キーワード

デジタル制御, サンプル点間応答, H_2 問題, リカッチ方程式, 離散時間問題

杉 本 謙 二

岡山大学

1. はじめに

H_∞ 制御理論の飛躍的な発展に伴い, 我々が慣れ親しんだ LQ 設計の手法が H_2 制御として装いも新たに登場してきた⁽¹⁾。最近ではさらに, サンプル値制御における直接的な H_2 設計理論も大きく進展し, 実用性の高い設計法が完成されつつある^{(2)~(6)}。

本稿では原氏による「離散時間問題」の解説⁽⁵⁾を踏まえ, 等価変換された後の離散時間 H_2 制御問題の解法について解説する。この問題は従来の離散型 LQ 制御やカルマンフィルタとほぼ同じ手順で解けるが, サンプリング時に雑音加わらない限り⁽⁴⁾, Riccati 方程式に必ず特異な重み行列が現れる。類似の状況は測定雑音のないカルマンフィルタでも現れ⁽⁶⁾, 離散時間系に特有の現象であるが, 今まであまり注意されていなかった。本稿ではこの特異な重みに関する Riccati 方程式の挙動に焦点をあてて解説する。

以下, まず 2 節で離散時間 H_2 制御問題を定式化し, 3 節で対応する Riccati 方程式の性質について検討した上で, 4 節で Riccati 解を用いて最適制御を求める。さらに, 5 節で具体的な計算法を紹介する。

2. 問題の設定

まず, サンプル値系における H_2 最適制御の問題設定と離散時間問題への等価変換について簡単に復習しておく。考察する問題は, 与えられた連続時間系の制御対象に評価関数として連続時間の H_2 ノルムを採用し, それをサンプル値制御によって最小化するというものである。このような定式化により, サンプル点間応答まで含めた制御系の自然な解析と設計が可能になる。具体的な評価関数の形や物理的意味についての詳細は原氏の解説⁽⁵⁾を参照されたい。

しかも, この問題はある種の等価変換を施すことにより, (純粋な) 離散時間での H_2 制御問題に帰着させて解くことができる⁽⁵⁾。その結果, 従来から知られていた離散時間での解法がそのまま利用できることになり, 新しい有用な問題設定でありながら解くのは容易である。

図 1 離散時間一般化プラント

本稿では, 上記のサンプル値制御問題を離散時間に等価変換した後の設計問題を扱う。すなわち, 純粋な離散時間系として記述された一般化プラント

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \\ v(t) &= C_1x(t) + D_{12}u(t), \quad \dots\dots\dots (1) \\ y(t) &= C_2x(t) \end{aligned}$$

に対する H_2 最適制御について説明する。ここに t は時間を表す整数であり, x, w, u, v, y は順に状態 (n 次元), 外部入力 (m_1 次元), 制御入力 (m_2 次元), 制御出力 (p_1 次元), 観測出力 (p_2 次元) を表すベクトルとする。周波数領域の表現で不定元 z を用いるため, 他の文献と異なり制御出力は v で表している。伝達特性で表せば, 系 (1) は

$$\begin{bmatrix} v \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。以後, このような簡約表記法⁽¹⁾を用いる。

信号 y を処理して信号 u を生成する離散時間制御器 $K(z)$ を与え, ループを閉じたときの w から v への伝達行列を $T_{vw}(z)$ とする (図 1 参照)。 H_2 制御問題は, 閉ループ系の安定性を保ちつつ, H_2 ノルム

$$\|T_{vw}(z)\|_2 = \left\{ \int_0^{2\pi} \text{trace}(T_{vw}(e^{jw})T_{vw}^*(e^{jw}))dw \right\}^{1/2}$$

を最小化する $K(z)$ を設計する問題である。

以下, 本稿を通じて次の仮定

A1. (A, B_2) は可安定, (A, C_2) は可検出である

が満たされるものとする。これらの定義は, 安定領域が単位円内部になる点を除けば連続時間でのそれと同じである^{(7)~(9)}。

Digital Control.

Ⅳ. H_2 -Type Optimal Control II: Solution to the Discrete-Time Problem.

By Kenji Sugimoto (Okayama University)

周知のように、一般化プラント(1)式が可安定・可検出な連続時間系をサンプリングして得られたものであれば、ほとんど全てのサンプル周期に対してA1は満たされる。また、A1は安定化制御器 $K(z)$ が存在するために必要な条件であるから、この仮定を緩めて一般化することはできない。一方、評価関数の取り方と密接に関連する (A, B_1) や (A, C_1) の条件については後ほど検討する。

3. Riccati 方程式の性質

H_2 制御問題の解(最適制御)は離散時間型の Riccati 方程式を解くことにより得られる。そこで、前節の設定からしばらく離れ、Riccati 方程式に関する一般的性質を調べておこう。

いま、適当なサイズのパラメータ行列 A, B, C, D が与えられたとき、対称行列 X を独立変数とする行列値関数

$$\begin{aligned} \text{Ric}(A, B, C, D) &:= A^T X A - X + C^T C - \\ &\quad (A^T X B + C^T D)(D^T D + B^T X B)^{-1} (B^T X A + D^T C) \end{aligned} \quad (3)$$

を考えると、Riccati 方程式は $\text{Ric}(A, B, C, D) = 0$ と書ける。ここで、 $V^\dagger$ は V の疑似逆行列⁽¹⁰⁾を表す。

$D^T D > 0$ なら、任意の $X(\geq 0)$ に対して $D^T D + B^T X B$ は正定であるので、 $\dagger$ は $^{-1}$ で置き換えることができる。一方、サンプル値制御系を等価変換した離散時間系では多くの場合、(2)式のように直達項の一部が0になり、その結果 $D=0$ の Riccati 方程式を扱う必要が生じる(4節参照)。そこで、議論に一般性を持たせるため疑似逆行列を用いるのが慣例であるが⁽¹¹⁾、この演算は数値的に不安定なので計算には注意を要する。ただし、実際には $D=0$ でも多くの場合、 $D^T D + B^T X B$ は正定となる(命題1)。

なお、従来の離散時間 LQ 制御に現れる Riccati 方程式も上の定式化に含まれることに注意しよう。すなわち、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} \quad Q \geq 0, R > 0$$

なる線形2次評価関数に対応する Riccati 方程式は、

$$\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

とおいたときの $\text{Ric}(A, B, C, D) = 0$ に一致する。 $(x$ と u の干渉項 $S=0$ の場合である。)

よく知られているように、このような標準的な LQ 制御では可安定・可検出の仮定のもとで Riccati 解が一意的に存在して閉ループ系は安定である⁽⁸⁾⁽¹²⁾。Riccati 方程式は H_∞ 制御でも利用されるが、準最適解の存在がパラメータ γ の値に依存し、数値計算によってのみ判定できる⁽¹⁾のに対し、LQ 制御では解の存在が(この条件の下で)保証される。

ところが $D=0$ の時には、 (A, B) が可安定、 (A, C) が可検出であっても、 $\text{Ric}(A, B, C, D) = 0$ の解は一意的とは限らない。例えば

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

のとき、 $\text{Ric}(A, b, c, 0) = 0$ には

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

の2つの準正定解が存在し、 X_1 のみが安定化解である。この原因は、一意性は Lyapunov 方程式に帰着させて示すことが多い⁽⁸⁾が、その際 $D^T D > 0$ でないと閉ループ系が一般に可検出でなくなるためである。

一般の重みに対する解の存在と一意性、安定性については、最近の研究で次のような結果が得られている。(一部、修正した形で述べる。) まず、この定理に限り、準正定行列 V に対して $W := V^{1/2}$ は、 $W^2 = V$ を満たす対称行列と定義する。

定理 1⁽¹³⁾ 可安定な対 (A, B) と任意の行列 C, D を考える。このとき、Riccati 方程式

$$\text{Ric}(A, B, C, D) = 0 \quad (5)$$

の準正定解 X で次の性質をもつものが存在する。

$$\begin{aligned} D_X &:= (D^T D + B^T X B)^{1/2}, \\ C_X &:= D_X^* (B^T X A + D^T C) \end{aligned} \quad (6)$$

とおくとき、ある行列 F_1 が存在して、

$$F := D_X^* C_X - (I - D_X^* D_X) F_1 \quad (7)$$

が安定化ゲインとなる。しかも、このような条件を満たす準正定解 X は一意的である。□

(7)式右辺の第2項は、 $D_X V = 0$ となる行列 V を表している。つまり、 D_X が正定でないためにゲインに不定性が残る、第1項だけでは安定性が保証されないの、それを調整する役割を果たしている。特に D_X が正定の場合は、(7)式は第1項のみが残る、いわゆる LQ 最適ゲイン $F := (D^T D + B^T X B)^{-1} (B^T X A + D^T C) \dots (8)$ に一致する。(が、その場合でも一意性は一般に成立しないので、定理は有用である。)

定理1の証明は文献⁽¹¹⁾での議論に帰着すると書かれており、この古典的な記事では Riccati 差分方程式の極限を用いて上の定理(の原型)を証明しているが、今となっては迂遠に感じられる。そこで、簡単のため B が列フルランクをもち、

$$\begin{bmatrix} A - e^{j\omega} I & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (9)$$

が任意の $\omega \in [0, 2\pi]$ に対してフルランクという仮定を追加すれば、以下のようにして示せる。

定理1の略証 まず、入力数 $m \leq$ 出力数 p の場合を考える。 $A - BF$ を安定にするゲイン F の全体を $\mathcal{F}$ で表わす。これは有界な開集合であり空ではない。写像

$$T: \mathcal{F} \rightarrow \|(C - DF)(zI - A + BF)^{-1}\|_2$$

は $\mathcal{F}$ 上で連続であり、その値の全体は非負なので当然、下に有界である。よって

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(F_k) = \inf \{T(F); F \in \mathcal{F}\}$$

なる列 $F_1, F_2, \dots$ が存在する。その中から収束する部分列を取り、その極限を F と置けば、 F は $\mathcal{F}$ の触点である。ところが、零点の条件(9)式より

$$\begin{bmatrix} A-BF-\lambda I \\ C-DF \end{bmatrix} x=0, x \neq 0$$

なる λ は単位円周上にないから、もし F が $\mathcal{G}$ の境界点なら $\{T(F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ は発散してしまい矛盾が生じる。よって、 $F \in \mathcal{G}$ であり、 F は $T(F)$ の最小値を与える。

一方、 $m > p$ のときは、状態フィードバックで $m-p$ 個の極を任意の点に配置し、かつ不可観測にできる⁽¹⁴⁾。そこで、予めこれらを安定領域内に移した上で、残りの部分空間に対して同様の議論を適用すればよい。

次に、 F が (7) 式を満たすことを示そう。 F の安定性により Lyapunov 方程式

$$X = (A-BF)^T X (A-BF) + (C-DF)^T (C-DF) \cdots \cdots (10)$$

の一意解 $X \geq 0$ が存在する。 F は最適なので、上式の両辺の trace を取り F で偏微分すれば、左辺 = 0 となることが必要である*。そこで、その右辺を計算し整理して

$$(B^T X B + D^T D) F = B^T X A + D^T C \cdots \cdots (11)$$

が得られる。よって (7) 式が示せた。また、これを (10) 式に代入すれば、 X が Riccati 方程式を満たすことが分かる。

最後に一意性を示そう。別の Riccati 解 $\tilde{X} \geq 0$ が存在し、

$$\tilde{F} := D_{\tilde{X}}^T C_{\tilde{X}} - (I - D_{\tilde{X}}^T D_{\tilde{X}}) \tilde{F}_1 \cdots \cdots (12)$$

が安定となる $\tilde{F}_1$ が存在したと仮定する。一般に、 $\tilde{F}$ に関する不定方程式 $D_{\tilde{X}} \tilde{F} = C_{\tilde{X}}$ 、つまり

$$(B^T \tilde{X} B + D^T D) \tilde{F} = B^T \tilde{X} A + D^T C \cdots \cdots (13)$$

は可解である。なぜなら、

$$u^T (B^T \tilde{X} B + D^T D) = 0 \Rightarrow \tilde{X}^{1/2} B u = D u = 0 \\ \Rightarrow u^T (B^T \tilde{X} A + D^T C) = 0$$

であるから、(13) 式左辺の係数行列の左零空間が右辺のそれに含まれるからである。従って、(12) 式の $\tilde{F}$ は (13) 式を満足する。この式と $\tilde{X}$ が Riccati 方程式を満たすことから、Lyapunov 方程式

$$\tilde{X} = (A - B\tilde{F})^T \tilde{X} (A - B\tilde{F}) + (C - D\tilde{F})^T (C - D\tilde{F})$$

が成立する。この式と (10) 式を使って少し計算すれば**

$$X - \tilde{X} = (A - BF)^T (X - \tilde{X}) (A - BF) + (F - \tilde{F})^T (B^T \tilde{X} B + D^T D) (F - \tilde{F})$$

となるので、 $A - BF$ の安定性により $X - \tilde{X} \geq 0$ である。ところが、 X と $\tilde{X}$ を入れ換えても同じ理由から $\tilde{X} - X \geq 0$ が成り立つので、 $\tilde{X} = X$ である。□

なお、通常の LQ 制御に現れる重み (4) 式に対しては、(9) 式は縦長である。さらに $R > 0$ であれば

$$\forall \omega \text{ に対して (9) 式が列フルランク}$$

$$\Leftrightarrow \text{単位円周上に不可観測な極がない}$$

が示せるので、略証で設けた仮定はかなり緩い。

次に、上の定理では D_X が正則とは限らないために取り扱いが複雑となっていた。実は、ある緩い条件のもとで D_X は正則となるので、議論は簡単化される。

命題 1⁽¹¹⁾

$G(z) := C(zI - A)^{-1} B + D$ が左可逆なら、 $\text{Ric}(A, B, C, D) = 0$ の準正定解 X は

$$B^T X B + D^T D > 0$$

を満たす。従って、最適ゲインは (8) 式で表せる。□

直観的にいえば、たとえ $D = 0$ でも C が内部の状態を表す十分な情報量をもっていれば $B^T X B > 0$ が成立することになる。

4. 最適制御の導出

本節では、2 節で設定した H_2 制御問題に戻って、最適な制御器を導出する。

定理 2⁽¹³⁾

系 (A, B_2, C_1, D_{12}) と系 $(A, B_1, C_2, 0)$ は単位円周上に零点をもたないと仮定する。このとき、離散時間プラント (1) 式に対する H_2 最適制御器 $K(z)$ が存在し、その一つは次の手続きで求められる。

① $\text{Ric}(A, B_2, C_1, D_{12}) = 0$ の準正定解 X と (6) 式の C_X 、 D_X を求め、 $C_X = D_X F$ を満たしかつ $A - B_2 F$ を安定にする F を求める。

② $\text{Ric}(A^T, C_2^T, B_1^T, 0) = 0$ の解 Y を求め、 $C_Y = L D_Y$ を満たし、かつ $A - L C_2$ を安定にする L を求める。

③ $K(z) = -F(zI - A + B_2 F + L C_2)^{-1} L$ とおく。□

なお、評価関数の重みに対応する C_1, B_1 が適切に選ばれ前節の命題 1 の条件が満足されれば、 D_X や D_Y は正定となるので (8) 式で F を求めれば十分である。 L についても同様である。

命題 2

(1) 式において、特に C_2 が正方で、さらに正則であるならば、 H_2 最適制御は定理 2 の F のみを使って

$$u = -F C_2^{-1} y = -F x \text{ で与えられる。} \quad \square$$

命題 2 は状態フィードバックが可能な場合に相当する。

一方、定理 2 の制御器の内部状態を $\hat{x}$ で表せば

$$u(t) = -F \hat{x}(t), \\ \hat{x}(t+1) = (A - B_2 F - L C_2) \hat{x}(t) + L y(t) \\ = A \hat{x}(t) + B_2 u(t) + L(y(t) - C_2 \hat{x}(t)) \cdots \cdots (14)$$

となる。これはオブザーバの構造と同じであるから、最適制御 $K(z)$ はカルマンフィルタ (確定的環境では全次元最適オブザーバ) + 状態フィードバックという標準的な制御器の構造をもつことを意味する。いい替えれば、制御ゲイン F と観測ゲイン L は独立に設計できる (図 2 参照。ここに、 Δ は遅延素子を表す。)

定理 2 と命題 2 の証明は連続時間 H_2 制御⁽¹¹⁾ とほぼ同じであるが、簡単に示しておく。まず、有理関数行列 $U(z)$ に対して $U^*(z) := U^T(z^{-1})$ と定義する。次の補題は直接の計算で確認できる。

* 文献⁽¹⁵⁾ の論法を参考にした。

** 文献⁽⁶⁾、定理 2.12 の証明を参考にした。

図 2 H_2 最適制御の構成

補題

定理 1 の仮定のもとで、

$$A_F := A - B_2 F, \quad C_F := C_1 - D_{12} F,$$

$$U(z) := \begin{bmatrix} A_F & B_2 \\ C_F & D_{12} \end{bmatrix}, \quad G_c(z) := \begin{bmatrix} A_F & I \\ C_F & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

とおくと、

$$U^* U = D_{12}^* D_{12} + B_2^* X B_2, \quad U^* G_c \in RH_2^+ \quad (16)$$

が成立する。また双対的に $A_L := A - L C_2$ とおくと

$$V V^* = C_2 Y C_2^*, \quad G_f V^* \in RH_2^+ \quad (17)$$

$$V(z) := \begin{bmatrix} A_L & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_f(z) := \begin{bmatrix} A_L & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

も成立する。

定理 2 と命題 2 の略証⁽¹⁾ まず制御変数の変換 $\xi := u + Fx$ を行うと、(15), (18) 式の記号を用いて

$$v = G_c(z) B_1 w + U(z) \xi$$

と表せる。よって補題により

$$\min \|T_{vw}\|_2 \Leftrightarrow \min \|T_{\xi w}\|_2$$

が成立する（内積の計算によるが詳細は略す）。一方、

$$\xi = u + Fx = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ F & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

であるので、 C_2 が正則なら $u = -Fx$ なる制御で $T_{\xi w} = 0$ にできる。よって命題 2 が示せた。次に定理 2 を示すため、制御変数を再び変換し $\eta = u - K(z)y$ とおく。（これは図 3 の構成を考えるのと等価である。）

任意の安定化制御 $\eta = \bar{K}(z)y$ を施したときの $\|T_{\xi w}\|_2$ が $\bar{K}(z) = 0$ で最小となることを示せばよい。いま

$$\begin{bmatrix} \xi \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \eta \end{bmatrix} \quad (19)$$

とおくと、

$$T_{\xi w} = \bar{G}_{11} + \bar{G}_{12}(I - \bar{K}\bar{G}_{22})^{-1}\bar{K}\bar{G}_{21} \quad (20)$$

である。また

図 3 制御変数の変換

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2 F & B_1 & B_2 \\ LC_2 & A - B_2 F - LC_2 & 0 & 0 \\ F & -F & 0 & I \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A - B_2 F & -B_2 F & B_1 & B_2 \\ 0 & A - LC_2 & -B_1 & -B_2 \\ 0 & -F & 0 & I \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と計算できる。ただし最右辺では x と $e := \bar{x} - x$ を状態変数に取った。そこで補題の記号を使うと

$$\bar{G}_{11} = -F G_f, \quad \bar{G}_{21} = \begin{bmatrix} A - B_2 F & L \\ C_2 & I \end{bmatrix} V$$

となるので、

$$\min \|T_{\xi w}\|_2 \Leftrightarrow \min \|\bar{G}_{12}(I - \bar{K}\bar{G}_{22})^{-1}\bar{K}\bar{G}_{21}\|_2$$

となり、 $\bar{K} = 0$ のとき最適である。ここで、直交性を示す際に $\bar{G}_{12}(I - \bar{K}\bar{G}_{22})^{-1}\bar{K} \in RH_\infty$ を用いたが、これは $\bar{K}$ が系を内部安定にすることから従う。□

5. Riccati 方程式の数値解法

本節では具体的な Riccati 解 X の計算法を述べる。まず、対応する Riccati 差分方程式の解を逐次的に計算し、その極限を X とするという「逐次解法」は、最近では収束速度の面から（そのままの形では）推奨されていない⁽⁹⁾⁽¹²⁾。つぎに非逐次的な解法として、（一般化）固有値を利用する以下の 3 つの方法を紹介しよう。本節では $R := D^* D, Q := C^* C, S := C^* D$ とおく。また、始め 2 つの方法では $S = 0$ としているが、そうでない場合への拡張もできる⁽¹²⁾。

(I) Hamilton 行列

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^*A^*Q & -BR^{-1}B^*A^* \\ -A^*Q & A^* \end{bmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを用いる方法。

これは連続時間の場合と似ており親しみやすいが、 A や R の正則性が必要であり、逆行列を陽に計算するという余分の手間がかかる。そのため、これを改良した次の手法が多く用いられてきた⁽¹²⁾⁽¹⁶⁾。

(II) 一般化固有値問題

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B})x = 0, \quad (21)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & BR^{-1}B^* \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \quad (22)$$

の安定固有値に対応する n 本の固有ベクトルないし主ベクトルを並べて

$$[x_1, \dots, x_n] = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{\scriptsize } n \text{ 行} \\ \text{\scriptsize } n \text{ 行} \end{matrix} \dots\dots\dots (23)$$

と分割し、 $X := VU^{-1}$ とおく方法⁽¹⁸⁾。

このように、方法(II)では A の正則性は要求されないが、 R の逆行列は必要となる。

さて、 $R=0$ の場合でも粗い近似解でよければ、十分小さな $\epsilon > 0$ を取って $R := \epsilon I$ とおけば、方法(I)や(II)が適用できることはいうまでもない。あるいは仮想的な測定ノイズを導入して特異でない問題に置き換えてもよい。しかし、数値的な悪条件は避けられないし、それで得られた解が真の解にどの程度近いかわかるのは難しい。ここでは、 R の逆行列を利用しない次の方法を紹介する。

(III) 一般化固有値問題 (以後、「一般化」を略す。)

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B})x = 0, \dots\dots\dots (24)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ -Q & I & -S \\ S^T & 0 & R \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A^T & 0 \\ 0 & -B^T & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

の安定固有値に対応する n 本の固有ベクトルないし主ベクトルを並べて

$$[x_1, \dots, x_n] = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{\scriptsize } n \text{ 行} \\ \text{\scriptsize } n \text{ 行} \\ \text{\scriptsize } m \text{ 行} \end{matrix} \dots\dots\dots (26)$$

と分割し、 $X := VU^{-1}, F := -WU^{-1}$ とおく方法⁽¹⁷⁾。

方法(III)では最適ゲイン F も同時に得られる点が興味深い。上記の方法(I)～(III)のうち、行列のブロック構造は(III)が最も単純であるが、サイズは $(2n+m) \times (2n+m)$ で、最も大きい。この方法(III)を少し詳しく説明しよう。まず、正則性条件

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B}) \neq 0 \dots\dots\dots (27)$$

は満たされるものと仮定する。この条件は前節の命題1の条件と同値であることが示せる。従って、この方法では $R + B^T X B$ が正定の場合のみ扱うことになる。

このとき、単位円周上に (A, B, C, D) の零点がなければ (ただし、 $Q = C^T C, R = D^T D, S = C^T D$ とする)、(24)式の固有値問題について次が成立する。

- ① 単位円周上の固有値は存在しない。
- ② λ が固有値なら $1/\lambda$ も固有値である。
- ③ 無限遠点に (重複度を込めて) 少なくとも m 個の固有値がある。

よって、安定領域 (単位円内) に n 個の固有値が存在する。このとき、(26)式の行列が取れることを示しておく。

方法(III)の証明

まず、定理1により Riccati 解 X と安定化ゲイン F が存在する。1次多項式行列 $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B}$ の左右からそれぞれ正則な定数行列を掛けて整理すれば

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -(A-BF)^T X & I & 0 \\ B^T X & 0 & I \end{bmatrix} (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B}) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ X & I & 0 \\ -F & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BF-\lambda I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I - \lambda(A-BF)^T \\ 0 & \lambda B^T & R + B^T X B \end{bmatrix}$$

が得られる。ここで X が Riccati 方程式を満たすことと (8)式を用いた。 $A-BF$ が安定なので、 $\text{image}(I, 0, 0)^T$ が右辺の行列の安定な固有空間を表す。従って、元の行列 $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B}$ の安定な固有空間は、 $\text{image}(I, X, -F)^T$ である。よって(26)式はこの空間の基底なので、 U は正則となり $X = VU^{-1}, F = -WU^{-1}$ が成立する。□

最後に、一次独立な固有ベクトルが n 個に足りない場合について説明しておこう。このような場合、数値的には Schur の方法が推奨されている⁽⁹⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁸⁾。これは $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{B}$ に左右から直交行列 Q, Z を掛けて同時にブロック上三角化し (Schur 行列⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾に相当)、安定固有値に対応するブロックから X を構成するというもので、条件数を悪化させないため固有値が重複 (ないしは近接) する場合でも精度よく計算できる。上記の文献では(II)について述べられているが、(III)でも同様である。

ところが、これを適用するには安定固有値に対応するブロックを左上に配置する必要があるが、通常の数値計算ソフトで行列を上三角化する場合 (たとえば QZ 法)、そのような恣意的な配置はできない。そこで、さらに直交変換を繰り返して左上に安定なものを移動させるというアルゴリズム⁽¹⁹⁾を用いねばならないが、手続きはかなり煩雑である。

したがって、このような場合に効率よく (しかも先に触れたような近似解法によらず) Riccati 解を得る方法の開発が望まれる。

また、命題1の条件が満たされないときは、方法(III)ですら適用できないことを注意しておく。このときは、例えば逐次解法などを用いて Riccati 方程式を解かざるを得ない。

6. おわりに

離散時間 H_2 最適制御の解法を理論面と数値解法の両面から述べたつもりであるが、不十分な記述に終わった箇所も多い。また、離散時間制御にのみ終始し、本来のテーマであるサンプル値制御についてはあまり議論できなかった。詳しくは下記の文献にあたっただけであれば幸いである。

Riccati 方程式は H_∞ 準最適制御における中心解でも (少し異なった形で) 用いられる。その意味で両手法には密接な関連があり、DGKF と呼ばれる基本的な論文⁽¹⁾以来、 H_2 制御は H_∞ 制御に従属するような形で紹介されることが多かった。しかし、設計に用いる場合、これら2種類の評価関数 (H_2 ノルムと H_∞ ノルム) は制御系の評価法として明確に異なるものであるため、目的に応じて適切

に使い分けるべきである。 H_2 ノルムはインパルス応答に関連する指標なので⁽⁵⁾、最悪外乱を扱うには不適であるが、過渡特性の調整には優れていると考えられる。サーボ系を2自由度構成で設計し、閉ループには H_∞ 制御、フィードフォワード部分には H_2 制御を用いて外乱特性・過渡応答ともに良好な結果を得たという報告もある⁽²⁰⁾。最近では H_∞/H_2 混合の制御手法も研究されている。

離散時間 Riccati 方程式は(とりわけ H_2 制御の場合は、)連続時間のそれとは大きく異なる挙動を示す⁽²¹⁾。本稿で扱ったような特異な重みに対する検討は、連続時間・離散時間最適制御の基本的な性質の違いを研究する上でも役立つものと思われる。

(平成6年5月15日受付)

文 献

- (1) J. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, & B. A. Francis: State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problem, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-34**, 8, p. 831~847 (1989)
- (2) 原: サンプル値系の状態空間モデルと制御系設計, 計測と制御, **32**, 2, p. 113~119 (平5)
- (3) 原: サンプル値系における H_2 および H_∞ タイプ制御, 計測と制御, **30**, 8, p. 655~662 (平3)
- (4) P. P. Khargonekar & N. Sivashankar: H_2 Optimal Control for Sampled-data Systems, *Systems & Control Letters*, **17**, p. 425~436 (1991)
- (5) 原: H_2 型最適制御 I - 離散時間問題, 本号 (平6)
- (6) B. D. O. Anderson: Optimal Filtering, Prentice-Hall (1979)
- (7) 児玉ほか: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会編 (昭53)
- (8) 木村, 藤井: 多変数制御系の理論と応用, システムと制御, **22**, 7, p. 426~436 (昭53)
- (9) 片山: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店 (昭58)
- (10) G. ストラング著, 山口・井上訳: 線形代数とその応用, 産業図書 (昭53)
- (11) L. M. Silverman: Discrete Riccati equation, in Control and

Dynamic System, advances in theory and applications, C. T. Leondes, ed., Academic Press, p. 313~386 (1976)

- (12) 美多他: 基礎デジタル制御, コロナ社 (昭63)
- (13) H. L. Trentelman, et. al.: Sampled-data and Discrete-time H_2 Optimal Control, Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, p. 331~336 (平5)
- (14) 池田・制御系における零点- [III] システム構造と零点, 計測と制御, **29**, 5, p. 441~448 (平2)
- (15) 片山・大貫: 離散時間ディスキリプタシステムに対する線形レギュレータとスペクトル分解, 計測自動制御学会論文集, **28**, 1, p. 87~96 (平4)
- (16) 安藤, 田沼他: 数値解析手法による制御系設計, 計測自動制御学会編 (昭61)
- (17) P. Van Dooren: A Generalized Eigenvalue Approach for solving Riccati Equations, *SIAM J. Stat. Comput.*, **2**, p. 121~135 (1981)
- (18) T. Papas, A. J. Laub, et al.: On the Numerical Solution of the Discrete-time Algebraic Riccati Equation, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-25**, 4, 631~641 (1980)
- (19) P. Van Dooren: ALGORITHM 590 DSUBSP and EXCHQZ: FORTRAN Subroutines for Computing Deflating Subspaces with Specified Spectrum, *ACM Trans. on mathematical Software*, **8**, 4, p. 376~382 (1982)
- (20) T. Sugie & Y. Tanai: H_2/H_∞ Suboptimal Controller Design- Design Example of a magnetic Levitation System, Proceedings of International Workshop on Robust Control, Seoul, p. 1~6 (1993)
- (21) K. Sugimoto & Y. Yamamoto: Solution to the Inverse Regulator Problem for Discrete-time Systems, *Int. J. Control*, **48**, p. 1285~1300 (1988)

杉 本 謙 二 1982年京都大学大学院数理工学専攻修士課程修了, 同年三菱電機(株)入社。その後, 京都大学工学部数理工学科助手を経て, 現在, 岡山大学工学部情報工学科助教授。制御理論に関する研究に従事。計測自動制御学会, システム制御情報学会の会員 (工学博士)。