i=1, \dots, m) \quad \cdots (8)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j(\theta) \quad (j=1, \dots, n) \quad \cdots (9)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \quad \cdots (10)$$

ただし、ベクトル $x = (x_{11}, \dots, x_{mn})$ である。(9) 式の $b_j(\theta)$ は見掛けの需要量を表し、

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i y_i \geq \sum_{j=1}^n \theta_j \right) \text{ のとき, } b_j(\theta) = \theta_j \quad \cdots (11)$$

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i y_i < \sum_{j=1}^n \theta_j \right) \text{ のとき, } b_j(\theta) = \left(\sum_{i=1}^m a_i y_i \right) \frac{\theta_j}{\sum_{j=1}^n \theta_j} \quad \cdots (12)$$

(4)~(6) 式は、変数 y の制約のもとで、総費用の期待値の最小となる施設の建設方法 y を求める問題である。(4) 式は総費用の期待値の最小化を表す目的関数、(5) 式は総供給量を α 以上の確率で満たす制約である。ここで、 $S(\alpha)$ は $F(\theta)$ から求まる定数であり、以下のように求めることができる。任意の分布に対して $S(\alpha)$ は、数値積分などを使って求めることができる。

まず、需要量の和 $\eta = \sum_{j=1}^n \theta_j$ の分布の確率密度関数は、

$$G(\eta) = \int_{D'(\eta)} F(\theta) d\theta_1 \cdots d\theta_n \cdots (13)$$

$$D'(\eta) = \left\{ \theta \mid \theta \in D, \eta = \sum_{j=1}^n \theta_j \right\} \cdots (14)$$

となるので、

$$\int_{\left(\sum_{i=1}^n r_i\right)} G(\eta) d\eta = \alpha \cdots (15)$$

(6)式は建設決定変数 y_i の0-1整数条件、(7)式は、建設方法 y であるときの総費用の期待値である。ここで、総費用制限関数 T について述べる。

この関数 T は、総費用の制限を超えた場合に付加するペナルティー（罰則）を与える関数であり、ある総費用の上限 μ を超えるとペナルティー $M(M > 0)$ が加わる次のような関数とする。この関数の導入により、総費用が上限を超える確率の高い解を減らすことができる。この総費用制限関数 T として、ファジー関数を定義することも可能であるが、本論文における定式化では(16)式のように定義しておく。

$$T(c) = \begin{cases} c & (c \leq \mu) \\ c + M & (c > \mu) \end{cases} \cdots (16)$$

(8)～(10)式は、(7)式の()内の x に関する最小化問題の制約条件、(8)式は供給地における供給上限制約、(9)式は需要地における需要制約であり、(10)式は、輸送量の非負制約である。

現実合うように、問題において次の仮定をしておく。

$$a_i > 0, f_i \geq 0 \quad (i=1, \cdots, m) \cdots (17)$$

$$c_{ij} \geq 0 \quad (i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n) \cdots (18)$$

$$r_j > 0, s_j \geq r_j \quad (j=1, \cdots, n) \cdots (19)$$

(12)式は、需要を満たすことができない領域での需要量の定数である。(5)式で示したように、 α 以上の確率で総供給量は総需要量を満たすが、その残りの領域で目的関数値を定義しなければならない。(12)式は、現実にもみられるように、「供給量の不足分を各々の需要量に比例して分配する」という考え方に基づいている。式では、これと同値な「供給量を各々の需要量に比例して分配する」ことに表現している。

3. 解法アルゴリズム

〈3・1〉 下界値計算 本問題に対して、ここでは分枝限定法に基づいたアルゴリズムを提案する。

まず、下界値の計算のために、0-1整数条件(6)式を、連線緩和する。分枝限定木上の任意の問題に対する緩和問題は、問題 P_1 のようになる。

L_0 : 分枝によって、 $y_i = 0$ に固定された施設建設候補地の集合。

L_1 : 分枝によって、 $y_i = 1$ に固定された施設建設候補地の集合。

L_2 : まだ固定されていない施設建設候補地の集合。

$L_0 \cup L_1 \cup L_2 = \{1, \cdots, m\}$

問題 P_1 :

$$\min_y \int_D \left\{ T \left(\min_x \sum_{i \in L_1 \cup L_2} \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in L_2} f_i y_i + \sum_{i \in L_1} f_i \right) F(\theta) \right\} d\theta_1 \cdots d\theta_n \cdots (20)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in L_2} a_i y_i + \sum_{i \in L_1} a_i \geq S(\alpha) \cdots (21)$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \quad (i \in L_2) \cdots (22)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i y_i \quad (i \in L_2) \cdots (23)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i \in L_1) \cdots (24)$$

$$\sum_{i \in L_1 \cup L_2} x_{ij} \geq b_j(\theta) \quad (j=1, \cdots, n) \cdots (25)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i \in L_1 \cup L_2; j=1, \cdots, n) \cdots (26)$$

ここで、 y は θ の関数ではない。しかし、 x と y を独立に解くのは困難である。このため、問題を緩和し、 y を θ の関数となることを許し、下界値とする。

制約(21)のため、既往の研究の方法では、変数 y を消去できない。しかし、問題 P_1 を LP で解くのは、効率が悪い。(23)、(24)式に対し、スラック変数 $x_{i,n+1}(i \in L_1 \cup L_2)$ を考える。

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i y_i \quad (i \in L_2) \cdots (27)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i \quad (i \in L_1) \cdots (28)$$

ここで、(27)式を用いて変数 y を消去する。また、 $c_{i,n+1} = 0(i \in L_1 \cup L_2)$ としておくと、等価な問題 P_2 に変換できる。これは、パラメトリック輸送問題を含み、その目的関数値を重み付きで重積分を計算する問題である。

問題 P_2 :

$$\int_D \left\{ T \left(\min_x \sum_{i \in L_1 \cup L_2} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in L_1} f_i \right) \times F(\theta) \right\} d\theta_1 \cdots d\theta_n \cdots (29)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \leq a_i \quad (i \in L_1 \cup L_2) \cdots (30)$$

$$\sum_{i \in L_1 \cup L_2} x_{ij} \geq b_j(\theta) \quad (j=1, \cdots, n+1) \cdots (31)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i \in L_1 \cup L_2; j=1, \cdots, n+1) \cdots (32)$$

ただし、

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & (i \in L_1) \\ c_{ij} + f_i/a_i & (i \in L_2) \end{cases} \cdots (33)$$

$$b_{n+1}(\theta) = S(\alpha) - \sum_{j=1}^n \theta_j \quad \dots\dots\dots (34)$$

(34)式は、(21)式と等価な条件を需要量で表現した式である。

パラメータ θ の値によって、三つの状態に分けて考える。

フェイズ1：

$$S(\alpha) > \sum_{j=1}^n \theta_j \quad \dots\dots\dots (35)$$

(34)式は有効であり、仮想需要地 $n+1$ が必要。

フェイズ2：

$$S(\alpha) \leq \sum_{j=1}^n \theta_j \leq \sum_{i \in L_1 \cup L_2} a_i \quad \dots\dots\dots (36)$$

需要量の制約により、 $S(\alpha)$ が保証された状態であり、 $\theta_{n+1} \leq 0$ となり、仮想需要地 $n+1$ は必要ない。

フェイズ3：

$$\sum_{i \in L_1 \cup L_2} a_i < \sum_{j=1}^n \theta_j \quad \dots\dots\dots (37)$$

建設候補地のすべての施設を建設しても総需要量を満たさない状態であり、残り $(1-\alpha)$ の領域で発生する。パラメトリック輸送問題を解く過程において、発生する問題である。

現実の問題では施設を建設した後に、需要量が予想以上に大きかったときに対応して考えることができる。仮定より、このような状態が $(1-\alpha)$ 未満の確率で発生する。実際、このようなときには、一部の需要地がこの供給不足の影響を受けるのではなく、不足分をすべての需要地に比例分配し、すべての需要地で少しずつ需要を満たさないように輸送されるであろう。この処置を式で表す。不足量は次のようになる。

$$\sum_{j=1}^n \theta_j - \sum_{i \in L_1 \cup L_2} a_i$$

この不足分をすべての需要地に、需要量に比例して分配するので、需要地 j の需要量は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} & \theta_j - \left(\sum_{j=1}^n \theta_j - \sum_{i \in L_1 \cup L_2} a_i \right) \cdot \theta_j / \sum_{j=1}^n \theta_j \\ &= \sum_{i \in L_1 \cup L_2} a_i \cdot \theta_j / \sum_{j=1}^n \theta_j = b_j(\theta) \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

このように、比例配分すると非線形なパラメトリック輸送問題（特殊な非線形なので、線形問題に帰着できるが、既往のアルゴリズム⁽⁷⁾などでは解けない問題）を解く必要がある。問題 P_1 をLPなどで解くならば、制約(38)はそれほど複雑ではないが、この $(1-\alpha)$ の領域のために、演算時間を費やすのは、むだである。もし、この問題を正確に解くと、「すべての需要地において、需要を満たす解率は α 以上である(合

計で α 以上の確率で満たすのよりも強力な制約)」と説明できる。

フェイズ2（フェイズ1）の需要の限界である。

$$\sum_{j=1}^n \theta_j = \sum_{i \in L_1 \cup L_2} a_i$$

となったときの輸送方法 x で残りの確率 $(1-\alpha)$ 未満で起こる領域（供給不足の領域）における輸送方法とする。

フェイズ3でも、既往のアルゴリズム⁽⁷⁾を使わなければ、 P_2 の目的関数だけは簡単に計算できるが、 θ の関数となる変数 x が求まらない。

n パラメータの場合は近似を行うので、(38)式は簡単に考慮できる。

問題 P_2 の目的関数値を求めるためには、需要量に n パラメータあるパラメトリック輸送問題を解かなければならない。

多次元のパラメータをもつパラメトリック問題の解は、多くの端点で構成されることが多く、厳密解を実用的な時間内に求めるのは困難であり、ばらつきを仮定する元問題の性質から厳密解を求める必要性もない。このため、需要量間に強い相関が存在し、需要量が1パラメータで表現できる以外は、問題 P_2 の目的関数の近似値を計算することにより、元問題を高速に実用的な時間内に解くことを考える。1パラメータ、複数パラメータの場合に分けて、解法アルゴリズムを述べる。

〈3・2〉 需要量が1パラメータで表現できる場合の下界値計算 需要量のばらつきは、各需要地において相関をもつ場合が多い。ここでは、需要のばらつきが、ほとんど1パラメータで説明できる場合、つまり $\theta_1, \dots, \theta_n$ の相関が高く、1パラメータで近似できる場合を考え、定数 ρ_j, τ_j 、パラメータ χ を用いて $\theta_j = \rho_j \chi + \tau_j (j=1, \dots, n+1)$ と表現できるとすると、解かなければならない問題は、 P_3 のようになる。

問題 P_3 ：

$$z(\chi) = \min \sum_{i \in L_1 \cup L_2} \sum_{j=1}^{n+1} c'_{ij} x_{ij} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \leq a_i \quad (i \in L_1 \cup L_2) \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$\sum_{i \in L_1 \cup L_2} x_{ij} \geq \rho_j \chi + \tau_j \quad (j=1, \dots, n+1) \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$x_{ij} \geq 0 (i \in L_1 \cup L_2; j=1, \dots, n+1) \quad \dots\dots\dots (42)$$

ここで、問題 P_0 の定義、(34)より、 θ の範囲、 θ と χ の関係式より、次の関係が成立する。

$$0 \leq \chi \leq 1$$

$$\min(\tau_j, \rho_j + \tau_j) = r_j,$$

$$\max(\tau_j, \rho_j + \tau_j) = s_j \quad (j=1, \dots, n)$$

$$\rho_{n+1} = -\sum_{j=1}^n \rho_j, \tau_{n+1} = S(\alpha) - \sum_{j=1}^n \tau_j$$

問題 P_3 は、パラメトリック輸送問題の解法アルゴリズムで解くことができる。

〈3・3〉 複数パラメータの場合の下界値計算

前述のように、需要量が複数パラメータで変化する場合、問題 P_2 を厳密に解くのは、困難である。定式化は、現実問題を表現できるように工夫されているため、現実規模の問題の近似解でも求めることが切望される。このため、問題 P_2 の近似解を求めることを考える。

需要地が n 個存在し、需要量パラメータが n 個存在しても、実際は n パラメータではなく、より少ないパラメータで表現（または、近似）できる場合が多い。このため、演算時間の高速化のため、 n 個の需要量は、 n' 個 ($n \geq n'$) のパラメータで近似できるとしておく。この n' 個の変数決定は、多変量統計解析の主成分分析の考え方をを用いて求めることができるが、問題のモデル化のとき問題 P_3 のように定式化することが望ましい。一般には、 n' は、多くて3ぐらいだと思われる。

定数 n', ρ_{jk}, τ_{jk} を用いて $\theta_j = \sum_{k=1}^{n'} \rho_{jk} \theta'_k + \tau_{jk}$ ($j=1, \dots, n+1$) と表現できるとすると問題 P_2 は次の問題を解き、重積分を計算することにより求めることができる。

問題 P_4 :

$$z(\theta') = \min_x \sum_{i \in L_1 U L_2} \sum_{j=1}^n c'_{ij} x_{ij} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} \leq a_i \quad (i \in L_1 U L_2) \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$\sum_{i \in L_1 U L_2} x_{ij} \geq \sum_{k=1}^{n'} \rho_{jk} \theta'_k + \tau_{jk} \quad (j=1, \dots, n+1) \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i \in L_1 U L_2; j=1, \dots, n+1) \quad \dots\dots\dots (46)$$

問題 P_4 の目的関数値は、 $n'+1$ 次元空間で考えることができる。 θ' の空間の点 w^n 個を用いた凸多面体で P_4 のパラメトリックな解を近似する。この状態を図で表現したのが、図1、図2である。説明のため、 $w=5, n'=1$ としているが、この近似は、一般に $n' \geq 2$ のための近似アルゴリズムである。

明らかに、計算方式1は、目的関数 $z(\theta')$ よりも大きくなる性質をもつ。 $z(\theta')$ の近似としては、計算方式1のほうが良いと思われるが、ここで求めるべき値は、(29)式の積分値であるので、計算方式1、計算方式2の優劣は明白ではない。1パラメータの場合の図1、図2のように、どちらの計算量もあり変わらない

図1 計算方式1
Fig. 1. Numerical Method 1.

図2 計算方式2
Fig. 2. Numerical Method 2.

いが、2パラメータ以上になると、計算方式1のほうは、重積分を各 θ' 軸に平行な方向だけで積分できない。 $(n'=1$ の場合、積分領域は、線分だが、 $n'=2$ の場合は、多角形となるため、計算が複雑になる)。

ここで生成される輸送問題は、再最適化によって解くことができる。数値実験では、アウトオブキルアルゴリズムを輸送問題用に調整したアルゴリズムによって解いている。

以上のことから、計算方式1をむりに使う理由もない。このため、計算方式2で n' 次のパラメトリック問題 P_4 の目的関数 $z(\theta')$ を近似する。

本アルゴリズムを適用した演算時間は、不定積分か、数値積分の選択によって大きく影響を受ける。この点においても計算方式2が有利である。

〈3・4〉 下界値の強化と分枝方法 問題 P_0 の需要制約(9)式をラグランジュ緩和し、総費用制限関数 T を無視し、次のような問題を考える。総費用制限

関数 T をペナルティ計算に用いたほうが良いが、困難な問題となる。

しかし、ここでは、前節で考慮できなかった需要量パラメータ θ に依存しない施設の整数条件付きの一つの建設計画 y を求めることができる。前節の y が θ の関数になることによって、どのくらい下界値が悪化するかを評価するのは難しいが、本節で考える問題では、この点において、下界値を強化できる可能性を十分含んでいる。

問題 P_5 :

$$\min_y \int_D \left\{ \min_x \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i + \sum_{j=1}^n s_j(\theta) (b_j(\theta) - \sum_{i=1}^m x_{ij}) \right\} F(\theta) \times d\theta_1 \cdots d\theta_n \quad (47)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i y_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (48)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i y_i \geq S(\alpha) \quad (49)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq b_j(\theta) \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n) \quad (50)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad (i=1, \dots, m) \quad (51)$$

(50)式は、(9)式から導かれる実行可能解の必要条件である。

$s_j(\theta)$ を(9)式に対する双対変数とおく。ここで、 $s_j(\theta)$ は、明記しているように、 θ の関数であることに注意が必要であり、また、 $b_j(\theta)$ は、(11)、(12)式より y の関数でもある。

x_{ij} と y_i を独立に処理できるように変形する。まず、(50)式を次のように緩和する。

$$0 \leq x_{ij} \leq \theta_j$$

次に、(47)式を変形する。

$$\min_y \int_D \left\{ \min_x \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - s_j(\theta)) x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i + \sum_{j=1}^n s_j(\theta) b_j(\theta) \right\} F(\theta) d\theta_1 \cdots d\theta_n \quad (52)$$

ここで、第1項に注目し、

$$\nu_i(\theta) = \min_x \left\{ \sum_{j=1}^n (c_{ij} - s_j(\theta)) x_{ij} \mid \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, 0 \leq x_{ij} \leq \theta_j \right\} \quad (53)$$

とする。この θ の関数 $\nu_i(\theta)$ は、次のようにして求めることができる。

まず、ラグランジュ乗数 $s_j(\theta)$ は、双対変数の性質から次のように考えることができる。

$$s_j(\theta) = \psi_{jp} \quad (\theta \in \Psi_p; p=1, \dots, P) \quad (54)$$

また、次の式が成立する。

$$\Psi_1 \cup \cdots \cup \Psi_P = D$$

領域 Ψ_p を考え、 $c_{ij}(\theta) = c_{ij} - \psi_{jp}$ とおき、 $\bar{c}_{ij}, j=1, \dots, n$ を小さい順に並び換え、

$$\bar{c}_{ij_1} \leq \cdots \leq \bar{c}_{ij_q} \leq 0 < \bar{c}_{ij_{q+1}} \leq \cdots \leq \bar{c}_{ij_n} \quad (55)$$

とし、この問題の最適解 $\bar{x}_{ij}, j=1, \dots, n$ を考える。 $(j_1 \sim j_n)$ は新しく付けなおした添え字で、 $\bar{c}_{ij}$ はじめて0を超えるときの添え字を j_{q+1} とする) ここで、

$$\Omega_{pt} = \left\{ \theta \mid \sum_{g=1}^{t-1} \theta_{j_g} \leq a_i < \sum_{g=1}^t \theta_{j_g} \right\} \quad (56)$$

$$\Omega_{p,n+1} = \left\{ \theta \mid \sum_{g=1}^n \theta_{j_g} \leq a_i \right\} \quad (57)$$

で定義される領域 $\Omega_{pt} (t=1, \dots, n+1)$ を考える。

また、目的関数の最小化を考えると x_{ij} は非負より、 $\bar{c}_{ij} \leq 0$ のときは、できるだけ x_{ij} を増やし、 $\bar{c}_{ij} > 0$ のときは x_{ij} を0にすればよい。すなわち、 $t \leq q$ のとき、

$$\bar{x}_{ij_g} = \begin{cases} \theta_{j_g} & (g=1, \dots, t-1) \\ a_i - \sum_{g=1}^{t-1} \theta_{j_g} & (g=t) \\ 0 & (g=t+1, \dots, n) \end{cases} \quad (58)$$

一方、 $t > q$ のとき、

$$\bar{x}_{ij_g} = \begin{cases} \theta_{j_g} & (g=1, \dots, q) \\ 0 & (g=q+1, \dots, n) \end{cases} \quad (59)$$

$$\nu_i(\theta) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij}(\theta) \bar{x}_{ij}(\theta) \quad (\theta \in \Omega_{pt}; p=1, \dots, P; t=1, \dots, n+1) \quad (60)$$

と計算できる。

この $\nu_i(\theta)$ を用いると、 y_i だけの問題 P_6 が得られる。

問題 P_6 :

$$\min_y \sum_{i=1}^m \left\{ \int_D (\nu_i(\theta) + f_i) F(\theta) \times d\theta_1 \cdots d\theta_n \right\} y_i + \int_D \left\{ \sum_{j=1}^n s_j(\theta) b_j(\theta) \times F(\theta) \right\} d\theta_1 \cdots d\theta_n \quad (61)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m a_i y_i \geq S(\alpha) \quad y_i \in \{0, 1\} \quad (i=1, \dots, m) \quad (62)$$

目的関数の第1項の y_i の係数は、定数であり、 ξ_i とする。第2項は、次式が成立するため問題 P_6 の下界値を計算できる。

$$\int_D \left\{ \sum_{j=1}^n s_j(\theta) b_j(\theta) F(\theta) \right\} d\theta_1 \cdots d\theta_n \\ \geq \int_{D'} \left\{ \sum_{j=1}^n s_j(\theta) \theta_j F(\theta) \right\} d\theta_1 \cdots d\theta_n \quad \dots\dots\dots (63)$$

$$D'' = \left\{ \theta \mid \theta \in D, \sum_{j=1}^n \theta_j \leq S(\alpha) \right\} \quad \dots\dots\dots (64)$$

以上より、問題 P_3 は、次の問題 P_7 を解くことに帰着できる。

問題 P_7 :

$$\min_y \sum_{i=1}^m \xi_i y_i \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i=1}^m a_i y_i \geq S(\alpha) \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad (i=1, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (67)$$

(66)式の制約をラグランジュ緩和した問題の上界値は、簡単に得ることができる。このため、ナップサック問題 P_7 を厳密に解かず問題の下界値を得る方法も考えられる。

$$z(\lambda, y) = \sum_{i=1}^m \xi_i y_i + \lambda \left(S(\alpha) - \sum_{i=1}^m a_i y_i \right) \quad \dots\dots\dots (68)$$

として $\max_{\lambda \geq 0} \min_y z(\lambda, y)$ を考えればよい。

問題 P_7 を解くことにより得た下界値で見切ることができなければ、分枝する必要がある。

問題 P_7 において ξ_i が求まれば、非常に簡単な問題である。これを使って分枝変数の選択、分枝の方向を決定する。分枝によってまだ固定されていない変数の中で、0 または 1 へ固定した下界値の差が最も大きい変数を分枝変数とする。

〈3・5〉 不確定需要を考慮した施設配置問題の解法アルゴリズム 本章で述べた部分問題を用い、分枝限定法に基づくアルゴリズムを提案する。ここで、CP (Current Problem) は、分枝限定木上の処理対象のノードにおける問題である。

アルゴリズム A :

- step 1: 暫定値 $z^* = \infty$, 分枝候補リストを初期化し, CP を未分枝状態の問題とし, CP の下界値 = 0 とする。
- step 2: $S(\alpha)$ を計算する。
- step 3: CP の下界値が暫定値以上ならば step 12 へ。
- step 4: 連続緩和問題 P_2 を解いて下界値を強化する。
- step 5: CP の下界値が暫定値以上ならば step 12 へ。

step 6: step 4 の解が整数解ならば、暫定値を更新し, step 12 へ。

step 7: ラグランジュ緩和問題により下界値の強化を行う。

step 7.1: 元問題の需要に関する制約条件に対して、ラグランジュ緩和し、問題 P_3 を作成する。

step 7.2: step 4 の双対変数を問題 P_3 のラグランジュ乗数とする。

step 7.3: (65)式の ξ を求める。

step 7.4: 問題 P_6 を解き、強化した下界値を得る。

step 8: CP の下界値が暫定値以上ならば step 12 へ。

step 9: 固定されていない変数がなければ, step 12 へ。

step 10: 問題 P_2 の解で、小数である変数の中から 0 および 1 への固定の下界値の差が最も大きい変数を選択し、その変数の 0 および 1 への固定で得られる下界値が大きい順に分枝候補リストに入れる。また、この下界値計算によって、得られる下界値を発生した二つの分枝ノードの下界値とする。

各変数の 0 および 1 の下界値計算中に、0 への固定により実行不可能になる変数は 1 に固定する。

また、ある変数において、0, 1 への固定において小さい下界値が暫定値を超えるならば CP を見切り, step 12 へ。

step 11: 分枝候補リスト = ϕ ならば, アルゴリズム終了。最適値 z^* 。

step 12: 分枝候補リストの中から LIFO ルールで CP を選択する。

step 13: step 3 へ。

4. 需要の確率密度関数

本章では、需要の確率密度関数について少し触れる。

本論文では、需要の分布を仮定し、確率密度関数を与えなければならない。現実問題において、需要の分布は、両側有界の分布関数であり、一般によく用いられる正規分布は適用できない。両側が有界で、いろいろな形を仮定できる分布にベータ分布がある。1 パラメータのベータ分布の確率密度関数は、次のようになる。

$$F(\theta) = \frac{\theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1}}{B(p, q)} \quad \dots\dots\dots (69)$$

本論文で提案するアルゴリズムを数値積分なしで解くためには、1パラメータの場合、確率密度関数 $F(\theta)$, $\theta F(\theta)$ の不定積分が簡単に求まる関数であれば、解くのに非常に楽である。アルゴリズムの途中で、用いる数値積分の計算時間は、全体の演算速度に非常に関係するものと考えられる。

(69)式で与えられるベータ分布も、一般の p, q に対しては不定積分が求まらず、不完全ベータ関数比 $I_0(p, q)$ を必要とする $[I_0(p+1, q)$ など] が必要。

複数パラメータの場合、問題 P_3 の θ' に対する確率密度関数 $F(\theta')$ が必要である。パラメータ θ' 間にはほとんど相関がないと考えと確率密度関数は、次のようになる。

$$F(\theta') = \frac{\theta_1^{p_1-1}(1-\theta_1)^{q_1-1} \cdots \theta_n^{p_n-1}(1-\theta_n)^{q_n-1}}{B(p_1, q_1) \cdots B(p_n, q_n)} \quad (70)$$

5. 数値実験

本章では、本論文で提案した解法アルゴリズムの有効性を示すために行った数値実験の結果を示す。

プログラム言語は、Fortran 77 であり、数値実験に用いたコンピュータは SONY の NEWS 3860 である。

問題は、次の条件で作成した。

- (1) 建設候補地数は、5, 10, 15 の3種類。
- (2) 需要地数は、10, 20 の2種類。
- (3) 需要量の分布を表す確率変数の数 $n'=2, 3$ 。

表1 数値実験結果 (10問の平均)
Table 1. Computational results (average for ten problems).

No. of Random Variables	No. of Facilities	No. of Customers	CPU Time (s)	No. of Nodes	No. Problem P_2 Solved	No. Problem P_6 Solved
2	5	10	1.2	28.2	2,227.5	28.9
		20	3.8	29.1	2,465.1	30.5
	10	10	1.5	19.8	1,960.2	64.8
		20	4.0	34.6	2,356.2	153.2
	15	10	2.2	23.7	2,293.5	82.3
		20	9.6	43.5	4,306.5	245.9
3	5	10	3.9	9.3	6,593.4	22.1
		20	10.9	9.5	6,893.1	28.1
	10	10	6.4	9.3	8,591.4	38.0
		20	23.9	20.2	13,986.0	103.9
	15	10	23.5	29.6	26,862.0	121.3
		20	147.3	73.7	69,530.4	442.3

(4) 総需要を満たす確率 $\alpha=0.95$ 。

(5) 重積分の計算点数=10。

(6) 供給量、需要量の割合は、約半分の建設候補地に施設が建設されるようにランダムに作成。

(7) 建設固定費、輸送費の関係は、最適解において、建設固定費の占める割合が約30%になるようにランダムに作成。

(8) 輸送費 c_{ij} は、建設候補地と需要地を2次元平面上にランダムにプロットし、現実問題を表現できるように、三角不等式を満たす。

表1に以上の条件で行った数値実験の結果を示す。演算時間、分枝回数、下界値計算のための問題 P_2 を解くために用いた輸送問題を解いた回数、下界値強化、分枝変数選択問題 P_3 の回数の10問平均を示す。

需要量の分布を表す確率変数の個数は2および3である。本数値実験では、計算方式2を用いているため、輸送問題を解く回数が多くなっているが、再最適化の手法を用いているため、高速に解かれている。

問題の規模が大きくなれば、演算時間がかかる傾向があるが、問題構造にも大きく影響される。これは、分枝限定法の性質を受けたものであり、本実験から、本アルゴリズムの演算時間が、問題規模だけでなく、問題構造に影響されることがわかる。

6. 終りに

本論文では、より現実的な問題を解くために、需要量に分布を仮定した施設配置問題のモデル化を行った。本問題は、混合整数計画問題に確率変数が含まれる複雑な問題である。しかし、本問題から導かれる解は、パラメトリック施設配置問題⁽⁷⁾の解よりも非常に有用な情報が得られる。これは、パラメトリック施設配置問題では、パラメータの領域別に建設方法が求められるため、需要量の不確実性を考慮できないからである。

本アルゴリズムの特徴は、下界値の強化部分にあり、ナップザック問題に帰着して解く部分にあると考えている。この強化がパラメータ全領域で整数変数を固定するという条件を考慮している。

提案したアルゴリズムでは、既往の研究にみられるような問題の縮小(釘付けテスト)などについては、触れていない。不確定需要を考慮した施設配置問題に対して、このような研究が望まれる。

(平成2年7月9日受付)

文 献

- (1) N. Christofides & J. E. Beasley: "Extensions to a Lagrangian Relaxation Approach For The Capacitated Warehouse Location Problem", *European J. Operational Res.*, **12**, 19 (1983)
- (2) Z. Drezner & G. O. Wesolowsky: "The Expected Value of Perfect Information in Facility Location", *Operations Research*, **28**, 395 (1980)
- (3) 今野・鈴木: 「整数計画法と組合せ最適化」, OR ライブラリー, 第7巻 (昭62) 日科技連
- (4) R. M. Nauss: "Parametric Integer Programing (1979), University of Missouri Press
- (5) F. Rado: "The Euclidean Multifacility Location Problem", *Operations Research*, **36**, 485 (1988)
- (6) 桧垣・本多・西田: 「多重選択制約付き施設配置問題とその解法」, 日本オペレーションズリサーチ学会1989年度春期研究発表会予稿集
- (7) 大竹・西田: 「パラメトリック施設配置問題の一解法」, 計測自動制御学論, **21**, No. 8 (昭60)
- (8) 伊理・今野: 数理計画法の応用〜理論編 (昭57) 産業図書
- (9) J. V. Jucker & R. C. Carlson: "The Simple Plant-Location Problem Under Uncertainty", *Operations Research*, **24**, 1045 (1976)
- (10) R. Hassin & E. Zemel: "Probabilistic Analysis of The Capacitated Transportation Problem", *Mathematics Operations Research*, **13**, 80 (1988)
- (11) J. E. Hodder: "Financial Market Approaches To Facility Location Under Uncertainty", *Operations Research*, **32**, 1374 (1984)

西 田 直 矩 (正員)

昭和18年10月12日生。47年, 東京工業大学大学院博士課程修了。現在, 東京理科大学工学部経営工学科教授。この間, 50年アメリカ Auburn 大学, 51年 Carnegie-Mellon 大学客員準教授。システム制御工学の研究に従事 (工学博士)。

桧 垣 正 浩 (非会員)

昭和39年2月19日生。昭和63年, 東京理科大学大学院修士課程工学研究科経営工学専攻修了。現在, 同大学院博士課程に在籍。現実問題に存在する施設配置問題, 配送路決定問題などを中心とする最適化理論を研究中。

馬 淵 透 (非会員)

昭和39年10月22日生。平成元年, 東京理科大学大学院修士課程工学研究科経営工学専攻修了。現在, 四国日本ソフトウェア(株)勤務。