H_∞ 相補感度問題の極指定について

正員 大内 茂 人 (千葉大)

正員 有 満 稔 (千葉大)

正員 美 多 勉 (千葉大)

On Pole Assignment in H_∞ Robust Control Systems

Shigeto Ohuchi, Member, Minoru Arimitu, Member, Tsutomu Mita, Member (Chiba University)

H_∞ control theory has been vigorously studied until now. However, relations between the free parameters and pole placement are not clear. In this paper, we discuss the method that shifts only the specified poles in robust control problem, in which the H_∞ norm of the complementary sensitivity function is minimized by state feedback control. As a result, it is shown that it is possible to shift the specified poles to the desired regions and especially to shift asymptotically poles less than input number to $-\infty$.

キーワード： H_∞ 状態フィードバック制御，極配置，ロバスト制御

1. はじめに

近年， H_∞ 制御が精力的に研究されているが， H_∞ 制御では時間応答をどのように改善したらよいのかについて明確な指針がない。相補感度関数 $T(s)$ の H_∞ ノルムを与えられた値 r 以下にする意味でのロバスト制御についていえば，極指定をしながら $\|T\|_\infty \leq r$ とする制御の実現がまず考えられる。また，例えば， H_∞ 制御ではロバスト制御を行い， H_2 制御（LQ 制御）で応答の改善を行うといった方法も考えられる⁽¹⁾。しかし，その場合でも H_∞ 制御系が H_2 制御に対してオブザーバとして働き， H_∞ 制御系の極がオブザーバの極になってしまうといった問題があった⁽¹⁾。よって，この場合にも相補感度関数の極を指定することが考えられる。

相補感度関数の極配置については著者らの一人が行った研究があるが，極指定までには至っていない⁽²⁾。

そこで本論文では，その手始めとして，周波数重みを考慮しない状態フィードバック制御系の相補感度関数 $T(s)$ を取上げ， $\|T(s)\|_\infty \leq r$ ($r > 0$) を満たしながら閉ループ系の極指定を行うことを考えた。

方法として示村らの方法⁽³⁾を変形して採用したと

ころ，入力数を超えない個数の極が $-\infty$ の方向へ漸近的に移動できること，またある条件のもとではそれ以上の個数の極が移動できることが理論的に示され，ターボエンジンの数値題でもその効用が確かめられた⁽¹⁰⁾。

2. H_∞ ロバスト状態フィードバック

本章では，極指定問題を考える前に H_∞ ノルム条件を満足させる条件について考える。

制御対象は周波数重みを考えない

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \dots\dots\dots (1a)$$

であり，状態は直接測定可能と仮定する。ただし， $A(n \times n)$, $B(n \times r)$ とし， (A, B) は可制御とする。

この系を，状態フィードバック

$$u = -Fx \quad \dots\dots\dots (1b)$$

で安定化し，以下のような入力端相補感度関数

$$T(s) = F(sI - A + BF)^{-1}B \quad \dots\dots\dots (2)$$

の H_∞ ノルムを r ($r > 0$) 以下，すなわち

$$\|r^{-1}T(s)\|_\infty \leq 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

とする問題を考える。

〈補題 1〉⁽⁴⁾ (A, B) が可制御で， A は安定とす

る。このとき、 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ において
 $\|G(s)\|_{\infty} \leq 1$ であるための必要十分条件は

$$PA+A^TP=-C^TC-L^TL \quad (4a)$$

$$B^TP+W^TL=-D^TC \quad (4b)$$

$$I_r-D^TD=W^TW \quad (4c)$$

を満たす $P \geq 0$ と適当な L, W が存在することである。 ■

(3)式が満たされるためには、〈補題1〉から $A_c=A-BF$ が安定でかつ

$$PA_c+A_c^TP=-r^{-2}F^TF-L^TL \quad (5a)$$

$$B^TP+W^TL=0 \quad (5b)$$

$$I_r-W^TW=0 \quad (5c)$$

を満たす $P \geq 0$ と適当な L, W が存在すればよいことになる。 $P \geq 0$ が存在するとすれば(5b), (5c)式から W と L の一般解は次のように書ける⁽⁵⁾。

$$W=(I_r, 0)^T \quad (6)$$

$$L=(-PB, H^T)^T \quad (7)$$

H : 任意行列

これらを(5a)式へ代入して次式を得る。

$$PA+A^TP-PBF-F^TB^TP \\ +r^{-2}F^TF+PBB^TP+H^TH=0 \quad (8)$$

ここで、 $X=r^{-1}F-rB^TP$ とおけば上式は次式のようになりまとめられる。

$$PA+A^TP+(1-r^2)PBB^TP \\ +H^TH+X^TX=0 \quad (9)$$

よって、(9)式の解 $P \geq 0$ から(3)式を達成するフィードバックゲイン F の一般解は次のようになる。

$$F=r^2B^TP+ rX \quad (10)$$

また、この逆も明らかに正しい。以上をまとめておく。

〈命題1〉⁽⁹⁾ $\|T\|_{\infty} \leq r$ であるための必要十分条件は、

$$PA+A^TP+(1-r^2)PBB^TP \\ +H^TH+X^TX=0 \quad (11a)$$

$$F=r^2B^TP+ rX \quad (11b)$$

$$A-BF: \text{安定} \quad (11c)$$

を満たす $P \geq 0$ と適当な X, H が存在することである。 ■

以下、本論文では行列 X は $X=0$ とし、 $H^TH=Q$ とおいた次の系で極指定を考える。

〈系1〉 $\|T\|_{\infty} \leq r$ となるためには、適当な半正定行列 Q に対し

$$PA+A^TP+(1-r^2)PBB^TP+Q=0 \\ \dots\dots\dots (12a)$$

$$F=r^2B^TP \quad (12b)$$

$$A-BF=A-r^2BB^TP: \text{安定} \quad (12c)$$

を満たす $P \geq 0$ が存在すればよい。 ■

3. 指定極のみを移動させる F の決定法

以下で示村らの方法⁽³⁾を拡張して利用し、 $T(s)$ の漸近的極指定を行う。簡単のため A の固有値は重複せず実数であるとする。また、 k 個の固有値 $\lambda_1 \sim \lambda_k$ を移動(設定)したい固有値とし、 A を次のように対角化しておく。

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (13a)$$

ただし、

$$\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad (13b)$$

$$\Lambda_2 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{n-k}) \quad (13c)$$

であり、 $L_1(k \times n)$, $L_2(n-k \times n)$ は各固有値に対する左側固有基底とする。また次の条件が成立すると仮定する。

$$\text{rank } L_1 B = k \quad (14)$$

従って、 $r \geq k$ でなくてはならない。

〈3・1〉 $r < 1$ の場合 この場合、 A は安定でなければ〈系1〉を満たす P は存在しないことが証明できる⁽⁵⁾。よって A は安定とする。まず、負の実数 $h(h < 0)$ を次のようにとる。

$$h > \max(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad (15)$$

$\Lambda_1 - hI_k$ は安定だから任意の正定行列 $Q_0 > 0$ に対し次のリアプノフ方程式は唯一の正定解 P_0 をもつ。

$$P_0(\Lambda_1 - hI_k) + (\Lambda_1 - hI_k)^T P_0 = -Q_0 \quad (16)$$

更に、非負実数 m を次のように選ぶ。

$$0 < m \leq \frac{-2h}{(1-r^2)\lambda \max\{P_0^{1/2} L_1 B B^T L_1^T P_0^{1/2}\}} \\ \dots\dots\dots (17)$$

以上から、〈系1〉を満たす P と $A-r^2BB^TP$ について、以下の〈命題2〉を得る。

〈命題2〉 $r < 1$ とし、 m として(17)式を満たすものをとる。このとき、

$$P = mL_1^T P_0 L_1 \geq 0 \quad (18)$$

は、

$$PA+A^TP+(1-r^2)PBB^TP+Q=0 \\ \dots\dots\dots (19a)$$

ただし、

$$Q = mL_1^T Q_0 L_1 - 2hP - (1-r^2)PBB^TP \geq 0 \\ \dots\dots\dots (19b)$$

の解であり、更に $A-r^2BB^TP$ はすべての m に対して安定であり、次式が成り立つ。

$$\lambda\{A - r^2 BB^T P\} = \lambda\{A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\} \dots (20)$$

よって、(18)式の P は〈系 1〉の条件を満たし、 $\|T(s)\|_\infty \leq r$ が保証される。ただし、 $\lambda\{\cdot\}$ は行列の固有値を表すものとする。

(証明) (16)式の左から L_1^T 、右から L_1 を乗じ両辺を m 倍し、(13)式を使えば $P = mL_1^T P_0 L_1$ において次式を得る。

$$PA + A^T P + (mL_1^T Q_0 L_1 - 2hP) = 0 \dots (21)$$

これに $(1-r^2)PBB^T P$ を足して引けば、(19)式を得る。次に(19b)式で $Q \geq 0$ となることを示そう。

$$\begin{aligned} Q &= mL_1^T Q_0 L_1 - 2mhL_1^T P_0 L_1 \\ &\quad - m^2(1-r^2)L_1^T P_0 L_1 BB^T L_1^T P_0 L_1 \\ &= mL_1^T \{Q_0 - P_0^{1/2}[2hI \\ &\quad + m(1-r^2)P_0^{1/2}L_1 BB^T L_1^T P_0^{1/2}]P_0^{1/2}\}L_1 \end{aligned} \dots (22)$$

ここで、(17)式から

$$2h + m(1-r^2)\lambda \max\{P_0^{1/2}L_1 BB^T L_1^T P_0^{1/2}\} \leq 0 \dots (23)$$

よって、

$$\lambda\{2hl + m(1-r^2)P_0^{1/2}L_1 BB^T L_1^T P_0^{1/2}\} \leq 0 \dots (24)$$

となり、 $Q \geq 0$ となる。

次に、

$$\begin{aligned} A - r^2 BB^T P &= A - mr^2 BB^T L_1^T P_0 L_1 \\ &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \\ &\quad - [mr^2 BB^T L_1^T P_0 \quad 0] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0 & 0 \\ -mr^2 L_2 BB^T L_1^T P_0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \dots (25)$$

が成り立つので、(20)式は明らかである。

$A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0$ が(17)式の不等式を満たすすべての m で安定であることを証明するため次式を計算してみる。

$$\begin{aligned} P_0(A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0) \\ + (A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0)^T P_0 \\ = P_0 A_1 + A_1^T P_0 - 2mr^2 P_0 L_1 BB^T L_1^T P_0 \end{aligned} \dots (26)$$

更に(16)式より、右辺は

$$\begin{aligned} = -Q_0 + 2hP_0 + m(1-r^2)P_0 L_1 BB^T L_1^T P_0 \\ - m(1+r^2)P_0 L_1 BB^T L_1^T P_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = -\{Q_0 + P_0^{1/2}[-2hI - m\{1 \\ - r^2\}P_0^{1/2}L_1 BB^T L_1^T P_0^{1/2}]P_0^{1/2} \\ - m(1+r^2)P_0 L_1 BB^T L_1^T P_0\} \dots (27) \end{aligned}$$

となる。 $Q_0 > 0$ と、(17)式から

$$-2hI - m(1-r^2)P_0^{1/2}L_1 BB^T L_1^T P_0^{1/2} \geq 0 \dots (28)$$

が成立している。よって、(27)式は負定行列であり、 $A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0$ は(17)式を満たすすべての m で安定である。■

〈命題 2〉においては、 k 個の $A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0$ の固有値のみが、 m あるいは、 r に従って変化することがわかる。 $r \rightarrow 0$ とすれば、 $A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0 \rightarrow A_1$ となり、これらの $r \rightarrow 0$ のときの固有値は開ループ極と同じとなる。一方、(17)式から $r \rightarrow 1$ とすれば m はいくらでも大きな値をとることが可能であり、これらの固有値は $-\infty$ の実極に漸近する。

[定理 1]

$$\lambda\{P_0^{1/2}L_1 BB^T L_1^T P_0^{1/2}\} = \{a_1, \dots, a_k\} : a_i > 0 \dots (29)$$

とおく。 $r \rightarrow 1$ の場合、 $m \rightarrow \infty$ とおくと閉ループ極は次のようにできる。

$$\lambda\{A - r^2 BB^T P\} = \{-ma_1, \dots, -ma_k\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\} \dots (30)$$

(証明) $A_1 \triangleq A_1 - mr^2 L_1 BB^T L_1^T P_0 (k \times k)$ において、 $B_1 = r^2 L_1 BB^T L_1^T (k \times k)$ 、 $F_1 = P_0 (k \times k)$ とおく。明らかに $F_1 B_1 = r^2 P_0 L_1 BB^T L_1^T$ は正則で最大ランクをもつ。一方、 $B_1 F_1 = r^2 L_1 BB^T L_1^T P_0$ の固有値は、

$$\begin{aligned} r^2 \lambda\{L_1 BB^T L_1^T P_0\} \\ = r^2 \lambda\{P_0^{1/2}L_1 BB^T L_1^T P_0^{1/2}\} \\ = r^2 \{a_1, \dots, a_k\} \dots (31) \end{aligned}$$

となり、かつ明らかに系 $\{F_1, A_1, B_1\}$ には不変零点がないので、付録 1 の〈補題付 1〉から、 A_1 の固有値は、 $m \rightarrow \infty$ のとき $\{-mr^2 a_1, \dots, -mr^2 a_k\}$ に漸近する。 $r \rightarrow 1$ なので(30)式を得る。■

〈3・2〉 $r=1$ の場合 このとき A を安定と仮定すれば、 A_1 は安定だから任意の正定行列 Q_0 に対し次のリアプノフ方程式は唯一の正定解 P をもつ。

$$P_0 A_1 + A_1^T P_0 = -Q_0 \dots (32)$$

また、任意の非負実数 m に対し

$$P = mL_1^T P_0 L_1 \dots (33)$$

は次のリアプノフ方程式の半正定解となる。

$$PA + A^T P = -mL_1^T Q_0 L_1 \dots (34)$$

この P を〈系 1〉の P として用いて $F = B^T P$ とすると、任意の m について〈系 1〉が満たされ、閉ループ

極についても〔定理1〕の証明と同様にして次の定理が成立する。

〔定理2〕 $r=1$ の場合、(34)式の P と $F=B^TP$ によって作られる閉ループ系の固有値は、任意の m に対して

$$\lambda\{A-BB^TP\}=\lambda\{A_1-mL_1BB^TL_1^TP_0\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\} \dots (35)$$

を満たし、 $m \rightarrow \infty$ としたときの閉ループ極は次のようになる。

$$\lambda\{A-BB^TP\}=\{-ma_1, \dots, -ma_k\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\} \dots (36a)$$

ただし、

$$\lambda\{P_0^{1/2}L_1BB^TL_1^TP_0^{1/2}\} = \{a_1, \dots, a_k\}: a_i > 0 \dots (36b) \blacksquare$$

この場合には、 m に制限がないため m はいくらでも大きくできることに注意したい。

〈3・3〉 $r>1$ の場合 このとき、 A の移動したい極は、不安定でもよい⁽⁶⁾。まず、非負の実数 h を次のようにとる。

$$h > \max(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \dots (37)$$

A_1-hL_k は安定だから、任意の正定行列 Q_0 に対し次のリアプノフ方程式は唯一の正定解 P_0 をもつ。

$$P_0(A_1-hL_k) + (A_1-hL_k)^TP_0 = -Q_0 \dots (38)$$

更に、非負実数 m を次のようにとる。

$$m \geq \frac{2h}{(r^2-1)\lambda \min\{P_0^{1/2}L_1BB^TL_1^TP_0^{1/2}\}} \dots (39)$$

以上のことから、次のことがいえる。

〔定理3〕 (39)式を満たす m について、

$$P = mL_1^TP_0L_1 \dots (40)$$

は、次のリッカチ方程式の解として〈系1〉を満たす。

$$PA + A^TP + (r^2-1)PBB^TP + Q = 0 \\ : Q = mL_1^TQ_0L_1 - 2hP \\ + (r^2-1)PBB^TP \geq 0 \dots (41)$$

また、閉ループ系の固有値は

$$\lambda\{A-r^2BB^TP\}=\lambda\{A_1-mr^2L_1BB^TL_1^TP_0\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\} \dots (42)$$

を満たし、 $m \rightarrow \infty$ で

$$\lambda\{A-r^2BB^TP\}=\{-mr^2a_1, \dots, -mr^2a_k\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k}\} \dots (43a)$$

ただし、

$$\lambda\{P_0^{1/2}L_1BB^TL_1^TP_0^{1/2}\}=\{a_1, \dots, a_k\} : a_i > 0 \dots (43b)$$

を満たす。

(証明) (41)式を導くことは容易だから、こ

こでは $Q \geq 0$ となることを示す。すると、

$$Q = mL_1^TQ_0L_1 - 2hmL_1^TP_0L_1 \\ + m^2(r^2-1)L_1^TP_0L_1BB^TL_1^TP_0L_1 \\ = mL_1^T\{Q_0 - P_0^{1/2}[2hI \\ - m(r^2-1)P_0^{1/2}L_1BB^TL_1^TP_0^{1/2}]P_0^{1/2}\}L_1 \dots (44)$$

と(39)式から、

$$2h - m(r^2-1)\lambda \min\{P_0^{1/2}L_1BB^TL_1^TP_0^{1/2}\} \leq 0 \dots (45)$$

となり、よって

$$2hl - m(r^2-1)P_0^{1/2}L_1BB^TL_1^TP_0^{1/2} \leq 0 \dots (46)$$

となり、 $Q \geq 0$ を得る。他は〔定理1〕の証明とほぼ同様なので省略する。 $\blacksquare$

$r=1$ の場合と同様に m には上方に制限がないことに注意する。

〈3・4〉 複素極の取扱い 開ループ極が実極の場合について述べたが、複素極の場合は次のようにすればよい。

すなわち、 A の固有値を、 $\alpha_1 \pm j\beta_1, \dots, \alpha_m \pm j\beta_m$ ($2m \leq r$) とし、各々に対する左固有ベクトルを、 $\eta_1 \pm j\xi_1, \dots, \eta_m \pm j\xi_m$ とする。このとき、 L_1 を

$$L_1 = [\eta_1^T \ \xi_1^T \ \dots \ \eta_m^T \ \xi_m^T] \dots (47)$$

および

$$\text{rank } L_1B = 2m \dots (48)$$

が満たされるように選ぶものとする。すると L_1 は次式を満たす。

$$L_1A = A_1L_1 \dots (49a)$$

ただし、

$$A_1 = \text{diag}(A_1^1, \dots, A_1^m) \in R^{2m \times 2m} \dots (49b)$$

$$A_1^i = \begin{bmatrix} \eta_i & -\xi_i \\ \xi_i & \eta_i \end{bmatrix} \dots (49c)$$

とする。このようにすれば、これまで述べた方法がそのまま使えることになる。一対の複素極は $2m \leq r$ の条件より、二入力でないで移動できないように思えるが、一入力でも係数 m を調節することで文献(3)同様に虚部を小さくすることが可能である。

4. 繰返し極指定法

最後に、スカラー係数 m がある程度小さい場合は、本方法を繰返し用いることで入力数以上の極について若干の移動が可能であることを簡単に示しておこう。

$r < 1$ の場合を考えてみよう。 A の固有値のうち移動したいものを $\lambda_1, \dots, \lambda_{k_1}, \theta_1, \dots, \theta_{k_2}$ ($k_1 \leq r, k_2 \leq r$) と

し、他を $\mu_1, \dots, \mu_{n-k_1-k_2}$ とする。この場合、 $r < 1$ の場合の方法を繰返し用いればよいが、ここでは、2 回繰返す場合のみ取上げる。

A を (14) 式に従って次のように対角化しておく。

$$\begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (50 \text{ a})$$

ただし、

$$\Lambda_{11} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k_1}) \quad \dots\dots\dots (50 \text{ b})$$

$$\Lambda_{12} = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_{k_2}, \mu_1, \dots, \mu_{n-k_1-k_2}) \quad \dots\dots\dots (50 \text{ c})$$

であり、 L_{11}, L_{12} は各固有値に対する左側固有基底とする。また次の条件も成立しているとする。

$$\text{rank } L_{11} B = k_1 \quad \dots\dots\dots (51)$$

そこで負の実数 h_1 を次のように選ぶ。

$$h_1 > \max(\lambda_1, \dots, \lambda_{k_1}) \quad \dots\dots\dots (52)$$

次のリアプノフ方程式の正定解 P_{10}

$$P_{10}(\Lambda_{11} - h_1 I) + (\Lambda_{11} - h_1 I)^T P_{10} = -Q_{10} \quad \dots\dots\dots (53)$$

を求め、次の非負の実数 m_1 を選ぶ。

$$0 < m_1 \leq \frac{-2h_1}{(1-r^2)\lambda \max\{P_{10}^{1/2} L_{11} B B^T L_{11}^T P_{10}^{1/2}\}} \quad \dots\dots\dots (54)$$

このとき $P_1 = m_1 L_{11} P_{10} L_{11}$ は次のリッカチ方程式を満足することになる。

$$P_1 A + A^T P_1 + (1-r^2) P_1 B B^T P_1 + \{m_1 L_{11}^T Q_{10} L_{11} - 2h_1 P_1 - (1-r^2) P_1 B B^T P_1\} = 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

〈系 1〉の P としてこの解 P_1 を用いた場合、閉ループ極は次のようになる。

$$\lambda\{A - r^2 B B^T P_1\} = \{\Lambda_{11} - m_1 r^2 L_{11} B B^T L_{11}^T P_{10}\} \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{k_2}, \mu_1, \dots, \mu_{n-k_1-k_2}\} \quad \dots\dots\dots (56)$$

次に、 $A - r^2 B B^T P_1$ の固有値のうち $\theta_1, \dots, \theta_{k_2}$ を移動する。そこで、 $A - r^2 B B^T P_1$ を同様に次のように対角化しておく。

$$\begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} (A - r^2 B B^T P_1) = \begin{bmatrix} \Lambda_{21} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (57 \text{ a})$$

ただし、

$$\Lambda_{21} = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_{k_2}) \quad \dots\dots\dots (57 \text{ b})$$

$$\Lambda_{22} = \text{diag}(\Lambda_{11}^*, \mu_1, \dots, \mu_{n-k_1-k_2})$$

である。ここで、 $\Lambda_{11}^* = \Lambda_{11} - m_1 r^2 L_{11} B B^T L_{11}^T P_{10}$ を対角化したものである。また、 L_{21} は固有値 $\theta_1 \sim \theta_{k_2}$

に対する左側固有基底であり、次の条件が成立しているとする。

$$\text{rank } L_{21} B = k_2 \quad \dots\dots\dots (58)$$

第一段目と同様に、以下の (59) 式から負の実数 h_2 を選び、 $Q_{20} > 0$ に対して (60) 式のリアプノフ方程式より正定解 P_{20} を求める。更に (62) 式の不等式を満たす非負実数 m_2 を決める。

$$h_2 > \max(\theta_1, \dots, \theta_{k_2}) \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$P_{20}(\Lambda_{21} - h_2 I) + (\Lambda_{21} - h_2 I)^T P_{20} = -Q_{20} \quad \dots\dots\dots (60)$$

$$0 < m_2$$

$$\leq \frac{-2h_2}{(1-r^2)\lambda \max\{P_{20}^{1/2} L_{21} B B^T L_{21}^T P_{20}^{1/2}\}} \quad \dots\dots\dots (61)$$

このとき、 $P_2 = m_2 L_{21}^T P_{20} L_{21}$ は次のリッカチ方程式の解となり、

$$P_2(A - r^2 B B^T P_1) + (A - r^2 B B^T P_1)^T P_2 + (1-r^2) P_2 B B^T P_2 + \{m_2 L_{21}^T Q_{20} L_{21} - 2h_2 P_2 - (1-r^2) P_2 B B^T P_2\} = 0 \quad \dots\dots\dots (62)$$

閉ループ極は次のようになる。

$$\lambda\{A - r^2 B B^T P_1 - r^2 B B^T P_2\} = \lambda\{\Lambda_{11} - m_1 r^2 L_{11} B B^T L_{11}^T P_{10}\} \cup \lambda\{\Lambda_{21} - m_2 r^2 L_{21} B B^T L_{21}^T P_{20}\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_{n-k_1-k_2}\} \quad \dots\dots\dots (63)$$

以上の 2 回の繰返しで得られた P_1 および P_2 について $P_1 + P_2$ が〈系 1〉を満たす P となることを考える。

そこで、(55) 式と (62) 式を加えると

$$(P_1 + P_2)A + A^T(P_1 + P_2) + (1-r^2)(P_1 + P_2)B B^T(P_1 + P_2) + Q_{12} = 0 \quad \dots\dots\dots (64 \text{ a})$$

ただし、

$$Q_{12} = m_1 L_{11}^T Q_{10} L_{11} - 2h_1 P_1 - (1-r^2) P_1 B B^T P_1 + m_2 L_{21}^T Q_{20} L_{21} - 2h_2 P_2 - (1-r^2) P_2 B B^T P_2 - P_1 B B^T P_2 - P_2 B B^T P_1 \quad \dots\dots\dots (64 \text{ b})$$

となる。ここで、 $Q_{12} \geq 0$ ならば、 $P = P_1 + P_2 \geq 0$ は〈系 1〉を満たし、 $\|T\|_\infty \leq 1$ が保証されることになる。

Q_{12} のうち、 $h_1 < 0$ と $r < 1$ から

$$-2h_1 P_1 - 2h_2 P_2 - (1-r^2) P_1 B B^T P_1 - (1-r^2) P_2 B B^T P_2 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (65)$$

が成立しているから (64 b) 式の残りの部分、すなわち

$$m_1 L_{11}^T Q_{10} L_{11} + m_2 L_{21}^T Q_{20} L_{21} - P_1 B B^T P_2 - P_2 B B^T P_1 \quad \dots\dots\dots (66)$$

が半正定行列である条件を考えよう。そこで、(66) 式に $P_1 = m_1 L_{11}^T P_{10} L_{11}$ 、 $P_2 = m_2 L_{21}^T P_{20} L_{21}$ を代入し整理

すれば(67)式が得られる。

$$\begin{aligned} & (L_{11}^T L_{21}^T) \\ & \times \begin{bmatrix} m_1 Q_{10}, & -m_1 m_2 P_{10} L_{11} B B^T L_{21}^T P_{20} \\ -m_1 m_2 P_{20} L_{21} B B^T L_{11}^T P_{10}, & m_2 Q_{20} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \end{bmatrix} \geq 0 \dots\dots\dots (67) \end{aligned}$$

このための必要十分条件は付録2から以下になる。

$$\begin{aligned} m_1 m_2 & \leq 1/c \\ c & = \lambda \max \{ Q_{10}^{-1/2} P_{10} L_{11} B B^T L_{21}^T P_{20} Q_{20}^{-1} \\ & \quad \times P_{20} L_{21} B B^T L_{11}^T P_{10} Q_{10}^{-1/2} \} \dots\dots\dots (68) \end{aligned}$$

よって、(54)、(61)、(68)式を満足する係数 m_1 , m_2 を選ぶことで $k_1 + k_2 (\leq 2r)$ 個の極が移動する。ただし、 m_1, m_2 は有界なのでこれらの極が $-\infty$ に設定できるわけではないが、安定性は(定理1)同様保証されている。よって、試行錯誤でより左半面に設定できる可能性がある。

$r=1, r>1$ の場合も同様に、(68)式の条件を付加することで入力数以上の極が移動できる。

5. 例 題

(例題1) ここでは、文献(7)の九次2入力タービン発電機システムを例にとり $r<1, r=1$ の場合について本方法の有効性を示すことにする。 A および B 行列は(69)、(70)式で、 A の9個の固有値のうち虚軸に非常に近い一対の複素極 $-0.101 \pm j10.47$ のみを、第3章で述べた方法でより安定な極へ移す。計算結果は、表1、表2に示す。

まず表1は $r=1$ 設定したときの計算結果である。

表1 $r=1$ のときの複素極 $-0.101 \pm j10.47$ の移動
Table 1. Pole placement when only $-1.101 \pm j10.47$ are shifted in $r=1$.

開ループ極	m	1	10	100	1,000	10,000
	r_c	0.856	0.9965	0.998	0.99984	0.999987
-106.9	閉ル			const		
$\pm j15.89$						
-33.88				const		
$\pm j10.22$						
-0.101		-4.46	-86.1	-8.72×10^2	-8.72×10^3	-8.72×10^4
$\pm j10.47$	ブ	$\pm j9.52$	-0.39	-0.391	-1.76	-16.6
-13.57	極			const		
-29.68				const		
-5.00				const		

$m=1$ で指定した極 $-0.101 \pm j10.47$ のみが $-4.46 \pm j9.52$ へ移動している。 m を大きくするに従ってそれらは二つの実数となり、(36b)式の $P_0^{1/2} L_1 B B^T L_1^T \times P_0^{1/2}$ の固有値(8.727, 0.00165)の m 倍に漸近している。 r_c は、あらかじめ設定したノルムすなわち1以下になっているかどうか再度計算したもので、いずれも1以下となっていることがわかる。次に、表2は1以下の r を各々設定したときで $r \rightarrow 1$ とするに従って指定した一対の複素極は左へ移動している。同様に再度計算したノルム r_c は設定されたノルム r 以下となっている。

$$A = \begin{bmatrix} -2.77 & -3.07 & 2.98 & \\ 26.8 & -61.5 & 0.524 & \\ 30.0 & -15.5 & -32.3 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 44.0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -223.0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0.176 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -27.7 & 0 & 0 & 0 \\ * & -89.8 & -100.0 & 0 & 0 & * \\ & 0 & -3875.0 & -100.3 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -5.0 \\ & -47.8 & 0 & 0 & 55.4 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -0.599 & & \\ & -0.0923 & -32.1 & & \\ & 0 & -15.6 & & \\ & -0.0828 & -5.32 & & \\ * & 0 & 0 & \dots\dots\dots (69) \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \\ & -0.35 & -222.0 & \\ & 1.0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \dots\dots\dots (70)$$

(例題2) 第4章の方法を用い(71)式のような三次システムにおいて一入力であるが二つの極1と-1

表 2 $r < 1$ のときの複素極 $-0.101 \pm j10.47$ の移動
Table 2. Pole placement when only $-1.01 \pm j10.47$ are shifted in given $r < 1$ respectively.

開ループ極	r	0.1	0.5	0.7	0.9	0.999	.9999999
r_c		9.65×10^{-4}	3.09×10^{-2}	8.42×10^{-2}	0.15	0.979	.9999998
-106.9				const			
$\pm j15.89$							
-33.88	閉			const			
$\pm j10.22$	ル						
-0.101	1	-0.1031	-0.1063	-0.1125	-0.1452	-5.04	-9.9×10^4
$\pm j10.47$	ブ	$\pm j10.47$	$\pm j10.47$	$\pm j10.47$	$\pm j10.47$	$\pm j9.23$	-18.8
-13.57	極			const			
-29.68				const			
-5.00				const			

$$h = -0.01, m = \frac{-2h}{(1-r^2)\lambda_{\max}[P_0^{-1/2}L_1BB^TL_1^TP_0^{-1/2}]} \times 0.99$$

表 3 $r=1.7$ のときの極 $-1, 1$ の移動
Table 3. Pole placement when only -1 and 1 are shifted in $r=1.7$.

r_c		1.1654	1.1828	1.2031	1.2262	1.2499
m_1		2.0952	1.8624	1.6296	1.3968	1.1640
m_2		13.6287	12.3326	11.0695	9.8558	8.7214
-2	開			const		
-1	ル	-1.6069	-1.6828	-1.7803	-1.9103	-2.0924
1	極	-5.0552	-4.3824	-3.7096	-3.0368	-2.3460

のみを選択的により安定な極へ移動する。ここでは、 $r=1.7$ とし、最初に不安定極 1 を、そして次に -1 を移動する。計算結果は表 3 に示す。 m_1 および m_2 を第 4 章で述べた条件のもとで適当に動かすことで、 $1, -1$ のみ移動していることがわかる。特に、本例題ではすべての極を -2 付近になるように調節した。このとき再度計算した r_c は設定された r 、すなわち 1.7 以下となっている。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (71)$$

6. おわりに

相補感度関数の H_∞ ノルムをある値に保ったまま、入力数だけの数の極を選択的に $-\infty$ に漸近させる方法を示した。また、入力数以上の極もある条件のもと

で移動できることも示した。

今後、〈系 1〉で零とおいた X を考慮することで完全な極指定が行えるか否かを明確にしていけるとともに、一般的化プラント $\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, z = C_1x + D_{12}u$ についての極指定問題も扱いたい。

(平成 3 年 12 月 25 日受付)

文 献

- (1) 大内・美多:「 H_2 制御による H_∞ 制御系の最適化」, 計測自動制御学会論文集, 27, 1123, (平 3-10)
- (2) 千田・美多:「 H_∞ ロバスト制御系の極配置と安定余有」, システム制御情報学誌, 3, 176, (平 2-6)
- (3) 川崎・示村:「主要極配置を考慮した選択的折り返し設計法」, 電学論 C, 108, 55 (昭 63-1)
- (4) B. D. O. Anderson & S. Vongpanitlerd: Network Analysis and Synthesis (1973) Prentice-Hall
- (5) 千田・美多・三平・王:「有界実条件を使った H_∞ 状態フィードバック則の直接的導出法」, システム制御情報学誌, 2, 422 (平元-12)
- (6) 児玉・須田:「システム制御のためのマトリクス理論」, (昭 62) 計測自動制御学会
- (7) S. I. Ahson & H. nicholson: "Improvement of Turbo-Alternator Response using the Inverse Nquist Array Method", Int. J. Control, 23, No. 5 (1976)
- (8) B. Kouvaritakis & U. Shaked: "Asymptotic behaviour of root-loci of linear multivariable systems", ibid., 23, No. 3 (1976)
- (9) 美多・三平・千田・中道:「有界実条件と H_∞ 制御」, 第 9 回適応制御シンポジウム, p. 15 (平元)
- (10) 有満・大内・美多:「 H_∞ ロバスト制御系の極指定について」, 第 20 回制御理論シンポジウム, p. 143 (平 3)

付 録

1. 〈補題付 1〉⁽⁸⁾

$A(n \times n), B(n \times r), F(r \times n)$ とし, FB は最大ランクをもつとする。このとき, $m \rightarrow \infty$ とすれば, $A - mBF$ の固有値のうち, $n-r$ 個の固有値は系 $\{F, A, B\}$ の不変零点に漸近し, r 個の固有値は FB の固有値の m 倍に漸近する。

2.

(67) 式の二次形式中の行列は,

$$\begin{aligned} W_{11} &= m_1 Q_{10} \\ W_{12} &= -m_1 m_2 P_{10} L_{11} B B^T L_{21}^T P_{20} \\ W_{22} &= m_2 Q_{20} \end{aligned}$$

とおけば, $W_{22} \geq 0, W_{11} - W_{21} W_{22}^+ W_{12} \geq 0$ のとき半正定となる⁽⁶⁾。 $Q_{20} > 0$ だから $W_{11} > 0$ であり,

$$\begin{aligned} W_{11} - W_{21} W_{22}^+ W_{12} &= m_1 Q_{10} - (m_1 m_2)^2 P_{10} L_{11} \\ &\quad \times B B^T L_{21}^T P_{20} (m_2 Q_{20})^{-1} \\ &\quad \times P_{20} L_{21} B B^T L_{11}^T P_{10} \\ &= m_1 \{ Q_{10} - m_1 m_2 P_{10} L_{11} \\ &\quad \times B B^T L_{21}^T P_{20} Q_{20}^{-1} \\ &\quad \times P_{20} L_{21} B B^T L_{11}^T P_{10} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_1 Q_{10}^{1/2} \{ 1 - m_1 m_2 Q_{10}^{-1/2} \\
&\quad \times P_{10} L_{11} B B^T L_{21}^T P_{20} Q_{20}^{-1} \\
&\quad \times P_{20} L_{21} B B^T L_{11}^T P_{10} Q_{10}^{1/2} \} Q_{10}^{1/2} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

を整理すれば(68)式を得る。

大内 茂人 (正員)

昭和51年鹿児島大学大学院修士課程修了。同年大塚製薬(株)入社。55年1月富士電機(株)転社。同社電機システム事業部システム技術部にて電動応用システムの企画・研究・設計に従事。平成2年4月千葉大学大学院自然科学研究科博士課程入学(富士電機在職中)。計測自動制御学会会員。

有満 稔 (正員)

平成3年千葉大学工学部電気電子工学科卒業。4年東京工業大学大学院修士課程入学。計測自動制御学会会員。

美多 勉 (正員)

昭和50年東京工業大学大学院博士課程修了。千葉大学講師，助教授を経て，平成2年3月同教授。制御理論，ロボット工学，電力工学などの研究・教育に従事。工学博士。平成元年計測自動制御学会論文賞。2年システム制御情報学会榎木記念論文賞受賞。計測自動制御学会会員。