台車との相互作用を考慮した倒立振子の ファジー推論制御

正員 中野和司 (福岡工大)

非会員 江口三代一 (福岡工大)

正員 山口芳弘 (福岡工大)

Fuzzy Reasoning Control of Inverted Pendulum with Considering of Interaction with Cart

Kazushi Nakano, Member, Miyoichi Eguchi, Non-member, Yoshihiro Yamaguchi, Member (Fukuoka Institute of Technology)

The purpose of this paper is to develop a fuzzy reasoning control law for an inverted pendulum system by the aid of the theory of variable structure systems (VSS). The cascade architecture of two fuzzy controllers is used for considering of interaction with the cart. The stability of the control systems is investigated by the reachability and the existence conditions for the sliding mode. The simulation and experimental results are given to demonstrate the validity of our design method.

キーワード：ファジー推論制御，倒立振子，VSS理論，スライディングモード，カスケード構成

1. ま え が き

一般にファジー制御は，制御対象の数学モデル自身を導出するのが困難であったり，導出できても多大な時間と労力が必要であったり，更には導出した数学モデルが制御という目的には使えないような場合に有効であるといわれている。

ファジー制御ではメンバシップ関数と直感的な制御則を用いて全体の制御アルゴリズムが組み立てられるが，メンバシップ関数は常識的な範囲で矛盾のないように主観的に決定され，また制御則については熟練オペレータのノウハウを積極的に取り入れたかたちで決定される。しかし，熟練オペレータのノウハウがすべて言語表現できるとはかぎらないし，実際の制御においてif～then～形式の規則の単なる羅列では有効な制御が達成できる保証もないなどの問題点がある⁽¹⁾。倒立振子の台車と振子の制御という単純な場合においても，台車と振子の間の力学的関係を考慮して適切な操作をif～then～形式の制御則で一度に記述するのが難しく，それによって所望の制御性能が達成できるという保証もない。

本研究では，振子のみの場合のファジー制御則を可変構造系 (VSS) の理論⁽²⁾を援用してif～then～形式で記述し，台車についても振子とは別に新たに制御則を構成し，最後に台車の力学的影響を振子制御の目標値として組み込

むという形のカスケード制御方式を提案する。本方式による制御系の安定性は，スライディングモード (Sliding mode) に対する到達条件・存在条件により，各種設計パラメータを厳密に設定することなく保証される。更に，本方式の有効性はシミュレーションと実機による実験により確認され，従来難しいとされた台車の位置制御までが達成されることが示される。

2. 制御規則の構成

〈2・1〉 倒立振子の定性的挙動 ファジー制御を実施する場合，対象となるシステムの動的挙動をあらかじめ知っておく必要がある。倒立振子 (付録1) に代表されるメカニカルシステムにおいては，対象の構造が力学的に既知となる場合が多いが，本研究では制御則を構成するにあたり，次のような倒立振子の定性的な挙動を考慮することにした。

(1) 入力のある値を超えると，入力とは符号が逆のほうに振子が振れようとする。

(2) 振子を倒立させるためには，振子が傾いた方向に台車を動かせばよい。

ここでは，(2)の性質を利用して振子の角度制御だけではなく台車の位置制御をも同時に行うを試みる。このために，仮想平衡点の考え方を導入し，台車の位置と速度の情報を補正角 θ_0 に変換して，振子の角度情報を力学的

図 1 仮想平衡点の考え方
Fig. 1. Idea of imaginary equilibrium-point.

平衡点に対して θ_0 だけずらすものとする。すなわち、台車が原点より正の方向にある場合は図 1(a) のように、仮想平衡点を力学的平衡点より負の方向に配置し、逆に台車が原点より負の方向にあるときは、図 1(b) のように正の方向に配置すればよい。

<2.2> 制御系の構成

(a) 振り角度の制御⁽³⁾ まず、基本となる振り角度のみの制御における推計法を考える。システムの動的挙動は角度 θ と角速度 $\dot{\theta}$ の位相平面上で記述できる。以後、前件部変数として極座標系の変数 r, ϕ を用いることにする。

$$\phi = \tan^{-1} \frac{k_2 \dot{\theta}}{k_1 \theta} \dots\dots\dots (1)$$

$$r = \sqrt{(k_1 \theta)^2 + (k_2 \dot{\theta})^2} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 k_1, k_2 は正規化のためのスケールファクタである。これを基に操作量を次式で決定する。

$$u = \text{sgn}(\phi) \cdot G(r) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\text{sgn}(\phi)$ は u の符号に相等するもので、 ϕ により $[-1, 1]$ の連続値をとる関数とする。これは、振子が原点からはなれつつあるとき、つまり θ と $\dot{\theta}$ が同符号であるときは、同じ向きに操作量を与える。しかし、原点に近づきつつあるとき、つまり θ と $\dot{\theta}$ が異符号であるときは、状態によって操作量の符号を変え、原点に近づくにつれて $\dot{\theta}$ を小さく(減速)させる。このように、 θ と $\dot{\theta}$ の関係より符号の切り換わる場所(切換線)の決定にファジー推論を用いる。

一方、 $G(r)$ は u のゲインに相等するものを表し、 r により $[0, u_m]$ をとる。過渡特性を向上させるためには、(3)式におけるゲインの絶対値は原点から速い点では大きく、近い点では小さくすることが必要である。

(b) 台車を考慮した制御 次に、台車を含めた制御における推論法を考える。操作量 u は振りに関する推論において(3)式と同様に次式で決定する。

$$u = \text{sgn}(\phi_p) \cdot G(r_p) \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_p = \tan^{-1} \frac{k_2 \dot{\theta}}{k_1 \theta} \dots\dots\dots (5)$$

$$r_p = \sqrt{(k_1 \dot{\theta})^2 + (k_2 \theta)^2} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\dot{\theta}$ は前節で述べた仮想平衡点の考えを用い、振子の傾き θ に台車の位置と速度から推論された補正角を考慮し、

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} + k_0 \dot{x} \dots\dots\dots (7)$$

と算定されるものである。ただし、 k_0 は次元換算に相当

図 2 規則(11)のメンバシップ関数
Fig. 2. Membership function of rule (11).

図 3 規則(12)のメンバシップ関数
Fig. 3. Membership function of rule (12).

するスケールファクタである。

台車の動的挙動は位置 x と速度 $\dot{x}$ の位置平面上で記述できる。振り角度のみの推論法と同様にして、前件部変数として極座標系の r_c, ϕ_c を用いることにする。

$$\phi_c = \tan^{-1} \frac{f_2 \dot{x}}{f_1 x} \dots\dots\dots (8)$$

$$r_c = \sqrt{(f_1 x)^2 + (f_2 \dot{x})^2} \dots\dots\dots (9)$$

このとき(7)式の θ_0 は、台車に関する推論において次式で決定する。

$$\theta_0 = \text{sgn}(\phi_c) \cdot G(r_c) \dots\dots\dots (10)$$

(4)、(10)式の $\text{sgn}(\phi_p), \text{sgn}(\phi_c)$ は、 u または θ_0 の符号に相等し、 $[-1, 1]$ の連続値をとる。また、 $G(r_p), G(r_c)$ は、 u, θ_0 のゲインに相等し、それぞれ $[0, u_m], [0, \theta_{0m}]$ の連続値をとる。

具体的に $\text{sgn}(\phi)$ は規則(11)により推論する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{If } \phi \text{ is } P_\phi \text{ then } \text{sgn}(\phi) \text{ is } P_s \\ \text{If } \phi \text{ is } N_\phi \text{ then } \text{sgn}(\phi) \text{ is } N_s \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

このメンバシップ関数を図 2 に示す。ただし、 P は“正”， N は“負”を表す。また、 $G(r)$ は規則(12)により推論する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{If } r \text{ is } B_r \text{ then } G(r) \text{ is } B_G \\ \text{If } r \text{ is } S_r \text{ then } G(r) \text{ is } S_G \end{array} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

このメンバシップ関数を図 3 に示す。ただし、 B は“大”， S は“小”を表す。

以上のように構成した制御則をブロック線図で表すと、図 4 のようになる。ブロック線図からわかるようにこの制御系は、メジャーループの台車に関する部分より導出された値が、マイナーループの振りに関する部分に目標値を与えるカスケード制御系⁽³⁾⁻⁽⁵⁾となっている。

<2.3> 振子のファジー制御系の安定性 前節で作成

図 4 ファジー制御系のブロック線図
Fig. 4. Block diagram of fuzzy control systems.

したファジー制御則を用いた閉ループ制御系の安定性について考えてみる。

(3)式は一種の VSS 理論に基づくスライディングモード (sliding mode) 制御⁽²⁾と考えられるので、ある切換線への到達条件と存在条件が満足されるような設計パラメータ S_p , u_m , θ_m およびスケールファクタの条件を定める必要がある。

付録 1 の対象システムの運動方程式を平衡点 $\theta=0$ で線形化すると、(付 1), (付 2)式は次のようになる。

$$(M+m)\ddot{x} + m\ddot{\theta} + D_x\dot{x} = G_0u \quad (13)$$

$$m\ddot{x} + (ml^2 + J)\ddot{\theta} - mgl\theta + D_\theta\dot{\theta} = 0 \quad (14)$$

まず、振子に関する安定性について考える。(13)式より台車の摩擦係数 D_x を無視して、 $\ddot{x}$ について解くと下式のようなになる。

$$\ddot{x} = \frac{G_0}{M+m}u - \frac{ml}{M+m}\ddot{\theta} \quad (15)$$

これを(14)式に代入すると

$$\ddot{\theta} = a_1\theta + a_2\dot{\theta} + a_3u \quad (16)$$

となる。ここに、

$$a_1 = \frac{mgl}{J'}, \quad a_2 = -\frac{D_\theta}{J'}, \quad a_3 = -\frac{mlG_0}{(M+m)J'}$$

$$J' = J + \frac{Mml^2}{M+m}$$

である。

ここで、メンバシップ関数の起点 S_p (図 2 参照) に対応させて安定解析を行う。操作量 u を位相平面の各象限において記述すると次式となる。

$$u = \begin{cases} br & \text{第 1 象限} \\ & (0 \leq \phi < \pi/2) \\ b\left(-\frac{2-2S_p}{\pi}\phi + (2-S_p)\right)r & \text{第 2 象限} \\ & (\pi/2 \leq \phi < \pi) \\ -br & \text{第 3 象限} \\ & (-\pi \leq \phi < -\pi/2) \\ b\left(\frac{2-2S_p}{\pi}\phi + 1\right)r & \text{第 4 象限} \\ & (-\pi/2 \leq \phi < 0) \end{cases} \quad (17)$$

ただし、 $\dot{\theta}=0$ のとき $u=u_m$ となる最小の θ の値を θ_m として、 $r_m=k_1\theta_m$ の関係より、 $b=u_m/r_m=u_m/(k_1\theta_m)$ と

図 5 $S_p=0$ 近傍での切換線の存在位置
Fig. 5. Existence of sliding mode in $S_p=0-$.

している。

本制御系の安定性は、切換線への到達条件と存在条件 (付録 2 参照) により、 S_p のある範囲で保証される。 $S_p=0$ (厳密には $S_p=0-$) の場合の、 u_m , θ_m およびスケールファクタの具体的な条件については、 $h(\phi)=(a_2/k)\sin\phi + a_1\cos\phi + 2a_3bk_1(1-\phi/\pi)$ とおくと、

$$b > -\frac{1+a_1}{a_3} \quad (18)$$

$$h(\phi_1) < 0, \quad \frac{dh(\phi_1)}{d\phi} = 0 \quad (19)$$

となり、満足されることがわかる。付録 2 に示すように上式は符号だけの条件になっており、パラメータ a_1 , a_2 , a_3 に関するロバスト性も明らかである。

3. シミュレーション

〈3・1〉 メンバシップ関数と切換線 前章で構成した制御則を用いて、付録 1 の各パラメータにより台車を含めた倒立振子のシミュレーションを行う。図 2, 図 3 のメンバシップ関数の各パラメータを $u_m=10$ V, $\theta_m=\pi/600$ rad とおく。また、仮想目標値と振子の角度の関係を調節するため、(7)式におけるスケールファクタを $k_0=0.01$, また(5)式におけるそれを $k_1=100$, $k_2=\pi/6$, $f_1=30$, $f_2=5.5$ とする。

図 5 は、メンバシップ関数の起点を $S_p=0 \sim -1$ と変化させ、切換線が $\theta, \dot{\theta}$ の位相平面上でどのように変わるかを数値的に調べてみたものである。文献(3)で提案されているように、 $S_p=-1$ のような場合にはスライディングモードは存在しない。

〈3・2〉 位相平面上的軌跡 シミュレーションにより $\theta, \dot{\theta}$ の位相平面上的軌跡を見てみる。図 6 にメンバシップ関数の起点を $S_p=-1$ とした場合のシミュレーション結果を示す。同様に図 7 に $S_p=0-$ のシミュレーション結果を示す。

$S_p=-1$ の場合は、振子はかなり振動しながら原点へ収束しているが、切換線に拘束されないことがわかる。 $S_p=0-$ の場合は、第 2, 第 3 象限の境界線 (厳密には近傍) の切換線に沿って原点に収束している。このことは、前章で述べた解析結果を裏づけるものである。例えば、初期値が第 1 象限に存在する場合は、以下のような動作を行う。

- (1) 振子の角速度 $\dot{\theta}$ の符号が、負に変化 (第1象限と第4象限) するまで正の操作量を出す ($\text{sgn}=1$)。
- (2) 振子の角度 θ が負に変化するまで (第4象限→第3象限), 正の操作量を出す ($0 \leq \text{sgn} \leq 1$)。
- (3) $\dot{\theta}$ が正に変化するまで (第3象限→第2象限), 負の操作量を出す ($\text{sgn}=-1$)。
- (4) $\theta, \dot{\theta}$ の位置が切換線より下にある場合, $\text{sgn}=-1$ となり $\dot{\theta}$ が増加し, 切換線より上に移動する。

となり $\dot{\theta}$ が増加し, 切換線より上に移動する。

- (5) $\theta, \dot{\theta}$ の位置が切換線より上にある場合, $0 \leq \text{sgn} \leq 1$ となり $\dot{\theta}$ がゆるやかに減少する。

- (6) (3)~(5)を繰り返すことにより, 原点に収束していく。

なお, この制御則は人間の動作に例えると, 振子を先に立てた状態で徐々に台車の位置を目標値に一致させる動作に相当する。

台車を含めた制御則を用いたシミュレーション結果を図8, 図9に示す。 $S_p=-1$ のときは, 細かい自励振動がのこり台車の動きが発散傾向にあるが, $S_p=0-$ の場合には, 振子とともに台車も収束しているのがわかる。

4. リアルタイム制御

システム全体の概念図を図10に示す。制御対象である倒立振子システムは, リニアガイド上をボールねじによって走行する台車, 台車上で軸受けに支持されたT字型の倒立振子の二つの部分からなる。台車の位置 (x), 振子の傾き (θ) の検出器としては二つのオプティカルエンコーダを用い, その出力 (2相パルス列) はコントローラ (PC-486 GR) の拡張スロット内のカウンタボード (S 360 B 110) で計算し, 方向判別と位置計測を行う。このとき, θ については出力パルスを通倍し分解能を4倍に上げている。検出データ x, θ から4点近似により $\dot{x}, \dot{\theta}$ を得て, 更にファジー制御入力 u をDSP (TMS 320 C 30) により算定する。演算結果, すなわち制御入力値はD/Aコンバータによりアナログ電圧に変換, 電流アンプ (サーボパック FR 01 B, 安川電機) を通じてDCサーボモータ (ミナーシャモータ, UGRMEN-02 MA, 100 W, 安川電機) に送られ, ボールねじを駆動し, システムの安定化などが図れるようになっている。

作成した制御則およびメンバーシップ関数を用いて実際に倒立振子のリアルタイム制御を行ってみる。なお, サンプリング周期, スケールファクタともシミュレーションと同じ値を用いた。定常状態における台車の挙動, 振子の挙動をそれぞれ図11, 図12に示す。また, 外乱を加えた場合の台車の挙動, 振子の挙動をそれぞれ図13, 図14に示す。

図6 位相平面上の軌跡 ($S_p=-1$)
Fig. 6. Phase plane trajectory in $S_p=-1$.

図7 位相平面上の軌跡 ($S_p=0-$)
Fig. 7. Phase plane trajectory in $S_p=0-$.

図8 シミュレーション結果 ($S_p=-1$)
Fig. 8. Simulation results in $S_p=-1$.

図9 シミュレーション結果 ($S_p=0-$)
Fig. 9. Simulation results in $S_p=0-$.

図10 倒立振子のデジタル制御系
Fig. 10. Digital control systems for an inverted pendulum.

図 11 定常状態での台車の動き
Fig. 11. Cart motion in the steady state.

図 12 定常状態での振子の動き
Fig. 12. Pendulum motion in the steady state.

図 13 外乱を加えた場合の台車の動き
Fig. 13. Cart motion in the transient state.

図 14 外乱を加えた場合の振子の動き
Fig. 14. Pendulum motion in the transient state.

図 15 不感帯を考慮したシミュレーション結果
Fig. 15. Simulation results with consideration of dead band.

振子の初期値の与え方によってシステムの過渡的挙動は大きく変わるが、定常状態では切換線に沿って複雑な挙動を示すものの原点に収束していく様子がみられる。更に、時間の経過とともに振子が完全に直立した状態も得られた。これは、線形制御理論を用いた従来の方法では得られなかった結果である⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

なお、ここで得られた結果はシミュレーションと若干異なっている。これは、台車を動かすモータにかかる電圧がある電圧よりも低くなると、その入力電圧に応じた出力トルクが、出なくなる領域（不感帯）の存在による影響である。実機に対する不感帯は測定により -0.3V から 0.3V の範囲であった。

不感帯が存在していても倒立する理由は次のように考えられる。操作量 u の値が収束していき、ある小さい値になるとモータの不感帯に入ってしまう実質的に 0 となる。すなわち、振子が不感帯に入る直前に完全に倒立した状態となり、その状態で不感帯に入り静止摩擦のために倒立することになる。

図 15 は不感帯を考慮したシミュレーションの結果であるが実機の実験データと酷似している。

5. おわりに

本研究では振子のみの場合のファジー制御則を VSS 理論を利用して台車についても振子とは別に新たに制御則を構成し、最後に台車の力学的影響を振子制御の目標値として組み込むというカスケード制御方式を提案した。提案したファジー制御では仮想平衡点の考え方をを用いているため、台車を考慮した振子の目標値が 0 となれば制御出力は出ないため、たとえ振子が傾いていてもそれを保証するように台車がずればよいことになる。しかし、本方式のように、スライディングモードの存在条件により振子と台車の相互作用を分離すれば、ロバスト安定な制御系が実現できることを示した。更に、実験的には従来難しいとされた台車の位置制御までが達成できることを示した。

最後に、本論文に対し有益な討論をいただいた本学電子機械工学科 近藤孝広助教授、また実験などで御協力いただいた本学大学院学生 町支秀如氏に謝意を表します。また、本研究の一部は文部省科学研究費一般研究(C)

05650422の補助によったものである。

(平成6年4月25日受付, 同6年7月29日再受付)

文 献

- (1) 張曉敦・荒木光彦:「ファジー制御系の数理解析と産業応用の可能性について」, SICE 論文集, 26, No. 11, 1267 (平2)
- (2) 原島文雄・橋本秀紀:「Sliding Mode とその応用-I」, システムと制御, 29, No. 2, 94 (昭60)
- (3) 川路茂保・汐月哲夫・野口 功:「倒立振子のファジー制御と安定解析」, 第18回制御理論シンポジウム資料, p. 315 (平元)
- (4) 中野和司・江口三代一, 他:「ファジー推論によるT字型倒立振子の制御について」, 第36回SICE学術講演会予稿集, p. 345 (平3)
- (5) E. Ostertag & M. J. Corvalho-Ostertag: "Fuzzy Control of an Inverted Pendulum with Fuzzy Compensation of Friction Forces". *Int. J. Systems Sci.*, 24, No. 10, 1915 (1993)
- (6) 美多勉・原辰次・近藤良:基礎ディジタル制御(昭63)コロナ社
- (7) K. Nakano, et al.: "Personal CAD System for Digital Control Education and Its Application to Stabilization of an Inverted Pendulum System", *Trans. IEE Japan*, 111-A, No. 5, 482 (1991)

付 録

1. 倒立振子の運動方程式

(i) 台車についての運動方程式

$$(M+m)\ddot{x} - ml \sin \theta \ddot{\theta} + ml \cos \theta \dot{\theta}^2 + D_x \dot{x} = G_0 u \quad \text{.....(付1)}$$

(ii) 振子についての運動方程式

$$ml \cos \theta \ddot{x} + (ml^2 + J)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + D_\theta \dot{\theta} = 0 \quad \text{.....(付2)}$$

なおパラメータの詳細については付図1を参照されたい。

2. ファジー制御系の到達条件と存在条件

(13), (14)式よりなる閉ループ系は非線形となるのでリアプノフの方法を用いて到達条件および存在条件を求める。

x : 台車位置(m)
 θ : 振子傾き(rad)
 M : 台車質量(=105.04)(kg)
 m : 振子質量(=1.718)(kg)
 J : 振子の慣性モーメント(=0.1166)(kg・m²)
 L : 振子の長さ(m)
 l : 振子の重心位置(=0.418)(m)
 D_x : 台車の摩擦係数(=1,455.8)(N/m/s)
 D_θ : 振子支点の摩擦係数(=0.01244)(N/(rad/s))
 G_0 : 駆動ゲイン(=101.94)(N/V)

付図1 倒立振子システム
app. Fig. 1. Inverted pendulum system.

第1, 3象限において次式のリアプノフ関数を考える。

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\theta^2 + \dot{\theta}^2) \quad \text{.....(付3)}$$

明らかに, $V(\theta, \dot{\theta}) > 0$, $V(0, 0) = 0$ である。(付3)式を微分すると

$$\dot{V} = \theta \dot{\theta} + \dot{\theta} \ddot{\theta} = (1+a_1)\theta \dot{\theta} + a_2 \dot{\theta}^2 + a_3 \dot{\theta} u$$

となり, 更に $\theta = r \cos \phi / k_1$, $\dot{\theta} = r \sin \phi / k_2$ なる関係があるので, $R = r / k_1$, $k = k_2 / k_1$ とおけば,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1+a_1}{k} R^2 \cos \phi \sin \phi + a_2 \left(\frac{r \sin \phi}{k} \right)^2 \\ &\quad + a_3 \left(\frac{R \sin \phi}{k} \right) u \\ &= R^2 \sin \phi (p_1 \cos \phi + p_2 \sin \phi + p_3) \quad \text{.....(付4)} \end{aligned}$$

となる。ただし, $B = bk_1$ とすれば,

$$p_1 = \frac{1+a_1}{k}, \quad p_2 = \frac{a_2}{k}$$

$$p_3 = \begin{cases} \frac{a_3 B}{k} < 0 & \text{第1象限} \\ -\frac{a_3 B}{k} > 0 & \text{第3象限} \end{cases}$$

となる。第1象限内では, $R^2 \sin \phi \geq 0$ (等号は $\phi = 0$ のとき成立) であるので, (付4)式で

$$f(\phi) = p_1 \cos \phi + p_2 \sin \phi + p_3 \quad \text{.....(付5)}$$

とおいたとき $f(\phi) < 0$ であれば $\dot{V} < 0$ を満たす。ところが第1象限内では,

$$\frac{df}{d\phi} = -p_1 \sin \phi + p_2 \cos \phi < 0$$

が常に成り立ち f は ϕ について減少関数である。従って, $f(0) = p_1 + p_3 < 0$ であればよい。すなわち,

$$B = \frac{u_m}{\theta_m} > -\frac{1+a_1}{a_3} \quad \text{.....(付6)}$$

となるように u_m, θ_m を与えればよい。第3象限においても同様に(付6)式が得られる。

次に, スライディングモードの存在条件について考える。切換線を $c\theta + \dot{\theta} = 0$ として, $s = c\theta + \dot{\theta}$ より

$$s = R \left(c \cos \phi + \frac{1}{k} \sin \phi \right) \quad \text{.....(付7)}$$

と表現する。 $\dot{s}$ は

$$\dot{s} = R \left(a_1 \cos \phi + \frac{c+a_2}{k} \sin \phi \right) + a_3 u \quad \text{.....(付8)}$$

となる。このとき, $s \rightarrow 0$ で $s\dot{s} < 0$ であればスライディングモードが存在する。いま, (19)式の関係より第2象限の内部 ($\pi/2 < \phi < \pi$) における $s\dot{s}$ を

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= R^2 g(\phi) = R^2 \{ g_1(\phi) + g_2(\phi) \} \\ g_1(\phi) &= a_3 b \left\{ -\frac{2}{\pi} (1 - S_p) \phi + (2 - S_p) \right\} \\ &\quad \times \left(c \cos \phi + \frac{1}{k} \sin \phi \right) \quad \text{.....(付9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(\phi) &= a_1 \cos^2 \phi + \frac{c+a_2}{k^2} \sin^2 \phi + \frac{a_1 + (c+a_2)}{k} \\ &\quad \times \sin \phi \cos \phi \quad \text{.....(付10)} \end{aligned}$$

と表現する。よって, $s \rightarrow 0$, すなわち $r \rightarrow 0$ のときに $s\dot{s} < 0$ であるためには, $g(\phi) < 0$, $\phi \in (\pi/2, \pi)$ でなければなら

ない。

まず、 $\phi \in (\pi/2, \pi)$ で $g_1(\phi) \leq 0$ であるための条件は次のようになる。

$$c = -\frac{1}{k} \tan \phi_0, \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2} \frac{2-S_p}{1-S_p} \dots\dots\dots (\text{付11})$$

このとき、 $\phi = \phi_0$ でのみ $g_1 = 0$ となる。

次に、(付11)式の条件下で、 $g(\phi) < 0$ 、 $\phi \in (\pi/2, \pi)$ が成立する条件を $S_p = 0$ (厳密には $S_p = 0^-$) の場合について検討する。

(付11)式より $\phi_0 = \pi$ 、 $c = 0$ であるから、

$$g(\phi) = \frac{\sin \phi}{k} h(\phi)$$

$$h(\phi) = \frac{a_2}{k} \sin \phi + a_1 \cos \phi + 2a_3 B \left(1 - \frac{\phi}{\pi}\right)$$

となる。 $\pi/2 < \phi < \pi$ で $\sin \phi / k > 0$ であるから、同じ範囲で $g(\phi) < 0$ であるには $h(\phi) < 0$ であればよい。ところが、

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a_2}{k} + a_3 B < 0, \quad h(\pi) = -a_1 < 0$$

が常に成立するので、 $dh/d\phi = 0$ なる $\phi_1 \in (\pi/2, \pi)$ が存在すれば、この ϕ_1 に対して $h(\phi_1) < 0$ であれば $g(\phi) < 0$ がいえる。

また、 $\phi_0 = \pi$ であることから c は k, B の値に関係なく 0 に固定される。このことは、制御系を設計する際に $g(\phi)$ の符号についてのみ考慮すればよく、自由にパラメータを設定できることを示している。なお、 $S_p = -1$ のような場合には、スライディングモードが存在せず、切換線に拘束されるような安定化が実現できない。

中野 和 司 (正員) 1951年6月25日生。1975年九州工業大学工学部制御工学科卒業。1980年九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。九州大学助手などを経て、1992年より福岡工業大学教授。現在、システム同定やデジタル制御などの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会、システム制御情報学会、情報処理学会会員。

江口 三代一 (非会員) 1957年9月26日生。1980年九州工業大学工学部電気工学科卒業。1985年九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。九州大学助手などを経て、1990年より福岡工業大学助教授。現在、システム同定やメカニカルシステム制御などの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会、システム制御情報学会、電子情報通信学会会員。

山口 芳 弘 (正員) 1967年4月30日生。1991年福岡工業大学電気工学科卒業。同年富士電機(株)入社。1993年より福岡工業大学情報処理センター勤務。現在、メカニカルシステム制御の研究に従事。計測自動制御学会会員。