一般的なセクタ型非線形要素と区間プラントを含む ルーリエ系のロバスト絶対安定性

非会員 西 村 剛 (京都工繊大)

正 員 森 武 宏 (京都工繊大)

正 員 黒 江 康 明 (京都工繊大)

正 員 小 亀 英 己 (大阪工大)

Robust Absolute Stability of Lur'e Systems with Interval Plants and General Sector-Type Nonlinearities

Tsuyoshi Nishimura, Non-member, Takehiro Mori, Member, Yasuaki Kuroe, Member (Kyoto Institute of Technology), Hideki Kokame, Member (Osaka Institute of Technology)

Recently, robust absolute stability problems are argued for Lur'e systems which contain transfer functions with real parametric uncertainties. In dealing with this kind of systems, their linear parts with parameter perturbations are represented by interval plants. The Popov's theorem is known as a way of solving the classical absolute stability problem when nonlinear characteristics of Lur'e systems is time-invariant. It is recently shown that this theorem can be extended to the case where the linear plant is replaced by interval plants. The absolute stability of such systems is checked by the geometrical relation between a Popov line and the Popov loci of several extreme plants in the complex plane. However, it is restricted to the case that the lower bound of the sector equals to zero. In this paper, an extension is made so that nonlinear part has a general sector. This can be done by making the transformation for original systems and applying the Popov's theorem to the transformed systems. We show that the absolute stability of original systems can be guaranteed if we have only to check the Popov's condition for the systems transformed from several extreme plants.

キーワード：区間プラント，カリトノフプラント，ポポフの定理，ロバスト絶対安定問題

1. はじめに

近年，システムのパラメータ変動を考慮に入れた，構造的な不確かさをもつ制御系の安定性に関する研究が，ロバスト制御理論の分野で活発に行われている。その一つに，かつて非線形制御問題のトピックスの一つであったルーリエ系の絶対安定問題を，現在のロバスト制御理論の立場から考え直そうとする試みがみられる。その方法は，従来のルーリエ系の線形部を，不確かさを含んだ区間プラントと呼ばれる形式で記述しようとするものである。この区間プラントは，二つの区間多項式の比によって形成され，原理的には無数の伝達関数の集合からなる。これらすべての要素に対し，系の絶対安定性を考える問題は，しばしばロバスト絶対安定問題と呼ばれる。このロバスト絶対安定問題には，カリトノフの定理⁽³⁾と称される区間多項式のフルビッツ安定性に関する結果が大きく関与している。従来の

ルーリエ系の絶対安定問題の成果として，ポポフの定理や円板定理などの安定判別条件があげられるが，これらの諸定理に上記のような不確かさを考慮した研究成果は，既に報告されている⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾。それらの内容はいずれも，区間プラントを含む系の絶対安定性は，そのうちのわずか16組のプラントのそれによって保証されるとするものである。このうち，文献(1)の(弱)ロバストポポフ定理と称されている従来のポポフの定理に対する結果は，元来のポポフの定理に課されたセクタ条件のために，セクタの下界はゼロと仮定されていた。しかし，実際には開ループシステムが不安定なルーリエ系など，この下界がゼロでない場合がしばしば存在する。そこで本論文では，より一般的なセクタをもつ区間プラントを含むルーリエ系の絶対安定問題を考える。この場合，系に安定性に関して等価なフィードバック変換を施し，その後(弱)ロバストポポフ定理を適用すればよい。しかしながら，このような変換をすべての区

間プラントのメンバに対して行うのは事実上不可能であり、この方法は実践的でない。そこで、もとの区間プラントのうちの少数個のプラントに対してこのような変換を施し、従来のポポフの定理を適用して系の絶対安定性の判定ができることが望まれる。本論文は、(弱)ロバストポポフ定理で使われるのと同じわずか16組のプラントによって、そのような判定が可能であることを示したものである。ポポフの定理の線形部の条件は円板定理のそれを含んでいるので、得られた結果はセクタ条件に関して上記の従来の結果⁽¹⁾⁽²⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾を含む最も一般的なものとなっている。

2. ロバストルーリエ問題

対象とする制御系は、代表的な非線形系である図1のゼロ入力ルーリエ系で、フィードバック路に非線形部 N をもち、フォワード路には線形要素をもつ。従来のルーリエ系と大きく異なるのは、線形部の伝達関数の係数パラメータが、ある幅をもって変動するという点にある。このことを定式化するために、まず次のような多項式の集合を定義する。

$$\mathcal{P}^n := \{p(s) : p(s) = p_0 + p_1s + \cdots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n, \\ p_i \in [\alpha_i, \beta_i], i=0, \dots, n-1\} \quad (1)$$

$$\mathcal{Q}^m := \{q(s) : q(s) = q_0 + q_1s + \cdots + q_{m-1}s^{m-1} + q_ms^m, \\ q_i \in [\gamma_i, \delta_i], i=0, \dots, m\} \quad (2)$$

このように定義された $\mathcal{P}^n, \mathcal{Q}^m$ はそれぞれ各係数がある有界な値をとる s に関する多項式の集合を表しており、これらは区間多項式と呼ばれている。この $\mathcal{P}^n, \mathcal{Q}^m$ を用いて、次のような厳密にプロパな伝達関数の集合を定義する。

$$\mathcal{G} := \{g(s) : g(s) = q(s)/p(s), q(s) \in \mathcal{Q}^m, \\ p(s) \in \mathcal{P}^n, n > m\} \quad (3)$$

この集合 $\mathcal{G}$ は区間プラントと呼ばれる。本論文で対象とする制御系は、図1の線形部の伝達関数が、集合 $\mathcal{G}$ の任意の一要素であるとする。

一方、セクタ型の非線形要素をもつ N は時不変で、その入出力関係は、

$$u = -f(y) \quad (4)$$

で表されたとする。ただし、関数 f は連続で、

$$\left. \begin{aligned} K_1 \leq f(y)/y \leq K_2, \quad y \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

図1 区間プラントを含むルーリエ系
Fig. 1. Lur'e systems with interval plants.

を満たすものならどのようなものでもかまわない。ここではこの特性を簡単に $(f/y) \in [K_1, K_2]$ と書くことにする。

以上の定式化のもとで、線形部に区間プラントを含む場合のルーリエ系の絶対安定問題について考えていく。そのため、区間多項式の任意の元 $p(s), q(s)$ に対し、各々次のような4組の多項式を定義する。

$$p_1(s) = \alpha_0 + \alpha_1s + \beta_2s^2 + \beta_3s^3 + \alpha_4s^4 + \cdots \quad (6)$$

$$p_2(s) = \alpha_0 + \beta_1s + \beta_2s^2 + \alpha_3s^3 + \alpha_4s^4 + \cdots \quad (7)$$

$$p_3(s) = \beta_0 + \alpha_1s + \alpha_2s^2 + \beta_3s^3 + \beta_4s^4 + \cdots \quad (8)$$

$$p_4(s) = \beta_0 + \beta_1s + \alpha_2s^2 + \alpha_3s^3 + \beta_4s^4 + \cdots \quad (9)$$

$$q_1(s) = \gamma_0 + \gamma_1s + \delta_2s^2 + \delta_3s^3 + \gamma_4s^4 + \cdots \quad (10)$$

$$q_2(s) = \gamma_0 + \delta_1s + \delta_2s^2 + \gamma_3s^3 + \gamma_4s^4 + \cdots \quad (11)$$

$$q_3(s) = \delta_0 + \gamma_1s + \gamma_2s^2 + \delta_3s^3 + \delta_4s^4 + \cdots \quad (12)$$

$$q_4(s) = \delta_0 + \delta_1s + \gamma_2s^2 + \gamma_3s^3 + \delta_4s^4 + \cdots \quad (13)$$

これらは各々 $\mathcal{P}^n, \mathcal{Q}^m$ に対するカリトノフ多項式と呼ばれるもので、その名称は、区間多項式のフルビッツ安定性は、4組のカリトノフ多項式のそれによって保証されるとするカリトノフの定理⁽⁹⁾に由来する。そこで、これらをそれぞれ $\mathcal{P}_K^n, \mathcal{Q}_K^m$ と表すことにする。すなわち、

$$\mathcal{P}_K^n := \{p_1(s), p_2(s), p_3(s), p_4(s)\} \quad (14)$$

$$\mathcal{Q}_K^m := \{q_1(s), q_2(s), q_3(s), q_4(s)\} \quad (15)$$

である。明らかに、 $\mathcal{P}_K^n \subset \mathcal{P}^n, \mathcal{Q}_K^m \subset \mathcal{Q}^m$ である。

更に、カリトノフ多項式 $\mathcal{P}_K^n, \mathcal{Q}_K^m$ を組み合わせることにより、次のような計16組からなるプラントを定義する。

$$\mathcal{G}_K := \{g_{ik}(s) : g_{ik}(s) = q_i(s)/p_k(s), q_i(s) \in \mathcal{Q}_K^m, \\ p_k(s) \in \mathcal{P}_K^n, i, k=1, 2, 3, 4\} \quad (16)$$

これはカリトノフプラントと呼ばれ、明らかに $\mathcal{G}_K \subset \mathcal{G}$ が成り立つ。

(注意1) カリトノフ多項式の要素を表す記号(常に引数 s を付けている)と、区間多項式の係数を表す記号とを混同しないように注意されたい。

さて、(5)式において、 $K_1=0$ とした系の絶対安定判別は、さきに触れた文献(1)の(弱)ロバストポポフ定理を適用することによって行うことができる。非線形特性が(5)式のような一般的な場合には、系に図2に示すような安定

図2 ルーリエ系の等価変換
Fig. 2. Transformation of Lur'e systems.

性に関して等価な変換を施し、その後この(弱)ロバストポポフ定理を適用することが考えられる。すなわち、変換後の新たな線形部を $g'(s) := g(s)/[1 + K_1 g(s)]$ 、非線形部を $f'(y) := f(y) - K_1 y ((f'/y) \in [0, K_2 - K_1])$ であることに注意)とした系にそれを適用すればよいわけである。しかしながら、区間プラント $\mathcal{G}$ のすべての $g(s)$ に対してこの変換を施すことは実際には不可能である。そこで、もとの区間プラントのうちの少数個のプラントに対してこのような変換を施し、従来のポポフの定理を適用して系の絶対安定性の判定ができることが望まれる。次章では、この要求に対する肯定的な結果が得られたのでそれを示す。

3. 主要な結果

本論文で得られた結果は、文献(1)で述べられている(弱)ロバストポポフ定理のセクタ条件に関する一般化である。 $K_1 = 0$ の特別な場合である(弱)ロバストポポフ定理は、本論文の結果を示すうえで重要な補題となるものである。ところで、文献(1)の(弱)ロバストポポフ定理では、 $g(s)$ に厳密なプロパ性が要求されていたが、本論文の結果の証明に文献(1)の結果を利用するためには、この仮定をゆるめ、 $g(s)$ に対して通常のプロパ性まで容認する必要がある。実際、この拡張は容易に実現できる。この点は本論文の結果の証明のポイントであるので、以下に文献(1)の(弱)ロバストポポフ定理を拡張した形で示すとともに、その証明を与える。

[補題 1] : (弱)ロバストポポフ定理 $(f/y) \in [0, K_2]$ とする。このとき、すべての $g(s) \in \{g(s) : g(s) = q(s)/p(s), q(s) \in \mathbb{Q}^m, p(s) \in \mathcal{P}^n, n \geq m\}$ に対し、ポポフの定理が成立する、すなわち実数 r が存在し、 $g(s)$ が安定で、次のポポフの条件、

$$\operatorname{Re}(1 + j\omega r)g(j\omega) + \frac{1}{K_2} \geq \epsilon > 0, \forall \omega \geq 0 \quad (\epsilon : \text{正数})$$

.....(17)

を満たすための必要十分条件は、すべての $g_{ik}(s) \in \mathcal{G}_K$ に対し、 $g_{ik}(s)$ が安定で(17)式を満たす同じ実数 r が存在することである。

(注意 2) (17)式の $\epsilon > 0$ はポポフの定理の厳密な証明に必要となる。(17)式はすべての ω での左辺の正值性を要求しているが、同式左辺の分子の次数低下が起こる場合には、 $\omega \rightarrow \infty$ でこの条件を満たさなくなる。(17)式はこのような次数低下は起こらないことを意味している。

(注意 3) [補題 1]はすべての区間プラントの元 $g(s)$ に対して共通の実数 r が存在するための必要十分条件を記述している。ポポフの定理では r は $g(s)$ に依存して存在すればよく、[補題 1]の条件はやや制限的であるといえる。そのためこの補題を(弱)ロバストポポフ定理と称することにした。強い意味でのロバストポポフ定理、すなわち区間プラントの各々の $g(s)$ に依存する実数 r が存在するための条件について検討することは今後の課題となっている。

この補題を証明するために、次の[補題 2]を用いる。

[補題 2]⁽²⁾ プロパな s の有理関数 $f(s) = n(s)/d(s)$ [ただし $n(s), d(s)$ は実多項式]が $\operatorname{Re} f(j\omega) > 0, \omega \in (-\infty, \infty)$ を満たすための十分条件は、関数 $f(s)$ が次の三つの条件、

- (i) $f(0) > 0$
- (ii) $n(s)$ はフルビッツ安定
- (iii) $d(s) + j\alpha n(s)$ は $\forall \alpha \in \mathcal{R}$ に対し、フルビッツ安定

を満たすことである。

(注意 4) 文献(2)では上の補題は必要十分条件として記述されているが、本論文で利用するのはそのうちの十分条件のみである。そのためこのような形で引用する。

また、上の条件(iii)において、 $\alpha = 0$ または $\alpha = -1/\beta$ とおくと、次の新しい条件、

- (ii) $d(s)$ はフルビッツ安定
- (iii) $n(s) + j\beta d(s)$ は $\forall \beta \in \mathcal{R}$ に対し、フルビッツ安定

が得られる。これは $f(s)$ の分母分子を互いに入れ換えて得られる条件である。明らかに $\operatorname{Re} f(j\omega) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{1/f(j\omega)\} > 0$ であるから、実際には[補題 2]は $f(s)$ がプロパであるなしにかかわらず適用可能である。

上の[補題 2]と(注意 4)より、[補題 1]が次のように証明できる。

(補題 1 の証明) カリトノフプラントは区間プラントの一部にすぎないので必要性は明らか。よって十分性を示す。仮定より、カリトノフ多項式 $\mathcal{P}_K^n$ のフルビッツ安定性は保証されているから、カリトノフの定理⁽³⁾より、区間多項式 $\mathcal{P}^n$ はフルビッツ安定である。

まず、 $p(s)$ をある一つの $\mathcal{P}^n$ の元に固定する。 $p(j\omega) = a(\omega) + jb(\omega), q(j\omega) = c(\omega) + jd(\omega)$ と表記すると、 $\omega \geq 0$ に対して次の 4 組の不等式で表される関係が成り立つことが容易に導ける。

$$a_1(\omega) = a_2(\omega) \leq a(\omega) \leq a_4(\omega) = a_3(\omega) \dots \dots \dots (18)$$

$$b_1(\omega) = b_3(\omega) \leq b(\omega) \leq b_4(\omega) = b_2(\omega) \dots \dots \dots (19)$$

$$c_1(\omega) = c_2(\omega) \leq c(\omega) \leq c_4(\omega) = c_3(\omega) \dots \dots \dots (20)$$

$$d_1(\omega) = d_3(\omega) \leq d(\omega) \leq d_4(\omega) = d_2(\omega) \dots \dots \dots (21)$$

ここで、 $a_k(\omega), b_k(\omega), c_i(\omega), d_i(\omega), i, k = 1, 2, 3, 4$ は $p_k(j\omega) = a_k(\omega) + jb_k(\omega), q_i(j\omega) = c_i(\omega) + jd_i(\omega), i, k = 1, 2, 3, 4$ の関係により定義される。

実際に(17)式の $(1 + j\omega r)g(j\omega) + 1/K_2$ の実部を計算すると同式は、

$$a(\omega)c(\omega) + b(\omega)d(\omega) - \omega r\{a(\omega)d(\omega) - b(\omega)c(\omega)\} + \frac{1}{K_2}\{a^2(\omega) + b^2(\omega)\} \geq \epsilon' > 0 \dots \dots \dots (22)$$

となる。ここに、 $\epsilon' = \epsilon\{a^2(\omega) + b^2(\omega)\} > 0$ である。ここで ω を固定すると、上式の左辺は c, d に関して線形関数になっているので、(20), (21)式の関係から、(22)式の左辺の最小値は c, d が端点をとる場合の組合せのいずれかにによって定まることがわかる。このことは、その値がカリト

ノフ多項式 Q_X^m によって決まることを意味している。従って、すべての $q_i(s) \in Q_X^m$ に対し (22) 式が成立すれば、すべての $q(s) \in Q^m$ に対し同式が成立することがいえる。

次に、 $q(s) \in Q^m$ を任意の一つに固定した場合を考える。まず、すべての $p(s) = p_k(s) \in \mathcal{P}_X^n$ に対して、

$$\operatorname{Re}(1+j\omega r) \frac{q(j\omega)}{p(j\omega)} + \frac{1}{K_2} > 0 \quad (23)$$

が成立すれば、すべての $p(s) \in \mathcal{P}^n$ に対して同不等式が成立することを示す。そのためには、さきに示した〔補題 2〕を適用し、(23) 式左辺を〔補題 2〕の $\operatorname{Re} f(s)$ とみて、次の (i) ~ (iii) と (I) ~ (III) が等価であることが示せばよい。

$$(i) \quad q(0)/p_k(0) + \frac{1}{K_2} > 0$$

$$(ii) \quad (1+sr)q(s) + \frac{1}{K_2} p_k(s) \text{ はフルビッツ安定}$$

$$(iii) \quad p_k(s) + \frac{\alpha K_2}{K_2^2 + \alpha^2} (\alpha + jK_2)(1+sr)q(s) \text{ は } \forall \alpha \in \mathcal{R} \text{ に対し、フルビッツ安定}$$

$$(I) \quad q(0)/p(0) + \frac{1}{K_2} > 0$$

$$(II) \quad (1+sr)q(s) + \frac{1}{K_2} p(s) \text{ はフルビッツ安定}$$

$$(III) \quad p(s) + \frac{\alpha K_2}{K_2^2 + \alpha^2} (\alpha + jK_2)(1+sr)q(s) \text{ は } \forall \alpha \in \mathcal{R} \text{ に対し、フルビッツ安定}$$

以下に (i) ~ (iii) と (I) ~ (III) が等価であることを示す。いま、 $q(s)$ は固定された多項式なので、条件 (i) から (I) が成り立つことは容易にわかる。(I) $\rightarrow$ (i) は明らかである。また (II) は実係数区間多項式なので、カリトノフの定理⁽³⁾により、(ii) $\leftrightarrow$ (II) が導ける。更に、条件 (III) の多項式は複素係数区間多項式で、それに関するカリトノフの定理⁽⁴⁾を用いると、(iii) $\leftrightarrow$ (III) が得られる。これらのことから、カリトノフプラントを用いた式 (i) ~ (iii) は (I) ~ (III) に等価であることが示せた。ゆえに $p(s)$ を固定した場合と組み合わせることにより、すべての $g(s) \in \mathcal{G}_X$ について、

$$\operatorname{Re}(1+j\omega r)g(j\omega) + \frac{1}{K_2} > 0 \quad (24)$$

が $0 \leq \omega < \infty$ で成立していれば、すべての $g(s) \in \mathcal{G}$ についても同式の成立がいえたとことになる。従って、残るは $\omega \rightarrow \infty$ で (17) 式の左辺がすべての $g(s) \in \mathcal{G}$ について正であることがいえればよい。そのために $g(s) \in \mathcal{G}$ の分母分子の次数の関係によって、次の三つの場合に分けて考える。まず、 $m < n-1$ なる関係があるとき、(17) 式左辺は $\omega \rightarrow \infty$ で $1/K_2$ となり、変動係数を含まないから、この場合は明らか。 $m = n-1$ であるときは、(17) 式の左辺は $rq_m + 1/K_2$ となるが、仮定より q_m の両端点での正值性は保証されているので、線形性より、 $rq_m + 1/K_2 > 0$ は満たされる。最後に $m = n$ のとき、これは (17) 式左辺の分子の次数が分母の次数より 1 だけ高いときで、分子の最高次係数は rq_m であるから、仮定より q_m の両端で (17) 式左辺は $+\infty$ 側へ発散し、この量の符号は正である。よって、区

間内のすべての q_m の値でも結果は同じである。以上で、すべての ω に対して〔補題 1〕は満たされたことになる。よって証明が完了した。

次に示すのが文献 (1) の結果をセクタに関し一般化したもので、本論文の主要な結果である。

〔定理〕 $(f/y) \in [K_1, K_2]$ とする。このとき、ある実数 r があって、すべての $g(s) \in \mathcal{G}$ に対し、 $g(s)/(1 + K_1 g(s))$ が安定で、

$$\operatorname{Re}(1+j\omega r) \frac{g(j\omega)}{1 + K_1 g(j\omega)} + \frac{1}{K_2 - K_1} \geq \epsilon > 0$$

$$\forall \omega \geq 0 \quad (\epsilon: \text{正数}) \quad (25)$$

を満たすための必要十分条件は、すべての $g_{ik}(s) \in \mathcal{G}_X$ に対して、 $g(s)/(1 + K_1 g_{ik}(s))$ が安定で、(25) 式を満たす同じ実数 r が存在することである。

〔証明〕 必要性は明らかゆえ、十分性を示す。(25) 式は次のように書き直せる。

$$\operatorname{Re}(1+j\omega r) \frac{q(j\omega)}{p(j\omega) + K_1 q(j\omega)} + \frac{1}{K_2 - K_1} \geq \epsilon > 0 \quad (26)$$

仮定より、 $p_k(s) + K_1 q_i(s)$, $k, i = 1, 2, 3, 4$ はフルビッツ安定であるから、その中に含まれる同式の 4 組のカリトノフ多項式もフルビッツ安定である。よって、カリトノフの定理より、区間多項式の任意の元 $p(s) + K_1 q(s)$ のフルビッツ性も保証される。次に $g_{ik}(s) \in \mathcal{G}_X$ が (26) 式を満たせば、 $g(s) \in \mathcal{G}$ に対しても同式は満たされることを示す。ここでも、 $g(s) = q(s)/p(s)$ の分母多項式と分子多項式を交互に固定して考える。

いま、 $q(s)$ を Q^m の中のある多項式に固定する。すると〔補題 1〕により $k = 1, 2, 3, 4$ に対して、

$$\operatorname{Re}(1+j\omega r) \frac{q(j\omega)}{p_k(j\omega) + K_1 q(j\omega)} + \frac{1}{K_2 - K_1} \geq \epsilon > 0 \quad (27)$$

が成立することと、すべての $p(s) \in \mathcal{P}^n$ に対して、

$$\operatorname{Re}(1+j\omega r) \frac{q(j\omega)}{p(j\omega) + K_1 q(j\omega)} + \frac{1}{K_2 - K_1} \geq \epsilon > 0 \quad (28)$$

が成立することが等価であることがいえる。

次に、 $p(s)$ を $\mathcal{P}^n$ のある元に固定した場合を考える。この場合 $i = 1, 2, 3, 4$ に対して次式のような変形を行う。

$$\begin{aligned} (1+sr) \frac{q_i(s)}{p(s) + K_1 q_i(s)} + \frac{1}{K_2 - K_1} \\ = \frac{1}{K_1} (1+sr) - \frac{1}{K_1} (1+sr) \frac{p(s)}{p(s) + K_1 q_i(s)} \\ + \frac{1}{K_2 - K_1} \quad (29) \end{aligned}$$

これよりポポフの条件 (26) 式は次のように表される。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{K_1} \operatorname{Re}(1+j\omega r) \frac{p(j\omega)}{p(j\omega) + K_1 q_i(j\omega)} + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 - K_1} \\ \geq \epsilon > 0 \quad (30) \end{aligned}$$

ここで、 $p(j\omega)/(p(j\omega) + K_1 q_i(j\omega))$ は分母分子同次である。仮定より (30) 式がすべての $q_i(s) \in Q_X^m$ に対して成立するので、 $p(s)$ は変動しないことより〔補題 1〕の証明と同様

にして、すべての $q(s) \in \mathbb{Q}^m$ に対し次式が成立することがいえる。

$$-\frac{1}{K_1} \operatorname{Re}(1+j\omega r) \frac{p(j\omega)}{p(j\omega)+K_1 q(j\omega)} + \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2-K_1} \geq \epsilon > 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

これら二つの場合を組み合わせると十分性を示すことができたことになる。よって証明は完了した。

この定理は、非線形部のセクタが $[K_1, K_2]$ のように一般的な場合、系の絶対安定判別を行うには、わずか16組のカリトノフプラントのみを等価変換し、そうして得られた新しい系に対し従来からのポポフの定理を適用するだけでよいことを示している。図式的に言えば、区間プラントに対するポポフ軌跡は複素平面上で群をなすが、このように無数のプラントの軌跡からなる場合でも、わずか16組の軌跡と一つのポポフ直線についての関係のみを調べればよいことを示している。これは言い換えれば、ある軌跡群に接する直線を描いたとき、その接点は必ずカリトノフプラントの軌跡上にあることを述べたものとなっている。定理はまた、[補題1]の事実が等価変換に対して保存されることをも示している。

非線形特性が時変な場合、この定理の線形部に対する条件は $r=0$ の場合として、円板定理の条件を含んでいる。このことと本論文の結果により、ポポフの定理のみならず、円板定理に対してもセクタ条件に関して一般化がなされたことになる。

4. 数値例と検討

次に、この結果を用いた簡単な数値例を示す。

次の区間プラントを考える。

$$g(s) = \frac{1}{s^4 + s^3 + 10s^2 + p_1 s - 1} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここで、分母多項式 $p(s)$ の係数 p_1 は、

$$p_1 \in [5, 8] \quad \dots\dots\dots (33)$$

のように変動するものとする。区間内のすべての p_1 に対して、このプラントは明らかに不安定である。これに対するカリトノフプラントは以下の2組で与えられる。

$$g_{11}(s) = \frac{1}{s^4 + s^3 + 10s^2 + 5s - 1} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$g_{12}(s) = \frac{1}{s^4 + s^3 + 10s^2 + 8s - 1} \quad \dots\dots\dots (35)$$

いま、変換後の線形部の区間プラントが安定になるような K_1 として $K_1=2$ を仮定する。この値に対し、得られた結果を用いて絶対安定性が保証される最大のセクタ幅 K_2-K_1 を与える K_2 を求めることを考える。図3の実線で示される g_{11} と g_{12} は(34)、(35)式のカリトノフプラントを $K_1=2$ によって等価変換した後のポポフ軌跡で、破線は係数 p_1 が区間内部の適当な値をとるプラントを変換した後のポポフ軌跡である。この図から、求める K_2 は図中の2点(○印)でカリトノフプラントに対する軌跡に接するポポフ直線によって唯一に決定される。すなわち、直線が実軸と交わる点より $K_2-K_1=6.027$ となり、 K_2 の値は $K_2=$

図3 変換後の新たな線形部 $\mathcal{G}'$ に対するポポフ軌跡
Fig. 3. Popov plots for the linear part for transformed systems.

図4 変換後の新たな線形部 $\mathcal{G}'$ に対するポポフ軌跡(図3の一部拡大)
Fig. 4. Popov plots for the linear part for transformed systems (blow up of Fig. 3).

8.027 となる。このとき r は $r=0.148$ である。このように、絶対安定性が保証されるセクタの最大範囲を求める問題は、変換後の系のポポフセクタを求める問題に帰着される。つまり、本論文の結果を利用すると、セクタのどちらか一方の端点がわかっている場合、安定性が保証されるようなセクタの他の端点を定めることができる。ただし K_2 に対して K_1 を求める場合、その K_1 による変換によって系の線形部が安定化されているかどうかには注意を要する必要がある。図3の g_{11}, g_{12} は区間プラント(32)、(33)式に対応するポポフ軌跡群の辺縁の大部分をなしているが、そのすべてをおおっているわけではない。このことは、軌跡群の原点付近のくびれたところを拡大してみると理解できる(図4)。これは、係数区間内部に対応するプラントが軌跡群の包絡線をなしている部分である。つまり、同図は、軌跡群の包絡線は必ずしもすべてカリトノフプラント

に対する軌跡よりなっているわけではないことを示している。しかしながら、ポポフ直線が軌跡群に接する可能性のある部分は、その包絡線は必ずカリトノフプラントに対する軌跡からなっており、そのような箇所では上記のような区間内部のプラントに対する軌跡が包絡線を形成するようなことは起こりえない。このことが、本論文の定理の意味する幾何学的内容である。

5. おわりに

線形部に区間プラントを含む時不変ルーリエ系の、非線形部のセクタが一般的な場合についてのロバスト絶対安定性の判定法について述べた。結果によると、たかだか16組のプラントに対して等価変換を施し、従来のポポフの定理を適用してその絶対安定性を確かめれば、区間プラント全体についてもそれが保証される。本論文の結果は既に報告されているロバスト円板定理や(弱)ロバストポポフ定理をすべて包括したものとなっており、この意味で最も一般的である。得られた結果は区間プラントという形で、構造的な不確かさを含む系のロバスト絶対安定性判定の具体的な手順を与えている。(平成5年7月12日受付)

文 献

- (1) 西村・森・黒江・小亀:「区間プラントを含むルーリエ系に対するポポフの定理の適用について」, システム制御情報学論, 6, No. 4, 165 (平5)
- (2) H. Chapellat, M. Dahleh & S. P. Bhattacharyya: "On Robust Nonlinear Stability of Interval Control Systems", *IEEE Trans. Automatic Contr.*, 36, No. 1, 59 (1991)
- (3) V. L. Kharitonov: "Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations", *Differentsial'nye Uravneniya*, 14, No. 11, 2086 (1978); *Differential Equations*, 14, 1483 (1979) (English translation)
- (4) V. L. Kharitonov: "On a Generalization of a Stability Criterion", *Izv. Akad. Nauk. Kazach, SSR Ser. Fiz. Mat.*, 1, 53 (1978)
- (5) C. V. Hollot & R. Tempo: "On the Nyquist Envelope of an Interval Plant Family", CENS-CNR Report, p. 23 (1991)
- (6) C. V. Hollot & R. Tempo: "On the Nyquist Plot of Interval Plants", Proc. American Control Conference, Boston, p. 861 (1991)

西 村 剛

(非会員) 1969年4月28日生。1992年3月京都工芸繊維大学工学部電子工学科卒業。同年4月同大学大学院工学科学研究科修士課程電子情報工学専攻入学。現在、同課程に在学中。ロバスト安定性の研究に従事。

森 武 宏

(正員) 1945年11月1日生。1974年3月京都大学大学院工学研究科博士課程電気工学専攻修了。同年4月同大学工学部オートメーション研究施設助手、同応用システム科学教室助教授を経て、現在、京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科教授。工学博士。この間、主として制御系の安定解析に関する研究に従事。

黒 江 康 明

(正員) 1950年9月10日生。1982年3月神戸大学大学院自然科学研究科博士課程修了。同年神戸大学工学部電気工学科助手。1991年5月京都工芸繊維大学工学部電子情報工学科助教授、現在に至る。計算機援用解析と設計、システム制御理論とその応用、ニューラルネットワークなどの研究に従事。学術博士。IEEE, 電子情報通信学会, 計測自動制御学会, 日本ロボット学会会員。

小 亀 英 己

(正員) 1946年1月5日生。1973年3月京都大学工学研究科博士課程修了。同年4月同大学工学部電気工学科助手。1980年4月大阪工業大学講師、助教授を経て、同教授。工学博士。制御系の計算機援用設計, 安定性解析に関する研究に従事。計測自動制御学会, システム制御情報学会, IEEE 会員。