シールド工法における前方異常物体検知のための 受波器の最適配置および最適観測方策

正 員 田 中 正 吾 (山口大)

Optimal Location of Receiving Transducers and Optimal Observation Policy for Detecting the Anomalous Objects in Shield Method

Shogo Tanaka, Member (Yamaguchi University)

In excavating tunnels for subways and power cables, shield tunneling machines, which have many cutters, are used. The authors previously proposed an effective detection system, for the machines, which detected anomalous objects ahead, to prevent the cutters from getting damages and also to prevent the construction delay caused by the accident. The system has one sonic transmitting transducer and several sonic receiving transducers to get information on the anomalous objects. Not so many observations being available in the detection, optimal observation policy is of a practical importance. The paper discusses the optimal location of the transducers on the cutter plane of a shield tunneling machine and also the optimal observation policy which takes into account the rectilinear and revolving motions of the transducers caused by the movement of the tunneling machine.

キーワード：トンネル掘削機，前方異常物体検知，送波器，受波器，最適配置，最適観測方策

1. 緒 言

地下鉄工事や電力ケーブルの埋設工事などのシールド工法においては，掘削機により地下トンネルが掘削される。このとき，掘削機前方に掘削不可能な寸法の岩石，地下構造物，地上建築物の基礎杭，建築後地中に残された鋼材・コンクリート塊などが存在し，それに気づかずに掘削を続けると，掘削機が破損するだけでなく，その修理のために工期の大幅な遅れを生じる。この観点から，掘削機前方の異常物体の位置を事前に検知することは，上記シールド工法において重要な課題となっている。このような不可視物体の検出には音響センサを用いるのが便利であり，実際，超音波を利用した医用超音波映像装置などが既に実用化されている⁽¹⁾。

しかし医用応用では，映像化される対象が体表面から極めて近距離にあることに加えて，高い解像度が要求されることから，数 MHz 程度の高い周波数の超音波が使用されるが，シールド工法では，遠方の異常物体を検知することが重要であることから，減衰の大きい高い周波数は利用できない。必然的に，目標とする距離までの異常物体からの反射波が受波器に十分な精度で受波される程度の低い周波数を用いなければならない。この低い周波数の利用により，媒質中に散在する，カット破損につながらないサイズ

の石による反射波が受波されないという利点はあるが，その反面，反射波の受波時刻の決定に際し，超音波を利用したこれまでの検知手法とは本質的に異なる問題点が生じる〔詳細は文献(2)参照〕。

著者らは，これらの問題点を解決するため，さきに送波器，受波器の入出力特性を利用した異常物体位置検知システムを開発した⁽²⁾。ただし，さきの報告では，高精度な受波時刻の検出を念頭においた，受波器に得られる時系列データ（電気信号）の解析法に主眼が置かれ，掘削機カット面上の受波器の最適配置，あるいは掘削機の進行に伴う観測点の最適配置については，紙面の都合上詳細は割愛した。しかしシールド工法では，医用応用と異なり走査データが利用できないので，最適観測方策を議論することは異常物体の位置決定誤差を極力抑えるという観点から重要なことであり，本論文ではこのような背景から，受波器の最適配置および掘削機進行に伴う最適観測方策について，理論的な側面から検討・考察を加える。

2. データ採取および異常物体の位置決定

トンネル掘削機前面のカット面に，1 個の送波器と何個かの受波器を取り付け，適当な距離（1 m くらい）掘り進むごとに，送波器により音波を送波し，異常物体からの反射波を受波器で受波する場合を考える。このとき，トータ

ルの受波回数だけ、前方異常物体に関して距離データが得られることになる。なお本論文では、受波器の最適配置および最適観測方策を議論するため、異常物体は1個と仮定している。これは、1個の場合に対して位置決定誤差をある妥当な規範の下で最小にするような観測系を設計しておけば、異常物体が複数個あっても各異常物体に対してそれぞれ位置決定誤差を小さくできるからである。問題はどちらかというと、各異常物体からの反射波の分離およびこれに基づく各異常物体の位置決定であるが、これについてはさきに報告した反射波受波時刻の検出手法⁽²⁾をはじめとし、土中標準音速を用いた各異常物体までの距離に関する最小二乗法により可能になるので、本論文では異常物体を1個とし、受波器最適配置および最適観測方策を議論する。

なお、堀削機カッタ面の回転に伴い送受波器の位置も変わるが、カッタ面に相当する広さの前方領域内の任意の点に位置する異常物体からほぼ確実に反射波があるような指向性の送波器を使用しているため、第1章で述べたような異常物体であれば、異常物体が1個であれ、複数個であれ、送受波器が回転、前進してもそれぞれの異常物体からの反射波が受波されるので、以下ではこのことを考慮し最適観測系の設計を1個の異常物体について行う。もちろん、最適観測方策を考える異常物体のサイズは、反射があるような大きさ、つまり（送受波器側からみたときの）等価的な円の形状にして直径が送波音波の（1/2）波長より大きいものを考え、かつ形状としては岩石、コンクリート塊、基礎杭などの（受波器位置が移動しても）反射点がほぼ一定のものを考える。

ところで、位置決定に際し具体的な距離を求める必要があるが、送波器による送波から受波器による（異常物体からの）反射波の受波までに要した時間の1/2に土中の標準音速を乗じることにより近似的に計算できる。もちろん、さきに報告したように⁽²⁾、土中の音速も未知数として扱えば、更に高精度な距離データが得られる。

いま、カッタ面中心を通る堀削機進行方向を x 軸、これに垂直なカッタ面方向を y, z 軸、原点を x 軸上の適当な点におく（図1参照）。このとき、カッタ面を断面とする前方円筒領域内の任意の点にある異常物体（ここでは1個）が検出対象となる。このとき、異常物体の位置を $(x,$

$y, z)$ と表し、この異常物体からの反射波が M 個の地点（以後、観測点と呼ぶ） $(x_j, y_j, z_j) (1 \leq j \leq M)$ で受波され、各観測点において、前に述べた方法で異常物体までの距離 $s_j (1 \leq j \leq M)$ が計算されたとすると、次式が成り立つ。

$$\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2} \cong s_j \quad (1 \leq j \leq M) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$s_j (1 \leq j \leq M)$ にはもちろん測定誤差が含まれているので、異常物体の位置決定に際しては、最小二乗法により解 (x, y, z) を算出することが合理的である。（1）式の独立した適当な三つの式を等式とみなし、これらが満たす解を (x^*, y^*, z^*) とすれば、解 (x, y, z) は、雑音が小さいと仮定すると $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ を微小として

$$\begin{cases} x = x^* + \Delta x \\ y = y^* + \Delta y \\ z = z^* + \Delta z \end{cases}$$

と表せる。従って、（1）式の左辺は、 (x^*, y^*, z^*) の近傍でTaylor展開でき

$$\text{左辺} \cong a_j + \frac{x^* - x_j}{a_j} \Delta x + \frac{y^* - y_j}{a_j} \Delta y + \frac{z^* - z_j}{a_j} \Delta z \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

$$a_j = \sqrt{(x^* - x_j)^2 + (y^* - y_j)^2 + (z^* - z_j)^2} \quad (1 \leq j \leq M) \quad \dots\dots\dots (3)$$

従って、最適な補正分 $\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta z^*$ は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \left(\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z-z_j)^2} - s_j \right)^2 \\ & \cong \sum_{j=1}^M \left(a_j + \frac{x^* - x_j}{a_j} \Delta x + \frac{y^* - y_j}{a_j} \Delta y + \frac{z^* - z_j}{a_j} \Delta z - s_j \right)^2 \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

を最小化することにより求められ、

$$\Delta^* \triangleq \begin{pmatrix} \Delta x^* \\ \Delta y^* \\ \Delta z^* \end{pmatrix} = P^{-1} \mathbf{q} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$P \triangleq \sum_{j=1}^M \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\mathbf{q} \triangleq \sum_{j=1}^M (a_j - s_j) \mathbf{e}_j \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\mathbf{e}_j \triangleq \frac{1}{a_j} (x_j - x^*, y_j - y^*, z_j - z^*)^T \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 T :転置

である。よって、（5）式で求めた最適な補正分 $\Delta x^*, \Delta y^*, \Delta z^*$ を、それぞれさきの近似解 x^*, y^*, z^* に加えれば、（1）式の最小二乗解 (x^*, y^*, z^*) が求まる。なお、（8）式の $\mathbf{e}_j$ は、第一近似解 (x^*, y^*, z^*) を起点とした j 番目の観測点 (x_j, y_j, z_j) への方向ベクトル（単位長の大きさ）を表し、（6）式の行列 P は、これら M 個の方向ベクトルのdyad形式で与えられることがわかる。

図1 カッタ面と座標系の関係
Fig.1. Relation of the cutter plane and the coordinate.

3. 受波器および観測点の最適配置について

距離 s_j には誤差 (雑音) ε_j が含まれているので, s_j^0 を真値として, s_j は

$$s_j = s_j^0 + \varepsilon_j \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表すことができる。従って, (7), (9)式を(5)式に代入することにより, 雑音による位置決定に伴う誤差は

$$P^{-1} \left(\sum_{j=1}^M (-\varepsilon_j) \mathbf{e}_j \right)$$

となる。 $E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \sigma^2 \delta_{ij}$ (ここに, δ_{ij} : Kronecker のデルタ記号), つまり $\{\varepsilon_j\}$ の白色性を仮定して, 上記の位置決定誤差の共分散行 Σ を求めると, P の対称性を考慮して

$$\begin{aligned} \Sigma &\triangleq E \left[P^{-1} \left(\sum_{j=1}^M \varepsilon_j \mathbf{e}_j \right) \left(P^{-1} \left(\sum_{j=1}^M \varepsilon_j \mathbf{e}_j \right) \right)^T \right] \\ &= P^{-1} E \left[\left(\sum_{j=1}^M \varepsilon_j \mathbf{e}_j \right) \left(\sum_{j=1}^M \varepsilon_j \mathbf{e}_j \right)^T \right] P^{-1} \\ &= P^{-1} E \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \varepsilon_i \varepsilon_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T \right] P^{-1} \\ &= \sigma^2 P^{-1} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。観測点の最適配置に関する評価関数としては, $\text{tr}[\Sigma] = \sigma^2 \text{tr}[P^{-1}]$ あるいは $\det[\Sigma] = \sigma^6 / \det[P]$ の最小化が一般によく用いられるが, ここでは, 解析の都合上, 後者を採用する。つまり, $\det[P]$ の最大化を考える。いずれにしても本質的な相違はあまりない。これは, 前者の規範であれば P の固有値の逆数 and の最小化, 後者の規範であれば P の固有値の積の最大化となり, いずれの規範も P の3個の固有値をともに大きくすることになるからである⁽³⁾。以下, $\det[P]$ の最大化を規範として, 受波器および観測点の最適配置を考察する。なお異常物体の位置としては, カッタ面の方, カッタ面と同一半径 R をもつ円内の任意の点が候補として考えられるので, 厳密にいえば, このことを考慮に入れた次のミニマックス規範

$$\min_{X^* \in S_A} \det[P] \rightarrow \max \quad \dots\dots\dots (11)$$

が合理的であろう。ここで, $X^* = (x^*, y^*, z^*)^T$ であり, S_A は最適観測系設計に際し, 異常物体があると想定される, 堀削機進行方向 (x 軸上) 適当な距離の点に中心を有する, x 軸に垂直な半径 R の円領域を表す。しかしながら, 解析が困難なので, 本論文では x 軸上に異常物体があるとして解析を試みる。実際, 堀削機と異常物体が適当な距離離れていれば, この仮定は十分満足のいくものである。

堀削機は所定距離 (1 m くらい) ずつ掘り進み, そのつど1個の送波器により音波を前方異常物体に向けて送波し, 異常物体からの反射波を (もしあれば) 複数個の受波器で観測することになるので, 結局, 「音波の送波回数 $\times$ 受波器数」の数だけ異常物体までの距離データが得られる。いま, 議論を簡潔にするため, 受波器が取り付けられたカッタ面を同一地点で回転し, 合計 $M (\geq 3)$ 個の観測を行うときの最適観測点分布 (つまり, 受波器の位置) を求めてみる。遠方の異常物体の位置検知を念頭に置いている

ので, とりあえずカッタ面 $\mathcal{D}$ と異常物体との距離 r が $R/\sqrt{2}$ 以上の場合を考える。

このとき, (S_A の中心に位置している) 異常物体の位置 X^* を起点とし, 距離 r 離れた半径 R のカッタ面 $\mathcal{D}$ 上の任意の観測点に向かう方向ベクトルに対し, いま次のような線形変換

$$A \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r} & 0 & & \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{R} & * & \\ 0 & 0 & & \\ & 0 & & \\ * & 0 & & \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{R} & & \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

を考える。このとき, X^* を起点とするカッタ面上の任意の観測点への方向ベクトル $\mathbf{e}_j$ ($1 \leq j \leq M$) に対し, 最大化すべき評価関数 $\det[P]$ は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \det[P] &= \det \left[\sum_{j=1}^M \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \right] \\ &= \{\det[A]\}^{-2} \det \left[\sum_{j=1}^M \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j^T \right] \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに, $\mathbf{f}_j = A \mathbf{e}_j$ ($1 \leq j \leq M$) である。この線形変換により, X^* より距離 $r (\geq R/\sqrt{2})$ にあるカッタ面 $\mathcal{D}$ の円周上に向かう方向ベクトルは, X^* から距離 $R/\sqrt{2}$ の位置にある半径 R の円 C_0 の円周上を向く大きさ1のベクトルに写像される。これは, 変換前の方向ベクトルが

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (-\cos \theta, \sin \theta \cos \delta, \sin \theta \sin \delta)^T \\ ; \theta &= \tan^{-1}(R/r), 0 \leq \delta < 2\pi \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

と表されることから, 変換後のベクトルは $\theta = \tan^{-1}(R/r)$ を考慮して

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r} \cos \theta \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{R} \sin \theta \cos \delta \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{R} \sin \theta \sin \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos \theta^* \\ \sin \theta^* \cos \delta \\ \sin \theta^* \sin \delta \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

と求められるからである。ここに, $\theta^* = \tan^{-1} \sqrt{2}$ であり, (15)式の $A\mathbf{u}$ は, X^* を起点とし, X^* から距離 $R/\sqrt{2}$ の位置にある半径 R の円 C_0 の円周上を向く大きさ1のベクトルになることがわかる。

一方, カッタ面 $\mathcal{D}$ の内側を向く方向ベクトルは

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= (-\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta} \cos \delta, \sin \tilde{\theta} \sin \delta)^T \\ , \tilde{\theta} &< \theta, 0 \leq \delta < 2\pi \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

と表されるので,

$$\frac{r^2}{R^2+r^2} < \cos^2 \bar{\theta} \leq 1 \dots\dots\dots (17)$$

を考慮すると、上述の行列 A による線形変換後のベクトルは

$$\|A\tilde{u}\|^2 = \frac{1}{3} \frac{R^2+r^2}{r^2} \cos^2 \bar{\theta} + \frac{2}{3} \frac{R^2+r^2}{R^2} \sin^2 \bar{\theta} < 1 \dots\dots\dots (18)$$

を満たす。以上のことから、(13)式において導入されたベクトル f_j は、 X^* から距離 $R/\sqrt{2}$ の位置にある半径 R の円 C_0 の円領域に向かうベクトルになっており、そのときの大きさは

$$\|f_j\|^2 \leq 1 \quad (1 \leq j \leq M) \dots\dots\dots (19)$$

を満たす。最大値 1 をとるのは、円 C_0 の円周に向かうベクトルの場合だけである。

一方、(13)式により、 $\det[P]$ の最大化 $\det[P_F]$ の最大化に帰着できることもわかる。ここに、 P_F は

$$P_F = \sum_{j=1}^M f_j f_j^T \dots\dots\dots (20)$$

である。いま、 P_F の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすれば、相加平均・相乗平均の関係⁽³⁾ および関係式(19)により、

$$\begin{aligned} \det(P_F) &= \prod_{i=1}^3 \lambda_i \\ &\leq \left((1/3) \sum_{i=1}^3 \lambda_i \right)^3 = \left\{ (1/3) \text{tr}(P_F) \right\}^3 \\ &= \left((1/3) \sum_{j=1}^M \|f_j\|^2 \right)^3 \leq (M/3)^3 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\det[P_F]$ が最大値 $(M/3)^3$ をとるのは、すべての固有値が一致し、かつ f_j ($1 \leq j \leq M$) がすべて大きさ 1 のベクトルになる場合である。具体的にいえば、観測数 M が 5 以下の場合、 f_j ($1 \leq j \leq M$) が C_0 の円周上 M 等分された任意の M 点に向かうベクトルで与えられる場合である。なぜなら、このとき $\|f_j\|^2 = 1$ ($1 \leq j \leq M$) となり、更にこのような観測点配置により、 P_F の固有ベクトルの一つは X^* から x 軸方向を向く e_x 、他の二つは y, z 平面方向の垂直な任意の二つのベクトル e_y, e_z となり、この場合のみ P_F の固有値がすべて一致するからである。具体的にこの場合の固有値を計算すると、 f_j ($1 \leq j \leq M$) が X^* から x 軸上、距離 $R/\sqrt{2}$ だけ離れた x 軸に垂直な半径 R の円 C_0 の円周上、等間隔に置いた M 個の点を向く大きさ 1 のベクトルであることを考慮し、

$$\begin{aligned} e_x^T P_F e_x &= \sum_{j=1}^M (f_j, e_x)^2 \\ &= \sum_{j=1}^M (\|f_j\| \cdot \|e_x\| \cos \theta^*)^2 \\ &= \sum_{j=1}^M \cos^2 \theta^* = M/3 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_y^T P_F e_y &= \sum_{j=1}^M (f_j, e_y)^2 \\ &= \sum_{j=1}^M (\|f_j\| \sin \theta^* \|e_y\| \cos(2\pi j/M + \phi))^2 \\ &= \sin^2 \theta^* \sum_{j=1}^M \cos^2(2\pi j/M + \phi) = M/3 \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_z^T P_F e_z &= \sum_{j=1}^M (f_j, e_z)^2 \\ &= \sum_{j=1}^M (\|f_j\| \sin \theta^* \|e_z\| \cos(2\pi j/M + \pi/2 + \phi))^2 \\ &= M/3 \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここで、固有ベクトル e_x, e_y, e_z はもちろん単位ベクトルとしており、 θ^* は $\theta^* = \tan^{-1} \sqrt{2}$ である。また、 $(\cdot, \cdot)$ は内積記号を、(23)、(24)式の $(2\pi j/M + \phi)$ 、 $(2\pi j/M + \pi/2 + \phi)$ はそれぞれ f_j ($1 \leq j \leq M$) を y, z 平面に直交射影したときの射影ベクトルがそれぞれ e_y および e_z とする角度を表している。このように、 M (≤ 5) 個の観測点が許される場合は、 C_0 の円周上を M 等分した M 個の点を向くベクトル f_j ($1 \leq j \leq M$) が(21)式の最大値を与える。変換前の方向ベクトルで対応させれば、カット面 $\mathcal{D}$ の円周上の任意の M 等分点に向かう方向ベクトルとなり、最適観測点分布はカット面 $\mathcal{D}$ の円周上任意の M 等分点で与えられる。

$M \geq 6$ の場合にも、もちろん上述したように、カット面円周上の（任意の） M 等分点が最適観測点分布になるが、この場合は、最適観測点分布に関する条件はもっと緩やかなものとなる。つまり、 $M \geq 6$ の場合の最適観測点分布は、 $M \leq 5$ の場合の解を任意に組み合わせたものとなる。言い換えれば、必ずしも等分する必要はない。例えば、 $M=7$ の場合は、 M を $M_1=3$ と $M_2=4$ に分け、 M が M_1, M_2 の場合のそれぞれの最適観測点分布を結合すればよい。これは、 P_F の固有値が M_1, M_2 の各々の場合の固有値和で与えられることから容易に推察できる。もちろん、分割の最小単位は $M=3$ (P あるいは P_F が正則になる条件) である。上の最適観測点分布は、 M の値が小の場合は、受波器の最適配置問題を解いたことにもなる。

以上、異常物体からのカット面の距離 r が $r \geq R/\sqrt{2}$ の場合について、受波器の最適配置あるいはカット面回転に伴う最適観測点分布について考察したが、次に参考のため、制約が大きいとはいえ、 x 軸上に置いた異常物体のカット面からの距離 r が $r \leq R/\sqrt{2}$ の場合について考察してみる。この場合は、 $\det[P]$ の最大化を直接考えることに

$$\begin{aligned} \det[P] &= \det \left[\sum_{j=1}^M e_j e_j^T \right] \\ &= \prod_{i=1}^3 \eta_i \leq \left((1/3) \sum_{i=1}^3 \eta_i \right)^3 \\ &= \left\{ (1/3) \text{tr}(P) \right\}^3 = \left((1/3) \sum_{j=1}^M \|e_j\|^2 \right)^3 \\ &= (M/3)^3 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

を得る。ここで等号が成り立つのは、(21)式のときと同様、 P のすべての固有値 η_i ($1 \leq i \leq 3$) が一致する場合である。具体的にいえば、観測数 M が 5 以下の場合、 X^* を起点とする方向ベクトル e_j ($1 \leq j \leq M$) が、カット面上、カット面中心から半径 $\sqrt{2}r$ の円周上 M 等分された任意の M 点に向かう場合である。つまり、観測点がカット面内の、カット面中心から半径 $\sqrt{2}r$ の円周上、等間隔の M 個

の点で与えられる場合である。なぜなら、このような観測点配置を行えば、(21)式の導出のときと同様、 P の固有ベクトルは x 軸方向のベクトル e_x および y, z 平面方向の垂直な(任意の)二つのベクトル e_y, e_z で与えられ、そのときの固有値が、次式で計算されるようにすべて一致するからである。

$$\begin{aligned} e_x^T P e_x &= \sum_{j=1}^M (e_j, e_x)^2 \\ &= \sum_{j=1}^M (\|e_j\| \cdot \|e_x\| \cos \theta^*)^2 \\ &= M/3 \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_y^T P e_y &= \sum_{j=1}^M (e_j, e_y)^2 \\ &= \sum_{j=1}^M (\|e_j\| \sin \theta^* \|e_y\| \cos(2\pi j/M + \phi))^2 \\ &= \sin^2 \theta^* \sum_{j=1}^M \cos^2(2\pi j/M + \phi) \\ &= M/3 \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_z^T P e_z &= \sum_{j=1}^M (e_j, e_z)^2 \\ &= \sum_{j=1}^M (\|e_j\| \sin \theta^* \|e_z\| \cos(2\pi j/M + \pi/2 + \phi))^2 \\ &= M/3 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$M \geq 6$ の場合は、もちろん $M \leq 5$ の場合の解を任意に組み合わせればよい。

以上、掘削機が異常物体から $R/\sqrt{2}$ (R : カッタ面半径)より遠方の場合は、最適な観測点分布はカッタ面円周上に、またそれより近距離の場合は、カッタ面中心より(カッタ面の半径より小さい)ある半径の円周上に配置されることがわかった。そして、このときの円周上の配置は、観測数 M が $M = M_1 + M_2 + \dots + M_q$ と分割(ただし、各分割単位 M_j は $M_j \geq 3$ を満たす)されるとき各分割単位の(任意の)等分点を合成したもので与えられる。つまり、グループごとの幾何学的対称点(配置)を重ね合わせたもので与えられる。本最適解は、カッタ面を同一地点で回転するとして導出されたものであるが、実際は掘削機は所定の距離(約1m)ずつ掘り進み、総計 M 個の観測データを採取することが行われる。しかし、カッタ面が異常物体から比較的遠方の場合には、カッタ面が少々シフトしても異常物体からみた立体角はほとんど変化せず、上述の結果に基づく観測点位置はほとんど最適解とみなしてさしつかえない。よって、実際的な受波器の最適配置および最適観測点分布は、上述の結果に基づいて導出されることになる。

例えば、受波器数が3個であり、観測数 M が $M = 3q$ 、つまり掘削機の移動に伴い q 地点で観測データを集める場合を考えると、カッタ面円周上の任意の3等分点が受波器の最適配置であり、かつ、このとき q 地点でのカッタ面停止時の相対的回転角度は任意でよいことがわかる。また受波器数が2個で、観測数 M が6、つまり掘削機の移動に伴う3地点で観測データを収集する場合には、上の解析結果より、3地点でのカッタ面上の受波器位置がそれぞ

れ $2\pi/3$ rad ずつ(あるいは $4\pi/3$ rad ずつでも可)シフトした状態でカッタ面を停止させるという条件の下で、カッタ面円周上任意の2点が受波器の最適配置となる。任意性があるので、具体的な配置については構造上の制約などを考慮して定めればよい。

以上、掘削機進行方向の中心にほぼ位置している異常物体を念頭に、受波器の最適配置および最適観測点分布を考察してきたが、解析結果より観測点は異常物体からみて幾何学的に対称な分布(より厳密に言えば、グループごとに幾何学的に対称な分布)をしていることがわかった。従って、掘削機の構造上受波器の自由な配置が困難な場合は、掘削機の進行とともに変化する観測点全体として、幾何学的に対称な分布(あるいはグループごとに幾何学的に対称な分布)が実現できればよく、掘削機の移動に伴う異なった地点でのデータに基づく異常物体の位置検知の際には、この構造上の影響は取り除けることがわかる。つまり、利用できる受波器数にに応じ、掘削機が所定の距離進むごとにカッタ面の停止角度を適切に制御することにより、受波器の準最適配置および観測点の準最適分布が実現できるわけである。更に異常物体が遠距離、近距離いずれにあっても異常物体の位置検知が効果的に行われるようにするには、これまでの議論から明らかなように、カッタ面の円周上だけでなくカッタ面内側の(適当な半径の)円周上にも受波器を配置することが望まれる。しかし、近距離の基準がわずか $R/\sqrt{2}$ (R : カッタ面半径)であること、および異常物体が x 軸近くに必ずしも位置しているとは限らないので、これを考慮するか否かは現場側のニーズによる。

以上のことから、上で導出した結果は、異常物体が掘削機進行方向のほぼ中心にあり、しかも掘削機から $R/\sqrt{2}$ 以上離れている場合、あるいは異常物体が掘削機からある程度離れ、異常物体が掘削機進行方向の中心からずれていても、中心にあるとほぼみなせる場合に有効である。本来は、第3章の初めにふれたように、掘削機前方、カッタ面と同一半径 R をもつ円領域 S_A 上の任意の点に異常物体があると仮定したときの最適な受波器配置および最適観測方策(つまり、ミニマックス解)を求めるべきであるが、解析の簡便上、上の条件の下に解を導いた。しかし、後の数値例からわかるように、こうして得られた解は数値的にミニマックス解となっている。この厳密な証明については今後の検討に待たれるが、特に観測数 M が3の場合(受波器数が3個あるいは受波器1個のカッタ面を同一地点で回転する場合)に限定すれば、本論文で導出した解は厳密にミニマックス解になることが証明できる。具体的な証明については付録にまわすとして、ここでは結果だけを示す。

〔定理1〕 いま $X^* \in S_A$ を、掘削機前方の、カッタ面と同一半径 R をもつ円領域 S_A 上の任意の一点とする。このとき、 X^* を起点とし、距離 r ($\geq R/\sqrt{2}$)離れたカッタ面内の3観測点を向く方向ベクトル e_j ($1 \leq j \leq 3$)に對し、

$$\min_{X^* \in S_A} \det[P] \dots\dots\dots (29)$$

を最大化する観測点は、カット面円周上の（任意の）3 等分点である。

4. 数値例および検討

まず、カット面半径 R が $R=2.45\text{ m}$ であり、受波器が 3 個利用できるとして、これらの最適配置を考えてみよう。ただし、実際に使用されるものを念頭に置き、受波器は水平方向に $0.40\text{ m} \times 0.40\text{ m}$ のサイズを有し、この面の中心に反射波受波用の振動子がセットされているものとする。従って、振動子の位置が観測点になり、この観測点は

上述した受波器の寸法よりカット面周辺より少なくとも内側 0.2 m に入らなければならない。つまり、求める観測点の最適配置は、本論文の結果において $R=2.25\text{ m}$ としたときのカット面円周上の 3 等分点となる。これらを図 2 に示す。同図では、 X_1, X_2, X_3 がこれに対応する。図には、このカット面に対向する 10 m 前方の同一半径 $R=2.45\text{ m}$ の円領域 S_A 内の任意の点に異常物体があるとしたときの、各点に対する評価関数 $J=\det[P]$ の値も、等高線の形で対応するカット面上に描いている。これより、等高線はカット面中心を中心とする同心円となり、最大評価値 ($J=1.492 \times 10^{-2}$) は異常物体が円領域 S_A の中心（つまりカット面の中心軸前方）に、また最小評価値 (J

図 2 最適配置に対する評価関数の等高線
Fig. 2. Contour lines of the criterion function for the optimal location.

図 4 最適配置に対する評価関数（トレース規範）の等高線
Fig. 4. Contour lines of another criterion function (trace-criterion) for the optimal location.

図 3 非最適配置に対する評価関数の等高線
Fig. 3. Contour lines of the criterion function for a non-optimal location.

図 5 非最適配置に対する評価関数（トレース規範）の等高線
Fig. 5. Contour lines of another criterion function (trace-criterion) for a non-optimal location.

図 6 掘削機進行に伴う観測方策の最適性について

Fig. 6. Optimality of the observation policies involved in the movement of the tunneling machine.

$=1.272 \times 10^{-2}$ は異常物体が円領域 S_A の円周上の任意の点に位置するときに得られることがわかる。

参考のため、 X_3 に位置している受波器を反時計方向に $\pi/6$ rad だけシフトしたときの受波器配置に対する評価関数 $J = \det[P]$ の等高線を図 3 に示す。このとき最大評価値は $J = 1.243 \times 10^{-2}$ に低下する。また、最小値 $J = 1.002 \times 10^{-2}$ は円周上ほぼ $-11\pi/20$ rad の点で与えられ、この値は図 2 の最適配置のときの最小値に比べ 21% 程度も低下しており、上記最適配置がミニマックス解になっていることが実際数値的にも確認できる。

参考のため、上記二つの受波器配置に対し、それぞれ $\text{tr}[P^{-1}]$ (トレース規範の評価関数) を計算したときの等高線を図 4 および図 5 に示す。等高線は行列式規範のときと異なり厳密には同心円ではないが、同心円状の等高線 (ただし、値の変化は逆) が得られ、本論文で求めた受波器の最適配置 (ひいては最適観測点分布) が $\text{tr}[P^{-1}]$ を評価関数とするミニマックス規範の観点からも望ましいことがうかがえる。

最後に、上述した最適配置構造の受波器による掘削機を用いて 1 m ずつ掘り進み、3 地点で観測を行うときの評価値の変化を図 6 に示す。図中で、最適と示しているのがこれに相当する。ただし、横軸は 3 地点のなかで最も異常物体から遠い地点の距離を表し、異常物体はカット面中心軸上にあるとしている。図より、カット面が異常物体に近づくほど評価関数値が増大することがわかる。本配置は、本論文の解析結果によると、カット面と異常物体間の距離が比較的大きい場合にはほとんど最適であるが、近距離の場合にもほとんど最適になっていることが数値的に確かめられた。詳細については今後検討したい。

上述した無制約下での最適配置と比較するため、いま考

考のため、受波器が構造上の制約などからカット面のある直径上には配置できない場合、具体的にはある直径上、中心より 1.85 m、2.25 m の 2 箇所に 2 個の受波器が、中心から 2.25 m の反対方向に他の 1 個の受波器が設置された場合を考えてみる。本論文で述べたように、このとき最適性を高めるためには、異常物体側からみた観測点分布が幾何学的対称性を有するようにすればよく、そのため 3 地点での受波器の相対的位置が順次 $2\pi/3$ rad (あるいは $4\pi/3$ rad) ずつシフトするようカット面を停止することを考える。このときの評価値の変化 (図中で準最適と記す) および受波器位置が $\pi/4$ rad ずつシフトするようカット面を停止したときの評価値の変化 (図中で非最適と記す) も図 6 に合わせて示す。これより、制約下での受波器配置は、無制約下での最適配置に比べ、カット面の最適な回転角制御を行っても評価値にしてほぼ 20% の劣化が生じること、およびこの最適な回転角操作を行わなければもっと大きな評価値の劣化 (ほぼ 40% の劣化) が生じ、3 地点での受波器の相対的位置を調整することが重要であることが確認できる。紙面の都合上詳細は省くが、異常物体の位置を円領域 S_A の端に考えた場合にももちろん同様な傾向がみられる。

5. 結 言

本論文では、シールド工法によるトンネル掘削に際し、掘削機前方異常物体の位置検知能力向上のため、受波器の最適配置および掘削機進行に伴う最適観測点分布について理論的に検討した。そして、異常物体が掘削機の正面、ある程度 (カット面半径の 70% 程度) 離れていれば、最適観測点分布はカット面の円周上に相当する箇所、異常物体側からみて幾何学的に対称な配置になることを解析的に示した。またこの解が、異常物体の位置について何ら条件をおかないときのミニマックス解となることを数値的に示した。従って、カット面上、受波器配置に制約がなければ、受波器はカット面円周上の等分点に設置すればよく、また掘削機の構造による配置の制約があれば、掘削機の進行に伴うカット面の適切な停止時回転角制御、つまり異常物体側からみて受波器位置が幾何学的に対称となるように操作すればよいことを示した。

本論文は、最適観測方策にも関係する受波器の最適配置に関し一つの指針を与えたものであり、実際の受波器配置に際しては、本論文でも述べたように構造上の制約だけでなく、受波器サイズも考慮しなければならない。また上述したように、本論文で得た解がミニマックス解となることの厳密な証明も今後の課題である。更に送波器の設置箇所の検討であるが、使用する送波器は広がりの比較的大きい指向特性を有しており、それゆえ異常物体が掘削機前方のどの位置にあってもほぼ確実に反射波が生じるが、よりの確な反射波が得られるためのカット面の相対的回転角の制御、あるいは掘削機が異常物体に近づいたとき、異常物体に対して得られる (反射点の異なる) 一種の走査データを

利用した形状計測なども、今後の検討課題である。

なお本論文では、異常物体として受波器位置が移動しても反射点がほぼ一定と目されるものを考えたが、コンクリート壁のような異常物体前面が平面で表される場合のように、反射点が比較的大きく移動する場合にも、本論文で得た幾何学的対称性を有する受波器配置は平面の推定誤差を最小にするうえで効果的であることは直感的にも明らかであり、これについては、光波同様、音波についても成り立つ（入射波・反射波に関する）スネル（Snell）の法則に基づく厳密な誤差解析を行う必要があるので、紙面の都合上、稿を改めて報告したい。

最後に、本研究は日立造船(株)との共同研究の一環としてなされたものであることを付記し、有益なる御助言をいただいた同社技術研究所 寺田幸博氏をはじめ関係者各位に謝意を表する次第である。

(平成 5 年 11 月 2 日受付)

文 献

(1) 中島・渡辺 編：新しい超音波診断技術（昭 59）南江堂出版
(2) 田中・二階堂・寺田・木下：「トンネル工法における前方異常物体の自動検知」, 電学論 D, 113, 1386 (平 5-12)
(3) R. E. Bellman: Introduction to Matrix Analysis (1960) McGraw-Hill
(4) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices (1959) Chelsea
(5) コワリック・オスボーン (山本・小山 訳)：非線形最適化問題 (昭 53) 倍風館

付 録

〔定理 1〕の証明

まず、最適観測点がカット面の円周上にあることを背理法により証明する。いま、上式を最大化する 3 観測点が円周上にないと仮定する。従って、少なくとも 1 個は円周上にないことになる。この観測点を X_1 、残りの観測点を X_2, X_3 とし、 X^* からこれらの観測点へ向かう方向ベクトルをそれぞれ e_1, e_2, e_3 とする。 X^* から X_2, X_3 へ引いた方向ベクトル e_2, e_3 で張られる平面を S とすれば、 $\det[P]$ は次のように書き表される⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} \det[P] &= (\det[e_1, e_2, e_3])^2 \\ &= \det \begin{bmatrix} (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{bmatrix} (\|e_1\| \cos \theta^*)^2 \\ &\dots\dots\dots (付 1) \end{aligned}$$

ここに、 θ^* は e_1 が平面 S となす角度である。よって、

観測点 X_1 がカット面円周より内側に位置していると仮定していることから、この点はどの方向にも移動でき、いま平面 S に対して垂直上方向に移動させると、平面 S が X^* の含まれている円領域 S_A と交わる線分 $\mathcal{L}$ 上の任意の点からみた方向ベクトル e_1 が S となす角度 θ^* は増加する。従って、 X^* を S_A 内の線分 $\mathcal{L}$ 上任意に移動させても、 e_1 が e_2, e_3 で張られる空間 S となす角度は常に増加する。同様なことは、線分 S と平行な、円領域 S_A 内の任意の線分上の点 X^* についても成り立ち、結局、上のように観測点 X_1 を移動すれば、 $\det[P]$ の値は S_A 内の任意の点 X^* に対し増加する。つまり、 $\det[P]$ の最小値 (29) 式は増加する。これは、最初に仮定した観測点 X_1 が (29) 式最大化（ミニマックス規範）の意味で最適ではないことを意味する。以上のことから、観測数 M が 3 の場合は、最適観測点はすべてカット面円周上にあることがわかった。

次に、最適観測点がこの円周上 3 等分点にあることを示す。上と同様に、観測点 X_2, X_3 と円領域 S_A 内の 1 点 X^* とを結ぶ平面 S が S_A と交わる線分 $\mathcal{L}$ 上の任意の点に異常物体があると考えた場合には、上と同様な考察を行うことにより、評価関数 (29) 式の最大化は、 X_1 が X_2, X_3 よりそれぞれ等角度にある場合に達成されることがわかる。もちろん、線分 $\mathcal{L}$ と平行な他の任意の線分についても同様である。結局、観測点 X_2, X_3 を固定したときの、円領域 S_A 内の点についてのミニマックス解は、 X_1 が X_2, X_3 と等角度をなすものとして与えられる。同様なことは、他の観測点の組を固定しても成り立つので、結局、観測数 M が 3 の場合の最適観測点は、カット面の円周上、任意の 3 等分点で与えられることがわかる。

田 中 正 吾 (正員) 1949 年 1 月 1 日生。1971 年 3 月九州大学工学部電子工学科卒業。1976 年 3 月同大学大学院電気工学専攻博士課程修了。同年 4 月同大学助手。1980 年 6 月山口大学工学部電子工学科助教授、1991 年 1 月学科改組に伴い、同大学工学部電気電子工学科教授となり、現在に至る。ダイナミックシステムの異常診断および知的計測の理論・応用研究に従事。計測自動制御学会、システム制御情報学会会員。