グラフにおける節点・領域連結度について

伊藤 大雄 (NTT通信網総合研究所)

Node-to-Area Connectivity of Graphs

ITO Hiro (NTT Telecommunication Networks Laboratories)

Connectivity (of node-to-node) is used to examine the robustness of graphs. In some telecommunication networks, some switches are integrated into a logical switching area. In this case, we should examine node-to-area connectivity rather than node-to-node connectivity.

A new idea, NA(node-to-area)-connectivity, is proposed, and this paper shows that the problem of making a minimum NA-connected spanning subgraph of a given graph belongs to the class NP-hard. It also shows, however, that a near-optimum solution to this problem can be given by a linear-time algorithm. The concept of k-NA-connectivity is also introduced, and this paper shows that any k-NA-connected graph $G=(V,E)$ has a sparse k-NA-connected spanning subgraph $G'=(V,E')$ with $|E'|=O(k|V|)$. This is shown by presenting an $O(|E|)$ -time algorithm to find one such subgraph. Although the problem of making a minimum k-NA-connected spanning subgraph of a given graph, of course, belongs to the class NP-hard, this problem can be given an approximate solution by the algorithm.

キーワード：グラフ、連結性、部分グラフ、NP困難、近似解、領域

1. まえがき

通信網に関する諸現象を理論的に扱う場合には、交換局を節点に、交換局間の回線群を枝に対応させてグラフにモデル化することが多い。グラフの強固さを測る指標として、連結度がある。連結度の意味を通信網で考えると、通信経路を確保するのに、いくつの交換局の故障まで耐えられるか、ということを表す。連結度はグラフ理論に古くから登場している概念であり、その性質について多くのことが明らかになっている。

グラフに単純に枝を付加していけば、連結度は(広義に)増加する。しかし、経済性や保守の容易性という観点から、なるべく少ない枝数で高い連結性を保持することが望ましい。

通信網では複数の交換機が集まって一つの論理的な領域を形成していることがある。通信は、その領域(交換機の集まり)を目的地として経路を選択し、領域内のどれかの交換機に着信すれば、目的となる着端末まで通信路を確保することができる(図1参照)。この場合、着領域のどれか一つの交換機に接続しさえすれば良い。そこで交換機を節点に対応させてグラフにモデル化すれば、この場合重要なのは、節点間の連結度ではなく、節点と領域(節点の部

分集合)の連結度であると言える。

節点と領域の連結度は、文献(1)にあるように、領域を節点に縮約したグラフにおける節点間の連結度になるので、従来、自明なものとしてあまり理論的に扱われることはなかった。しかし領域を節点に縮約すると、他の節点間や節点と領域間の連結度が変わってしまうため(図2参照)、グラフ全体で連結度を議論する場合には、この方法は使えないのである。

本稿では、節点と領域の連結度に関し、種々の性質を明らかにする。まず第2章で節点と領域の連結度を意味する、NA連結(node-to-area connection)という概念を導入する。そして、与えられたグラフと領域に対し、NA連結である最小枝数全域部分グラフを求める問題がNP困難であること、この問題に絶対近似誤差を持つ線形時間算法が存在することを示す。第3章ではNA連結をk-NA連結に拡張し、いくつかの性質を明らかにする。そして与えられたグラフに対し、k-連結性を保持する全域部分グラフは、任意の節点・領域間に対しk-NA連結性も保持することを証明する。この性質を用いれば、k-NA連結性を保持する最小全域部分グラフを求める問題(NP困難)に対し、k-連結に関して得られた高速アルゴリズム⁽²⁾を適用することによって、相対

近似誤差が2倍以内の解を線形時間で得ることができる。
第4章にまとめと今後の課題を記す。

なお本稿では節点と領域の連結度に話を絞ったが、この
論法はそのまま領域間の連結度に拡張できる。

図1 通信網の構成

Fig. 1. A construction of telecommunication networks.

2. NA連結について

2. 1. 諸定義

【定義】 集合 $C_1, C_2, \dots, C_H$ が集合 C の分割であるとは、

$$\bigcup_{i=1,2,\dots,H} C_i = C \quad \text{かつ} \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

を満たすことを言う。□

【定義】 $G=(V,E)$ ：（無向）グラフ、 V ：節点集合、 E ：枝集合。

$e(x,y), x,y \in V$ ： x,y 間の枝（同一節点間に枝は1本しか無いものとする）

$$E(x,V'), x \in V, V' \subseteq V - \{x\} : \{e(x,y) \mid \exists y \in V'\}$$

V の分割 $X=\{V_1, V_2, \dots, V_H\}$ が与えられているグラフを、領域グラフと呼び、 $G^*=(G,X)$ で表す。

$n=|V|, m=|E|, n_i=|V_i|$ と表す。

$G=(V,E)$ の全域部分グラフとは $G'=(V,E'), E' \subseteq E$ であるグラフである。□

【定義】 $x \in V$ と $V' \subset V$ （ただし $x \in V - V'$ ）について、 $\exists y \in V', x$ と y が連結である（同一連結成分に属する）時、 x と V' は節点・領域連結（NA連結）であると言う。また、領域グラフ $G^*=(G,X)$ において、 $\forall x \in V$ と $\forall V_i$ （ただし $x \in V - V_i$ ）について、 x と V_i がNA連結である時、 G^* は節点・領域連結（NA連結）であると言う。また誤解の怖れの無いときには、 G はNA連結であるとも言う。□

定義より、グラフが連結ならばNA連結である。しかし、NA連結でも連結でないグラフは存在する（図3参照）。

2. 2. 最小NA連結問題のNP完全性

【定義】 最小NA連結問題(MNAC)

入力：領域グラフ $G^*=(G,X), L \in \mathbb{Z}_0^+$ （0以上の整数の集合）

要請： $m' \leq L$ である様なNA連結全域部分グラフ $G'=(V,E')$ は存在するかを判定せよ。（ただし $m' = |E'|$ 。）

また最小NA連結問題の問題例をMNAC(G^*, L)と記す。□

グラフ G 上では x,y の連結度は2だが、 V' を縮約して得られたグラフ G' 上では x,y の連結度は3。

図2 縮約によって連結度の変わる例

Fig. 2. An example of changing the connectivity by a contraction.

【定理 1】 最小NA連結問題はNP完全である。□

定理 1 及び後記の定理 2 の証明に使用する、NA連結である重要な必要十分条件を示しておく。

【補題 1】 領域グラフ $G^*=(G,X)$ がNA連結である必要十分条件は、 G の任意の連結成分が、任意の領域内の少なくとも一点を含むことである。

証明) 必要性 (「 G がNA連結」 $\rightarrow$ 「任意の連結成分…一点を含む」) の証明。

対偶を証明する。ある連結成分 G_j が、ある領域 V_i 内の節点を一つも含まないと仮定する。 G_j に含まれる任意の節点 x と V_i に対して、 $\forall y \in V_i, x(\in V)$ が連結でない。よってこの時、 G はNA連結ではない。(必要性の証明了)

十分性 (「任意の連結成分…一点を含む」 $\rightarrow$ 「 G がNA連結」) の証明。

対偶を証明する。 G がNA連結でないと仮定する。すると定義から、 $\exists V_i \in X, \exists x \in V - \{V_i\} \forall y \in V_i$ について x と y が連結でない。 x を含む連結成分を G_j とすると、 G_j は V_i に属する節点を一つも含まないことになる。(十分性の証明了) (証明了)

定理 1 の証明) 最小NA連結問題がNPに属するのは明らか。以下でNP困難性を示す。

既知のNP完全問題である充足可能性問題⁹⁾を帰着する。

充足可能性問題(SAT)

[入力] $U=\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$: ブール変数集合
 $C=\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$: U 上の節の集合

[要請] 論理式 $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_M = 1$ を満足することが可能であるか否かを判定せよ。

図 3 非連結だが、NA連結なグラフの例
 Fig. 3. An example unconnected and NA-connected graph.

充足可能性問題の入力 $SAT(U, C)$, ($U=\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$, $C=\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$) に基づいて、最小NA連結問題の入力 $MNAC(G^*, L)$ を構成し、両問題の解 (yesかnoか) が一致する様にする。

$SAT(U, C)$,

$U=\{u_1, u_2, \dots, u_N\}, C=\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$

$MNAC(G^*, L)$

$V=\{u_1, u_2, \dots, u_N, \neg u_1, \neg u_2, \dots, \neg u_N, C_1, C_2, \dots, C_M, D_1, D_2, \dots, D_M, r_1, r_0\}$

$E=E_1 \cup E_2 \cup E_3$

$E_1=\{e(u_i, r_1), e(\neg u_i, r_1), e(u_i, r_0), e(\neg u_i, r_0) \mid i=1, 2, \dots, N\}$

$E_2=\{e(D_j, r_0) \mid j=1, 2, \dots, M\}$

$E_3=\{e(u, C_j) \mid u \in U \text{ かつ } u \in C_j\}$

$\cup \{e(\neg u, C_j) \mid u \in U \text{ かつ } \neg u \in C_j\}$

$V_i=\{u_i, \neg u_i\}, i=1, 2, \dots, N$

$V_{N+j}=\{C_j, D_j\}, j=1, 2, \dots, M$

$V_{N+M+1}=\{r_1, r_0\}$

$L=2(N+M)$

例としてSATの問題例

$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}, C=\{\{u_1, \neg u_3, \neg u_4\}, \{\neg u_1, u_2, \neg u_4\}\}$

に対して構成したMNACの問題例を図4に示す。

$MNAC(G^*, L)$ がyes $\rightarrow SAT(U, C)$ がyesの証明

$MNAC(G^*, L)$ の条件を満たす全域部分グラフ $G'=(V, E')$ が存在すると仮定する。 $m'=|E'| \leq L=2(N+M)$, $n=2(N+M)+2$ なので、 G' には少なくとも2つ以上の連結成分が存在する。また補題1より、各連結成分は各領域内の節点を少なくとも一つずつ含む。以上のことから、 G' は二つの木

図 4 SATからMNACへの帰着例
 Fig. 4. An example of transforming SAT to MNAC.

(T_1, T_0 とする)より構成される森でなければならない。全ての領域が二つの節点より構成されるので T_1, T_0 は各領域のそれぞれ異なる節点を一ずつ含む。

ここで、 $r_1 \in T_1, r_0 \in T_0$ と仮定して一般性を失わない。 T_1, T_0 の性質より、 $u_i \in T_1$ ならば $\neg u_i \in T_0$ であり、 $\neg u_i \in T_1$ ならば $u_i \in T_0$ である。よってSATにおいて $u_i \in T_1$ ならば $u_i=1$ 、 $\neg u_i \in T_1$ ならば $u_i=0$ とすることができる。 $r_0 \in T_0$ より、任意の $j=1, 2, \dots, M$ に対して $D_j \in T_0$ 。よって $C_j \in T_1$ である。

C_j と r_1 が T_1 の枝と節点を経由して連結であるので、 C_j と接続しているある u_i または $\neg u_i$ が T_1 に含まれる。よって前記のような u_i の決め方をすれば、SATにおいて $C_j=1$ となっている。よって、SAT(U, C)がyesであることが示された。

SAT(U, C)がyes $\rightarrow$ MNAC(G^*, L)がyesの証明

SAT(U, C)の条件を満たす $\{u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*\}$ が存在すると仮定する。

G^* 上の木 T_1, T_0 を構成する。 $r_1 \in T_1, r_0 \in T_0$ とする。任意の $i=1, 2, \dots, N$ について、 $u_i^*=1$ ならば $u_i \in T_1, \neg u_i \in T_0, u_i^*=0$ ならば $\neg u_i \in T_1, u_i \in T_0$ とする。また、任意の $j=1, 2, \dots, M$ に対して $D_j \in T_0$ とする。SATにおいて $C_j=1$ なので、節 C_j に含まれるある変数(u_i または $\neg u_i$)は1であり、つまりMNACにおいて C_j と接続しているある u_i または $\neg u_i$ が T_1 に含まれている。そこで $C_j \in T_1$ とする。この結果得られる T_1, T_0 を $G'=(V, E')$ とする。 G' は G の全域部分グラフであり、その連結成分は T_1, T_0 であり、全ての領域上の点を1つずつ含んでいるので、補題1より、 G' はNA連結である。また、 $|E'|=2(N+M)=L$ 。よってMNAC(G^*, L)はyesである。

(定理1の証明了)

2. 3. 最小NA連結問題の絶対近似解法

定理1により、最小NA連結問題がNP完全であることが示された。しかし、この問題を最適化問題とした場合、とても小さい絶対近似誤差で押さえられる線形時間近似解法が存在する。

【定義】最小NA連結最適化問題(MNACO)

入力：領域グラフ $G^*=(G, X)$

要請：NA連結全域部分グラフ $G'=(V, E')$ のうちで、最小の m' を求めよ。(ただし $m'=|E'|$ 。)

また、最小NA連結最適化問題の問題例をMNACO(G^*)と記す。□

最小NA連結最適化問題は当然NP困難である。しかし、 G が完全グラフの場合は次のような性質がある。

【定理2】 G が完全グラフの時、 $G^*=(G, X)$ 、($X=\{V_1, V_2, \dots, V_H\}$)の最小NA連結全域部分グラフ $G'=(V, E')$ について、 $m'=n-\min(n_i)$ が成立する(ただし $m'=|E'|$)。□

証明) まず $m'=n-\min(n_i)$ を満たす様にNA連結全域部分グラフ G' を構成する。 $h=\min(n_i)$ とおく。各 V_i について任意の分割を、 $V_i^1, V_i^2, \dots, V_i^h$ とする(但し空集合は無いものとする)。 $V_i'=V_i^1 \cup V_i^2 \cup \dots \cup V_i^h$ とする。 V_j' の要素(節点)を連結させる様な G の極小部分木を T_j とする。

$G'=T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_h$ とすれば、補題1より、 G' は G のNA連結全域部分グラフである。 $T_1, T_2, \dots, T_h$ は互いに共通部分を持たないので、 $m'=|T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_h|=n-\min(n_i)$ を満たす。よって $m' \leq n-\min(n_i)$ 。

次に G' が K 個の連結成分 $G_1', G_2', \dots, G_K'$ より構成されるとする。補題1より、 $\forall V_i, \forall G_j'$ について、 $\exists y \in V_i, y \in G_j'$ でなければならない。よって $K \leq \min(n_i)$ 。よって $m' \geq n-K \geq n-\min(n_i)$ 。

故に $m'=n-\min(n_i)$ が成立する。(証明了)

定理2は、節点数(n)と最小節点数領域の含む節点数($\min(n_i)$)が決まれば、領域数や、各領域の含む節点数等と関係なく、最小枝数のNA連結グラフの枝数が決まることを示す。これは最小枝数の連結グラフの枝数が、 $m=n-1$ で与えられることの拡張である。

定理2は一般の G に対する最小NA連結最適化問題の下限を与えているとも考えられる。よってこのことを利用して、近似解法の誤差を評価することができる。

【定理3】最小NA連結最適化問題には絶対近似誤差 $\min(n_i)-K$ (ただし、 K は G の連結成分の数)の線形時間近似算法が存在する。□

証明) G を張る全域極大森を T とすると、 G と T のNA連結性は一致する。よって T はMNACOの実行可能解になる。 T の枝数 m_1 は $m_1=n-K$ である。MNACOの最適解 m' は定理2より $m' \geq n-\min(n_i)$ なので、 $m_1-m' \leq \min(n_i)-K$ 。 G を張る全域極大森 T は $O(m)$ で見つけることができる。(証明了)

定理3より、領域グラフの領域がどう与えられているかに関わり無く、 G の全域極大森を見つけることで、絶対近似誤差が $\min(n_i)-K$ 以下で押さえられている近似解を得ることができる。

3. k-NA連結について

本章ではNA連結を拡張して、 k -NA連結という概念を導入する。領域を考慮した連結性については文献[1]等でも多少触れられているが、そこでは領域に隣接した節点は定義から除外している。ここでは、領域に含まれない任意の点との間の連結度(NA連結度)を定義する。

3. 1. 諸定義

【定義】複数本のパスについて、それらのどの二つのパスも両端の節点を除いて節点を共有しない時、これらのパスは内素であると言う。□

【定義】領域グラフ $G^*=(G,X)$ において、 $x \in V$ と V_i (ただし $x \in V-V_i$) について、 $|E(x,V_i)|=k'$ としたとき、 $\forall W \subseteq V-(\{x\} \cup V_i)$, $|W| < k-k'$ に対し、 G から、 W と W に隣接した枝全て、及び $E(x,V_i)$ を除いてできたグラフ $G'=(V',E')$ において、 x と V_i がNA連結であるならば、 x と V_i は k -NA連結であると言う。また、 k -NA連結である最大の k を x と V_i のNA連結度とし、 $\kappa(x,V_i;G^*)=k$ と表現する。なお、誤解の恐れが無い場合には $\kappa(x,V_i;G)=k$ あるいは $\kappa(x,V_i)=k$ とも書く。(x,y $\in V$ 間の連結度を表す記号 $\kappa(x,y;G)$ をそのまま用いた。)

また、 $\forall x \in V$ と $\forall V_i$ (ただし $x \in V-V_i$) に対して x と V_i が k -NA連結ならば、 G^* は k -NA連結であると言う。また誤解の恐れが無いときには、 G は k -NA連結であるとも言う。□

NA連結の定義において、 $V_i=\{y\}$ と考えたものが、従来から定義されている(節点)連結の概念である。NA連結は(節点)連結の拡張になっている。明らかに、1-NA連結とNA連結は等しい。 k -NA連結には、 k -連結におけるMengerの定理⁽¹⁾⁽⁴⁾から簡単に拡張できる、次の様な性質がある。

【定理4】領域グラフ $G^*=(G,X)$ において、 $x \in V$ と V_i (ただし $x \in V-V_i$) が k -NA連結である必要十分条件は、 x と V_i 間に k 本の内素なパスが存在することである。但し、 x と V_i 間のパスとは、 x と $\exists y \in V_i$ 間のパスのことである。□

証明) $|E(x,V_i)|=k'$ とする。

$k' \geq k$ ならば、 x と V_i は k -NA連結であり、かつ x と V_i 間に k 本の内素なパスが存在する。よって $k' < k$ の場合を示せば良い。

$E_i=E-E(x,V_i)$ とし、 $G_i'=(V,E_i)$ とする。 $G^{*i}=(G_i',X)$ において、 $x \in V$ と V_i が $(k-k')$ -NA連結である必要十分条件が、 x と V_i 間に $k-k'$ 本の内素なパスが存在することであることを示せば良い。

G_i' の V_i を一点 v_i に縮約して得られるグラフを $G_i''=(V_i'',E_i'')$ とおく。すると、 G_i'' において、 x と v_i が $k-k'$ 連結であることと G^{*i} において $x \in V$ と V_i が $(k-k')$ -NA連結であることは同値である。

ここで、Mengerの定理より G_i'' において、 x と v_i が $k-k'$ 連結である必要十分条件は x と v_i 間に $k-k'$ 本の内素なパスが存在することである。これらのパスに対応する G_i' 上のパスは明らかに x と V_i 間の $k-k'$ 本の内素なパスとなる。また、 G_i' 上の x と V_i 間の $k-k'$ 本の内素なパスに対応する G_i'' 上のパスは明らかに x と v_i 間の $k-k'$ 本の内素なパスとなる。

よって、 $x \in V$ と V_i (ただし $x \in V-V_i$) が $(k-k')$ -NA連結である必要十分条件が、 x と V_i 間に $k-k'$ 本の内素なパスが存在することであることが示される。(証明了)

3. 2. 最小k-NA連結問題

【定義】最小 k -NA連結問題(MkNAC)

入力：領域グラフ $G^*=(G,X)$, $L \in \mathbb{Z}_0^+$ 。

要請： $m' \leq L$ である様な k -NA連結全域部分グラフ $G'=(V,E')$ は存在するかを判定せよ。(ただし $m'=|E'|$ 。)

また、最小 k -NA連結問題の問題例をMkNAC(G^*,L)と記す。□

最小 k -NA連結問題は最小NA連結問題を部分問題として含むので、定理1よりNP完全であることが分かる(与えられた領域グラフが k -NA連結であることの判定は多項式時間で可能)。本問題は最小 k -連結問題(k -NA連結を k -連結に置き換えた問題)の拡張とも考えられるが、この最小 k -連結問題が既にNP完全である(ハミルトン閉路問題[3]を含む)。よって最小NA連結問題の様に最適化問題と考えると近似算法の可能性を検討する。最小 k -連結最適化問題には最小NA連結最適化問題の様な絶対近似算法の存在は知られていない。しかし、次の様な性質を利用した、相対近似算法が知られている[2]。

【定義】グラフ $G=(V,E)$ に対し、全域部分グラフ $G'=(V,E')$ で、 $\forall x,y \in V$ について $\kappa(x,y;G') \geq \min(k, \kappa(x,y;G))$ を満たすものを、 k -連結性を保存するグラフと呼ぶ。また k -連結性を保存するグラフで枝数が kn 以下なものを k -連結性を保存する疎なグラフと呼ぶ。

【定理5】[2]任意のグラフ $G=(V,E)$ 、任意の整数 k に対し、 k -連結性を保存する疎なグラフ $G'=(V,E')$ が存在し、そのうちのあつ一つを $O(m)$ で見つけることができる。□

グラフが k -連結であるためには、各節点に k 本以上の枝が接続している必要があるので、最小 k -連結最適化問題の解の下限は $\lceil kn/2 \rceil$ ($\lceil \cdot \rceil$ は小数切り上げ)である。故に、定理5で得られる G' は、相対近似誤差2の近似解である。定理5の性質を用いれば、任意のグラフに対してグラフの連結度を落とさずに、疎なグラフに変形することが、 $O(m)$ で出来るのである。

k -NA連結に対しても、この様な都合の良い部分グラフが存在することを以下で示す。

【定義】領域グラフ $G^*=(G=(V,E),X)$ 、任意の整数 k に対し、全域部分グラフ $G'=(V,E')$ で、 $\forall x \in V$ と $\forall V_i$ (ただし $x \in V-V_i$) について $\kappa(x,V_i;G') \geq \min(k, \kappa(x,V_i;G,X))$ を満たすものを、 k -NA連結性を保存するグラフと呼ぶ。また k -NA連結性を保存するグラフで枝数が kn 以下なものを k -NA連結性を保存する疎なグラフと呼ぶ。

【定理6】領域グラフ $G^*=(G,X)$ に対し、グラフ G の任意の k -連結性を保存するグラフ G' を考えると、 G' は k -NA連結性を保存するグラフである。

定理6は、連結度を保存すればNA連結度も保存することを示す。定理6が成立すれば、定理5で記した文献[2]の様な高速アルゴリズムをそのままNA連結に適用することができる。

まず準備として次の補題を示しておく。

【補題2】 $G=(V,E)$ 、 k -連結性を保存する任意のグラフを $G'=(V,E')$ とする。このとき $e(x,y) \in E$ かつ $\kappa(x,y;G) \leq k$ ならば $e(x,y) \in E'$ である。

証明) $\kappa(x,y;G) \leq k$ かつ $e(x,y) \in E-E'$ と仮定する。

$\kappa(x,y;G) \leq k$ より $\kappa(x,y;G') = \kappa(x,y;G)$ 。 $E'' = E' \cup \{e(x,y)\}$ 、 $G''=(V,E'')$ とする。

明らかに $\kappa(x,y;G'') = \kappa(x,y;G') + 1$ 。

また $E'' \subseteq E$ より $\kappa(x,y;G'') \leq \kappa(x,y;G)$ 。

よって $\kappa(x,y;G) = \kappa(x,y;G') > \kappa(x,y;G'') \geq \kappa(x,y;G)$ となり矛盾。よって題意が示された。(証明了)

定理6の証明) 題意が成立しなかったと仮定する。つまり、ある領域グラフ $G^*=(G=(V,E),X)$ 、整数 k 、 k -連結性を保存するグラフ $G'=(V,E')$ に対し、 $\exists x \in V, \exists V_i$ (但し $x \in V-V_i$) で $\kappa(x,V_i;G^*)=k_1 \leq k$ かつ $\kappa(x,V_i;(G',X))=k_1' < k_1$ が成立すると仮定する。

明らかに、 $\forall y \in V_i, \kappa(x,y;G) \leq \kappa(x,y;G^*)=k_1 \leq k$ 。

よって補題2より $E(x,V_i) \subseteq E'$ 。

$|E(x,V_i)| = k_2$ とする。

$E(x,V_i) \subseteq E'$ より $k_2 \leq k_1' < k_1$ 。

$F = E - E(x,V_i)$ 、 $G_i=(V,F)$ 、 $F' = E' - E(x,V_i)$ 、 $G_i'=(V,F')$ とすると、

$\kappa(x,V_i;(G_i',X)) = k_1' - k_2$ 。

よって $|W| = k_1' - k_2$ 、 $W \subseteq V_i$ 、 $(\{x\} \cup V_i) \cap W = \emptyset$ である様な、 G_i' において x と V_i を分離する節点部分集合 W が存在する。 $G_i'-W$ において x と同じ連結成分に属する節点集合を V^x 、それ以外の節点集合を V^y とおく ($V^y = V - W - V^x$ 、図5参照)。

$\kappa(x,V_i;(G_i',X)) = k_1' - k_2$ より、 G_i' 上に x と V_i の間に $k_1' - k_2$ 本の内素なパス $p_1, p_2, \dots, p_{k_1'-k_2}$ が存在する。

$k_1 - k_2 > k_1' - k_2$ より、 $p_1, p_2, \dots, p_{k_1'-k_2}$ のうち、少なくとも一つは W に含まれる節点を全く経由しない。

図5 V^x, V^y, W の説明図

Fig. 5. An illustration of V^x, V^y, W .

そのパスを p_i とする (一般性は失わない)。

p_i 上の節点を x 側から順に $x_0, x_1, x_2, \dots, x_v$ (但し $x=x_0, x_v \in V_i$) と記す。 $x_0 \in V^x, x_v \in V^y$ なので p_i 上のある枝 $e(x_j, x_{j+1})$ について、 $x_j \in V^x, x_{j+1} \in V^y$ が成立する (図6参照)。このとき、 $G_i'-W$ において、 x_j と x_{j+1} は異なる連結成分に属する。

故に $\kappa(x_j, x_{j+1}; G_i') \leq k_1' - k_2$ 。

よって $\kappa(x_j, x_{j+1}; G') \leq k_1' < k_1 \leq k$ 。

G' は k -連結性を保存するので、 $\kappa(x_j, x_{j+1}; G) \leq k_1' < k$ 。

よって補題2より $e(x_j, x_{j+1}) \in E'$ でなければならないが、 $e(x_j, x_{j+1}) \in E - E(x, V_i)$ 、 $x_j, x_{j+1} \in V - W$ なので、これは $G_i'-W$ において、 x_j と x_{j+1} が異なる連結成分に属することと矛盾する。

(証明了)

4. まとめ

本稿では、現実の通信網の形態を巧くモデル化できる、領域グラフという概念を導入し、節点と領域間の連結度であるNA連結度を定義した。NA連結の概念を用いることにより、通信網の強度をより正確に測ることができる。そして本稿では、NA連結度に関するいくつかの問題がNP完全になること、しかしそれらの問題に絶対近似あるいは相対近似誤差のおさえられる高速 ($O(m)$) 解法が存在することを示した。そのために「 k -連結性を保存する部分グラフは、 k -NA連結性も同時に保存する」という定理を証明した。連結性を保存する全域部分グラフについては2連結に限れば、極小なものを求めるアルゴリズム⁽⁵⁾や相対近似誤差が5/3あるいは3/2のものを求めるアルゴリズム⁽⁶⁾⁽⁷⁾が提案されている。これらも2-NA連結に適用できることが上記の定理によって保証される。

本稿では触れなかったが、これらの法則は領域間の連結度にも拡張できる。また、NA連結は節点連結の拡張だが、辺連結の拡張、あるいは混合カット⁽⁸⁾⁽⁹⁾の拡張としてのNA連結も考えられ、これらにも同様の法則が成立すると思われる。これらの証明もほぼ出来ているので、機会があれば別途報告するが、本質的には本稿で示した定理と変わらない。

図6 p_i, x_j, x_{j+1} の説明図

Fig. 6. An illustration of p_i, x_j, x_{j+1} .

NA連結が定義されたことによって、連結性に関する諸問題がNA連結に拡張される。例えば、NAカットの様な概念を定義し、最小NAカットを計算する高速アルゴリズムの存在が予想される。通信網では、この他に経路長の制限や、経路選択方式に依存する制約が加わることがあり⁽¹⁰⁾、それらを考慮した連結度の検討⁽¹¹⁾も今後行なっていく必要がある。

謝辞 貴重なご助言を頂いた、京都大学工学部の永持仁助教授ならびにNTT通信網総合研究所の井上明也主任研究員に感謝いたします。

伊藤 大雄

1961年7月23日生まれ。85年京大数理工学卒。87年京大大学院工学研究科修士課程了。同年NTT基礎研究所入社。以来、グラフ・ネットワーク理論及び、通信網の制御法、管理法の研究に従事。現在、NTT通信網総合研究所通信トラヒック研究部、研究主任。日本OR学会、電子情報通信学会、情報処理学会会員。

文 献

- (1) フランク・ハラリイ著、池田貞雄訳：「グラフ理論」，共立出版 (1971)。
- (2) Nagamochi H. and Ibaraki T.: "A Linear-Time Algorithm for Finding a Sparse k -Connected Spanning Subgraph of a k -Connected Graph," *Algorithmica*, No. 7, pp. 583-596 (1992).
- (3) Garey M.R. and Johnson D.S.: "Computer and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness," Freeman, San Francisco (1979).
- (4) Menger K.: "Zur Allgemeinen Kurventheorie," *Fund. Math.* No. 10, pp. 96-115 (1927).
- (5) Han X., Kelson P., Ramachandran V. and Tarjan R. E.: "Computing Minimal Spanning Subgraphs in Linear Time," *Proc. 3rd ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, pp. 146-156 (1992).
- (6) Khuller S. and Vishkin U.: "Biconnectivity Approximations and Graph Carvings," *Proc. 24th ACM Symp. Theory of Computing*, pp. 759-770 (1992).
- (7) Garg N., Santosh V. S. and Singla A.: "Improved Approximation Algorithms for Biconnected Subgraphs via Better Lower Bounding Techniques," *Proc. 4th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, pp. 103-111 (1993).
- (8) Beineke L. W. and Harary F.: "The Connectivity Function of a Graph," *Mathematika*, No. 14, pp. 197-202 (1967).
- (9) 永持仁：「グラフの最小カットについて」，藤重悟編：「離散構造とアルゴリズムII」，第4章，近代科学社、(1993)。
- (10) 井上明也，伊藤大雄：「通信網管理への数理計画法の適用について」，第4回RAMPシンポジウム論文集，pp. 57-65 (1992)。
- (11) 佐竹孝，伊藤大雄：「節点・領域間経路の性質と袋小路の解消法」，OR学会秋季研究発表会論文集，pp. 46-47 (1993)。

(1993年8月25日受付、同年11月1日再受付)