H_∞ 制御と外乱オブザーバの理論

正員 美多 勉 (東京工業大学)
 学正員 平田 光男 (千葉大学)
 正員 村田 健一 (千葉大学)

Theory of H_∞ Control and Disturbance Observer

Tsutomu Mita, Member (TIT), Mitsuo Hirata, Student Member, Kenich Murata, Member (Chiba University)

This paper reviews a disturbance canceling control based on a disturbance observer from the view point of servo controllers and gives several new points of this control methodology. Especially, the extended H_∞ control, previously proposed by authors, is proven to be a special type of such a disturbance canceling controller which has an ability to shape the frequency response of the complementary sensitivity function.

キーワード: H_∞ 制御, 外乱オブザーバ

1. はじめに

近年外乱オブザーバを用いた外乱相殺制御がロボットを含む各種産業機器の制御によく用いられている。^{(1),(2)} この理由として以下のことが考えられる。

1. 外乱オブザーバを使う方法は理論的に簡単である
2. 低次元の制御対象では色々な観点から解釈ができる

しかし、外乱オブザーバの持つ能力を越えた期待がなされていることもある。実際、制御理論の立場からみれば外乱オブザーバを用いた制御は単に1型のサーボ系の設計法以外のなにものでもない。したがって、例えば、ロバスト安定性に関しての配慮がこの方法には欠けていると考えられる。本論文では、外乱オブザーバの理論をもう一度見直した後、外乱オブザーバを使った外乱相殺制御器が「1型のサーボ系を構成し、感度関数の角周波数 $\omega=0$ のときの整形をする」ものであることを明確にすると共に、この枠組みが一般的に H_∞ 制御に組込まれていることを示し、逆に外乱オブザーバの立場から H_∞ ロバストサーボ系の設計法を考察した。すなわち、感度関数に対する重みを外乱のモデルとして選んだ入力端の混合感度問題を拡張 H_∞ 制御^{(6),(7)}で解き、 H_∞ 制御器は「外乱オブザーバによる外乱相殺と(準)相補感度関数の自動整形」を行う制御器であることを示した。 H_∞ 制御に関するこのような工学的考察は H_∞ 制御を産業応用する場合において、特に H_∞ 制御の利点を知る上で意義深いと考えられる。

2. 外乱オブザーバと積分制御

2.1 外乱オブザーバの構成

本章では、図1のように制御対象を

図1 制御対象

Fig.1. Plant

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + b d(t) + b u(t) \dots\dots\dots (1a)$$

$$y(t) = c x_0(t) \dots\dots\dots (1b)$$

あるいは、伝達関数で

$$P(s) = c(sI - A_0)^{-1} b \dots\dots\dots (1c)$$

と記述する。ここで、 x_0, u, y, d は夫々状態変数、操作量、観測出力、実外乱であり、 $A_0(n_0 \times n_0), b(n_0 \times 1), c(1 \times n_0)$, としておく。また、 (A_0, b) 可制御、 (A_0, c) 可観測とし、 $P(s)$ は原点に零点を持たないものとする。以下外乱を推定するオブザーバとその推定値を使った外乱相殺制御について扱うが、従来の産業応用実例からみて、扱う範囲を以下のようにする。

1. 通常、外乱オブザーバは外乱がステップ状の場合にしか適用されないで、 d はステップとする。(虚軸上に極を持つ信号発生器から生成されるものであれば3章の結論に影響しない。)
2. 推定した外乱が定ゲインフィードバックで相殺できるために外乱に関する入力ベクトルは操作量 u の入力ベクトル b と同じとする(定数倍でも後の議論には影響しない)。これは、マッチング条件である。

すると、第1項から外乱は

$$\dot{d}(t) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

図3 制御系と制御偏差
Fig.3. Control system and control error

$$F(s) \cdot c \operatorname{adj}(sI - A_0)b = 1 \quad \text{at } s = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

が満たされ、図2の $F(s)$ への入力端の信号

$$c \operatorname{adj}(sI - A_0)b \cdot d(s) \quad \dots\dots\dots (17)$$

に作用して、直流外乱 $d(s) = 1/s$ に対しての定常推定誤差を0に保っているのが特徴である。

2.2 外乱消去制御と1型サーボ系

次に推定した外乱 $\hat{d}$ を用い、図2のように

$$u = -\hat{d} \quad \dots\dots\dots (18)$$

のフィードバック制御を使って直流外乱 d を相殺することを考える。このとき、(9) 式のオブザーバと (18) 式を組み合わせると

$$\dot{z} = (\hat{A} - b\alpha)z - (L + b\beta)y, \quad u = -\alpha z - \beta y \quad \dots\dots (19)$$

となり、この制御則の $y - u$ 間の直列制御器⁽⁵⁾ $K(s)$ としての表現は、

$$\begin{aligned} K(s) &= \alpha(sI - \hat{A} + b\alpha)^{-1}(L + b\beta) - \beta \\ &= -\beta c(sI - A_0 - (L + b\beta)c)^{-1}(L + b\beta) - \beta \\ &= -\frac{\beta \{c \operatorname{adj}(sI - A_0)(L + b\beta) + \det[sI - A_0 - (L + b\beta)c]\}}{\det[sI - A_0 - (L + b\beta)c]} \\ &= -\frac{\beta \det[sI - A_0]}{\det[sI - A_0 - (L + b\beta)c]} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

の外乱相殺制御器となる。特徴として、(20) 式の分母多項式 $D(s)$ は

$$\begin{aligned} D(0) &= \det[-A_0 - (L + b\beta)c] \\ &= \det[-\hat{A} - b\beta c] = \det[-\hat{A}] \cdot \det[I + \hat{A}^{-1}b\beta c] \\ &= \det[-\hat{A}] \cdot (1 + \beta c \hat{A}^{-1}b) = 0 \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

を満たし、原点 $s = 0$ に根を持つ。したがって、 $N(0) = \beta \det[-A_0] \neq 0$ 、すなわち、 $P(s)$ が原点に極を持たなければ (20) 式の $K(s)$ は原点に極を持つ。 $P(s)$ の零点が原点にない仮定しているので、このことは、 $K(s)$ が図3で $e(\infty) = 0$ を達成する1型サーボ補償器となっていることを意味する。 $P(s)$ が原点に極を持つ場合には、(20) 式で極零相殺が生じ、 $K(s)$ は原点に極を持たないが、この場合は $P(s)$ の原点極が自然の内部モデルとなっている。文献⁽¹⁾で扱っている $P(s) = 1/s$ はこの場合である。もう少し具体的に見てみよう。

図4(a) 外乱相殺制御の例題
Fig.4(a). Example of Disturbance canceling control

図4(b) 外乱相殺制御の例題
Fig.4(b). Example of Disturbance canceling control

【例題1】

まず、 $n_0 = 1$ で

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad (A_0 = -1, b = c = 1)$$

の場合を例にとろう。また、オブザーバゲイン L を

$$L = -\ell$$

としておく。ただし、 $\ell > -1$ 。すると、外乱オブザーバ (10) 式は図4(a) のように

$$\hat{d}(s) = \frac{1+\ell}{s+1+\ell} \{(s+1)y(s) - u(s)\}$$

となる。また、外乱相殺制御器 (20) 式は

$$K(s) = -\frac{(\ell+1)(s+1)}{s}$$

の1型のサーボ制御器となっている。

次に、同じ $n_0 = 1$ であるが、制御対象が原点極を持つ例

$$P(s) = \frac{1}{s} \quad (A_0 = 0, b = c = 1)$$

の場合を例にとろう。オブザーバゲインは $L = -\ell$ において $\ell > 0$ である。すると、外乱オブザーバは図4(b) のように

$$\hat{d}(s) = \frac{\ell}{s+\ell} \{sy(s) - u(s)\}$$

となり、外乱相殺制御器は

$$K(s) = -\ell$$

のゲインフィードバックになる。これは、 $P(s)$ の原点極自体が外乱の内部モデルになるからである。

上の二つの $P(s)$ とも分子多項式が $\text{cadj}(sI - A_0)b = 1$ であるので、 $F(0) = 1$ として(16)式が満たされている。この例題からも確認できるように外乱オブザーバ理論から導かれた $K(s)$ は1型サーボ制御器となったり、 $P(s) = 1/s$ の場合には単なるゲインフィードバックにしかない。すなわち、パラメータ変動に対して定常偏差が0に保たれる意味でのロバスト性しか持ち合せず、ロバスト安定化に関しては理論的に期待できるものは少ないと考えられる。以下このことについて見てみよう。

2.3 感度関数と相補感度関数

感度関数と相補感度関数について考えてみよう。一般化しても有意義な結果は得られないので、簡単のため $P(s) = 1/(s+1)$ の場合について扱う。すると、感度関数は

$$S = (1 - PK)^{-1} \frac{s}{s+1+\ell} \quad (22)$$

となり、1型サーボ系の特徴として原点の零点を持つ。乗法変動に対するロバスト安定性指標としての相補感度関数、あるいは、加法変動に対するロバスト安定指標としての準相補感度関数⁽⁶⁾は、夫々

$$T = (1 - PK)^{-1} PK = -\frac{1+\ell}{s+1+\ell} \quad (23)$$

および

$$T_a = (1 - PK)^{-1} K = -\frac{(1+\ell)(s+1)}{s+1+\ell} \quad (24)$$

となり、 $|T(j\omega)|$ は折点角周波数 $1+\ell$ 以上で高々-20dBでしか減衰せず、 $|T_a(j\omega)|$ は $\ell > 0$ と取ると全ての周波数帯域でゲインが1以上となる。何れにしても高周波域で高いゲインを持つ不確定性に対するロバスト安定性に対処できる自由度がない。このような要求に対して文献⁽²⁾で掘らは外乱オブザーバのフィルター部 $F(s)$ を選ぶことを考えているが、その自動設定法に関しては明らかでない。H ∞ 制御は以下に示すように正にそれを導いてくれる。

3. H ∞ 制御と外乱オブザーバ

3.1 H ∞ サーボ問題への帰着

以下では、変動を加法変動とした場合の入力端混合感度問題を解くことによって準相補感度関数の整形もできるH ∞ 制御器を求め、それが外乱オブザーバによるサーボ系設計を包含していることを示す。

まず図3では感度関数は外乱に対して

$$e(s) = S(s)d(s) \quad (25)$$

の関係を満たす。そこで、一定外乱 d のモデルとして重み関数

図5 入力端混合感度問題
Fig.5. Mixed sensitivity problem

$$W_s = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{s} \quad (26)$$

を導入し、 $SW_s(s)$ を安定にすることを考える。このためには、 $S(s)$ が原点に零点を持ち、 W_s の原点極を相殺する必要があるが、この時、 $e(s)$ は安定となり、定常偏差のない1型サーボ系となる。ここで、 γ は調整係数である。 SW_s が安定になる条件は適当な γ に対して

$$\|SW_s\|_{\infty} < 1 \quad (27)$$

となることに等価である。

また、 $P(s)$ が加法変動 $\Delta(s)$ を持ち、 $P+\Delta$ と変わっても閉ループ系の安定性が保たれるロバスト安定条件は以下の通りである。すなわち、 Δ の見積値を安定な重み関数 $W_a(s)$ で表し、次の関係が成り立つとする。

$$|\Delta(j\omega)| < |W_a(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (28)$$

この時

$$\|T_a W_a\|_{\infty} < 1 \quad (29)$$

が成り立てばロバスト安定となることが知られている⁽⁶⁾。(27)、(29)両式を満足させる一つの方法として入力端の混合感度問題があり、

$$\|SW_s, T_a W_a\|_{\infty} < 1 \quad (30)$$

を実現する問題となる。

これは図5のように仮想外乱 w_1, w_2 と制御量 z を設けて

$$z = (SW_s, TW_a) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := G_{zw} w \quad (31)$$

と定義したとき、閉ループ系を内部安定にし、かつ、

$$\|G_{zw}\|_{\infty} < 1 \quad (32)$$

とする $K(s)$ を見つける問題として定式化できる。またこの問題は図5で $K(s) = 0$ とおいた時の入出力関係

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_s & 0 & 1 \\ PW_s & W_a & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{pmatrix} \quad (33)$$

を状態方程式で実現した一般化プラント

図6 入力重みと出力重みの配置
Fig.6. Placement of input weight and output weight

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \dots\dots\dots (34) \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned}$$

あるいは

$$G(s) = \left(\begin{array}{cc|cc} G_{11}(s) & G_{12}(s) & & \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right) \quad (35)$$

を使って解くことができる。ただし、今の場合、(26)式の W_0 が不安定な原点極を持つため、 (A, B_2) が可安定でなくなり、この一般化プラントに対する H_∞ 制御問題は標準問題ではなくなる⁽⁶⁾。文献(6)、(7)では図6に示すような w に直結された重み W_p と z に直結された重み W_q があり、しかも、 W_p 、あるいは、 W_q が虚軸上に不安定極を持つ場合の H_∞ 制御問題を考えている。今、図5を図6で表した場合

$$W_n = \text{diag}(W_s, W_a), \quad W_a = 1 \dots \dots \dots (36)$$

の関係がある。したがって、今の問題は、 W_p が W_s の原点極から派生された虚軸上の極 $A_p=0$ を持つ場合に当たる。このような条件下で、文献(6),(7)では、(32)式を満たし、かつ重み以外の物理系を内部安定にする H_∞ 制御器 $K(s)$ を求める問題が扱われており、この問題が解けると $K(s)$ は $A_p=0$ を極とする1型サーボ制御器となることが示されている。これについて付録3にまとめておく。以下、付録2と付録3に基づいて話を進める。

3.2 H_∞ 制御と外乱オブザーバ

以下，簡単のため虚軸上の極を持たない $P(s)$ のみを扱う[†]。また，重み W_a を

$$W_a(s) = c_a (sI - A_a)^{-1} b_a + \theta \quad \dots\dots\dots (37)$$

とおき、 $A_a(n_a \times n_a)$, $b_a(n_a \times 1)$, $c_a(1 \times n_a)$, $\theta(1 \times 1)$ で、 A_a は安定、 $A_a - b_a \theta^{-1} c_a$ は虚軸上に固有値を持たないとする。そして、一般化プラント (35) 式を (33) 式から求めると以下ようになる。

[†] P が虚軸上の極を持つ場合については、文献[8],[9]参照。

$$G(s) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_0 & b & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1/\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_a & 0 & b_a & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline c & 0 & c_a & 0 & \theta & 0 \end{array} \right) \dots\dots\dots (38)$$

ここで、 $P(s)$ は虚軸上に極を持たないと仮定しているので、 A_0 の固有値は虚軸上にない。すると、この一般化プラントは以下のように付録3の条件 $A1') \sim A4')$ と $B1) \sim B3)$ を満たす。まず、付録2、3で使われている記号に関して、

$$E_{12} = D_{12}^T D_{12} = 1, E_{21} = D_{21} D_{21}^T = \theta^2 \dots\dots\dots (39)$$

となっていることに注意する。すると (38) 式から

AI') $A_p = 0$ は (A, B_2) の不可制御極であるが, (A, B_2) はこの他に不安定な不可制御極を持たない。

A2') $D_{12} = 1$ は列フルランク

A3') $D_{12} = 1, D_{12}^{\dagger} = 1, D_{12}^{\perp} = 0$ から

$$A - B_2 D_{12}^\dagger C_1 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_g \end{pmatrix} \dots\dots\dots (40a)$$

$$D_{12}^\perp C_1 = 0 \dots\dots\dots (40b)$$

を得る。よって、 A_0 の固有値、 A_a の固有値、 $A_p=0$ が G_{12} の不変零点となる。しかし、 A_p 以外 $j\omega$ 不変零点はない。

$$A4') \quad V = (0_{1 \times n_0}, 1, 0_{1 \times n_0})^T \text{ かつ}$$

$$(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)V = V A_p, \quad D_{12}^\dagger C_1 V = 0 \quad \dots\dots (41)$$

を満たし、かつ、 $C_0V=0$ を満足する。

また、

B1) $P(s)$ が $s=0$ に零点を持たないと仮定しているの
で, (A, C_2) は可観測である。

B2) $D_{21} = (0, \theta)$ は行フルランク

B3) $D_{21}^\dagger = (0, \theta^{-1})^T$, $D_{21}^\perp = (1, 0)^T$ かつ

$$A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 = \begin{pmatrix} A_0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -b_a c/\theta & 0 & A_a - b_a c_a/\theta \end{pmatrix},$$

$$B_1 D_{21}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得、一般に $(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2, B_1 D_{21}^\dagger)$ は可制御となり G_{21} は不変零点を持たない。

としてこれらの仮定が満たされていることが分かる。

よって付録3の定理A1のI)~III)が満たされていれば、 d の内部モデルとして $A_{\hat{p}} = 0$ を極とする H_{∞} 制御器が存在する。

まず,

$$\begin{aligned} &X(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1) + (A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)^T X \\ &+ X(B_1 B_1^T - B_2 E_{12}^{-1} B_2^T)X + (D_{12}^\dagger C_1)^T D_{12}^\dagger C_1 = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

の疑似安定化解 $X \geq 0$ を求めよう。この場合、 A_0 が安定か否かで解が異なるので、以下 A_0 が安定な場合と不安定な場合に分けて検討する。

A_0 が安定な場合

(40) 式に注目すると、 A_0 が安定なら、

$$X = 0 \quad (43)$$

が疑似安定化解となることが分かる。なぜならば、この時 (A13) 式の A_X は

$$A_X = A - B_2 D_{12}^\dagger C_1 \quad (44)$$

となり、 $A_p = 0$ を除いて安定で、しかも、 $X = 0$ なので $XV = 0$ が満たされる。次に、(A15) 式の

$$\begin{aligned} &Y(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T + (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)Y \\ &+ Y(C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2)Y + B_1 D_{21}^\dagger (B_1 D_{21}^\dagger)^T = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

に安定化解 $Y \geq 0$ が存在すれば定理 A1 の II) が満たされ、III) は $YX = 0$ なので自動的に満たされる。安定化解 $Y \geq 0$ が存在するか否かは γ の大きさや θ の大きさによって決まる。以下、これが存在するとして、 H_∞ 制御器 $K(s)$ を求める。簡単のため中心解に限定すると、これは

$$K(s) = -F_\infty(sI - \bar{A})^{-1} L_\infty \quad (46)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_2 F_\infty + L_\infty C_2 \\ F_\infty &= -D_{12}^\dagger C_1, \quad L_\infty = -B_1 D_{21}^\dagger - Y C_2^T E_{21}^{-1} \end{aligned} \quad (47)$$

となる。(46) 式を状態方程式で記述すれば

$$u = F_\infty \hat{x} \quad (48a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A + B_2 F_\infty + L_\infty C_2) \hat{x} - L_\infty y \\ &= (A + L_\infty C_2) \hat{x} - L_\infty y + B_2 u \end{aligned} \quad (48b)$$

となり、同次元オブザーバを併合したフィードバック制御となっている。なぜならば、安定化解 $Y \geq 0$ が存在する場合、 $A + L_\infty C_2$ の安定性が保証されるからである⁽⁶⁾。特に重要な点は (47) 式から F_∞ が

$$F_\infty = - \begin{pmatrix} 0_{1 \times n_0}, & 1, & 0_{1 \times n_a} \end{pmatrix} \quad (49)$$

と計算され、しかも、オブザーバ (48b) 式の第 $n_0 + 1$ 番目の状態は (38) 式から分かるように

$$d = W_s w_1 \quad (50)$$

としてモデル化された実外乱 d である。したがって、(48a) 式の制御は正に

$$u = -\hat{d} \quad (51)$$

の外乱オブザーバによる外乱相殺制御となっている。このときの制御系構成図は図 2 においてフィルタ $F(s)$ を $W_a(s)$ を考慮して決めたものとなり、(47) 式の L_∞ を

$$L_\infty = - \begin{pmatrix} \ell_1^T, & \ell_2, & \ell_3^T \end{pmatrix}^T \quad (52)$$

とおくと

$$F(s) = \frac{\ell_2 \cdot \det[sI - A_a]}{\det[sI - A - L_\infty C_2]} \quad (53)$$

となり、しかも、(16) 式の制約を満たしていることが確かめられる。

A_0 が不安定な場合

A_0 が不安定ならば、(38), (42) 式から

$$X = \text{diag} \begin{pmatrix} X_0, & 0, & 0_{1 \times n_a} \end{pmatrix} : X_0 \geq 0 \quad (54)$$

の形式が疑似安定化解となる (付録 4 参照)。この場合 $X \neq 0$ であるが

$$B_1^T X = 0 \quad (55)$$

が満たされる。次に、以前同様、(45) 式は安定化解 $Y \geq 0$ を持つと仮定する。すると、 H_∞ 制御器の中心解は (46) 式で与えられるが、そのパラメータ (47) 式は

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_2 F_\infty + Z L_\infty C_2, \quad Z = (I - YX)^{-1} \\ F_\infty &= -D_{12}^\dagger C_1 - E_{12}^{-1} B_2^T X \\ L_\infty &= -B_1 D_{21}^\dagger - Y C_2^T E_{21}^{-1} \end{aligned} \quad (56)$$

と変り、(48) 式も

$$u = F_\infty \hat{x} \quad (57a)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A + Z L_\infty C_2) \hat{x} - Z L_\infty y + B_2 u \quad (57b)$$

と変わる。しかし、以前同様に同次元オブザーバを併合したフィードバック制御となっている。この場合にも、 $Y \geq 0$ が安定化解で、 $\rho(XY) < 1$ が成り立てば、 $A + Z L_\infty C_2$ の安定性が証明できる (付録 5 参照)。さらに

$$F_\infty = -(0_{1 \times n_0}, 1, 0_{1 \times n_a}) - (b^T X_0, 0, 0_{1 \times n_a}) \cdots \quad (58)$$

と計算されるので制御入力

$$u = -\hat{d} - b^T X_0 \hat{x}_0 \quad (59)$$

となり、 $-b^T X_0 \hat{x}_0$ のフィードバックによって制御対象 $P(s)$ を安定にすると同時に外乱の相殺を行う制御となっている。第 2 章では暗に A_0 を安定と仮定したが、 A_0 が不安定の場合には外乱オブザーバを使った場合でも同様な安定化法を採用する必要がある。次の例題を解いてもう少し具体的に計算してみると共に W_a を選んで T_a の高周波特性が整形できることを確認してみよう。

図7 $W_{a1} \sim W_{a3}$ の周波数応答
Fig.7. Frequency response of $W_{a1} \sim W_{a3}$

[例題 2]

制御対象を例題1と同じ $P(s) = 1/(s+1)$ とし、さらに、 W_a を一定値 θ とした場合、一般化プラントは(38)式から A_a に関する列と行を除けば

$$G(s) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \theta & 0 \end{array} \right)$$

となり、(43)–(53)式が全て成り立つ。すなわち、疑似安定化解は $X = 0$ となり、安定化解 $Y \geq 0$ を

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

とおくと(47)式から

$$L_\infty = -(\alpha, \beta)^T / \theta^2 = -(\ell_1, \ell_2)^T$$

となり、また $F_\infty = -(0, 1)$ となるので、(46)式の H_∞ 制御器は

$$K(s) = \frac{\ell_2(s+1)}{s(s+1+\ell_1)}$$

の1型補償器となっている。制御系は図4(a)においてフィルター部を

$$F(s) = \frac{\ell_2}{s^2 + (1+\ell_1)s + \ell_2}$$

とした外乱オブザーバによる外乱相殺制御器となっている。また、感度関数、準相補感度関数は夫々

$$S = \frac{s(s+1+\ell_1)}{s^2 + (\ell_1+1)s + \ell_2}, \quad T_a = \frac{\ell_2(s+1)}{s^2 + (\ell_1+1)s + \ell_2}$$

となる。 T_a の高周波域での減衰率は -20dB となっているが、その周波数応答は必ずしも ℓ_1, ℓ_2 で完全に決められない。

図8 準相補感度関数 T_a の周波数応答
Fig.8. Frequency response of T_a

[例題 3]

次に W_a を選ぶことによって T_a を整形する。そこで

$$\begin{aligned} W_{a1} &= 0.1 \\ W_{a2} &= \frac{s+1}{0.01s+1} \times 0.1 \\ W_{a3} &= \left(\frac{s+1}{0.01s+1} \right)^2 \times 0.1 \end{aligned}$$

としてみよう。これらの周波数応答は図7に示すようになっている。

そこで、なるべく小さい γ に対して混合感度問題を解くと、 $T_a(s)$ の周波数応答は図8となり W_a の逆数 W_a^{-1} の周波数応答によって高周波域の特性が整形されていることがわかる。もちろん全ての場合に H_∞ 制御器 $K(s)$ は $s=0$ に極を持つ。したがって、 H_∞ 制御器は T_a の整形が W_a によって自動的に行なわれる外乱相殺制御器であることが分かる。

4. おわりに

外乱オブザーバとそれに基づいた外乱相殺制御を理論的に解析し、この制御形態が H_∞ 制御に自然な形で含まれ、しかも、 H_∞ 制御ではロバスト安定性を確保するための相補感度関数の整形も自動的に行なわれると言う利点があることを示した。(平成6年9月26日受付)

文 献

- (1) 大西: 「外乱オブザーバによるロバストモーションコントロール」, 日本ロボット学会誌, **11**, 4, 486~493 (1993)
- (2) 梅野, 堀: 「2自由度制御系のパラメトリゼーションに基づくロバストサーボ系の設計」, 電学論D, **109-D**, 11, 825~832 (1989)
- (3) 川路: オブザーバ, コロナ社
- (4) 小郷, 美多: システム制御理論入門, 実教出版
- (5) 中野, 美多: 制御基礎理論, 昭晃堂
- (6) 美多: H_∞ 制御, 昭晃堂

- (7) 美多, 栗山, 劉: 「虚軸上に極を持つ重みを許す H_∞ 制御系の設計」, SICE 論文集, **29**, 11, 1320~1329 (1993)
 (8) 美多, 平田, S. Villas: 「虚軸上に極を持つ制御対象に対する H_∞ サーボ系設計問題」, 電気学会論文誌 D, 掲載予定 (1995)
 (9) 美多: H_∞ 制御入門, SICE セミナーテキスト (1995, 6)

付録 1 [関数オブザーバ]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A1)$$

に対して

$$\eta = Hx \quad \dots\dots\dots (A2)$$

と言う状態変数の一部を推定するオブザーバ

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \hat{A}z - Ly + MBu \\ \hat{\eta} &= \alpha z + \beta y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A3)$$

は関数オブザーバと呼ばれ,

$$\begin{aligned} \hat{A}M &= MA + LC \\ H &= \alpha M + \beta C \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A4)$$

を満たされ, かつ, $\hat{A}$ が安定なら, $z \rightarrow Mx, \hat{\eta} \rightarrow \eta (t \rightarrow \infty)$ となる。ただし, M の次元は唯一でない。 $\hat{A}$ の次元が最小となるものは最小次元と呼ばれている。また, 同次元オブザーバは $H = I$ の場合に対応する。

付録 2 [不変零点の定義]⁽⁶⁾

1. D_{12} を列フルランクとする。このとき, $D_{12}^\dagger, D_{12}^\perp$ を

$$\begin{pmatrix} D_{12}^\dagger \\ D_{12}^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{12}, & (D_{12}^\perp)^T \end{pmatrix} = I \quad \dots\dots\dots (A5)$$

を満たすものとして定義する。ただし, D_{12} が正方の場合には $D_{12}^\perp = 0$ とする。同様に, D_{21} を行フルランクとする。このとき, $D_{21}^\dagger, D_{21}^\perp$ を

$$\begin{pmatrix} D_{21} \\ (D_{21}^\perp)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{21}^\dagger, & D_{21}^\perp \end{pmatrix} = I \quad \dots\dots\dots (A6)$$

を満たすものとして定義する。ただし, D_{21} が正方の場合には $D_{21}^\perp = 0$ とする。

2. D_{12} を列フルランクとする。このとき,

$$G_{12}(s) = C_1 (sI - A)^{-1} B_2 + D_{12} \quad \dots\dots\dots (A7)$$

の不変零点は対

$$(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1, D_{12}^\perp C_1) \quad \dots\dots\dots (A8)$$

の不可観測極である。特に, D_{12} が正方の時には, $A - B_2 D_{12}^{-1} C_1$ の全固有値が G_{12} の不変零点となる。また, D_{21} が行フルランクの場合

$$G_{21}(s) = C_2 (sI - A)^{-1} B_1 + D_{21} \quad \dots\dots\dots (A9)$$

の不変零点は対

$$(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2, B_1 D_{21}^\perp) \quad \dots\dots\dots (A10)$$

の不可制御極である。特に, D_{21} が正方の時には, $A - B_1 D_{21}^{-1} C_2$ の全固有値が G_{21} の不変零点となる。

付録 3 [拡張 H_∞ 制御]^{(6), (7)}

一般化プラントとして図 6 において W_p のみが虚軸上の極 A_p を持つ場合を考える。これは, 文献 (6), (7) のケース 1) に当るので, その場合に限った H_∞ 制御問題の可解条件と H_∞ 制御器をまとめておく。

まず, 前提条件として以下が成り立つ必要がある。

A1') A_p を除いて, (A, B_2) は可安定

A2') D_{12} は列フルランク

A3') G_{12} は A_p を不変零点とするが, 他に $j\omega$ 不変零点を持たない。すなわち, $(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1, D_{12}^\perp C_1)$ の $j\omega$ 軸上の不可観測極は A_p のみである。

A4') $(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)V = V A_p, D_{12}^\perp C_1 V = 0 \dots (A11)$ を満たす $V \neq 0$ が $C_2 V = 0$ を満たす。

および

B1) (A, C_2) は可検出

B2) D_{21} は行フルランク

B3) G_{21} は $j\omega$ 不変零点を持たない, すなわち, $(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2, B_1 D_{21}^\perp)$ の不可制御極は $j\omega$ 軸上にない。

また

$$\begin{aligned} &X(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1) + (A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)^T X \\ &+ X(B_1 B_1^T - B_2 E_{12}^{-1} B_2^T)X + (D_{12}^\perp C_1)^T D_{12}^\perp C_1 = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A12a)$$

ただし

$$E_{12} = D_{12}^T D_{12} \quad \dots\dots\dots (A12b)$$

および

$$A_X = A - B_2 D_{12}^\dagger C_1 + (B_1 B_1^T - B_2 E_{12}^{-1} B_2^T)X \quad \dots\dots\dots (A13)$$

とした場合, (A11) 式を満たす V に対して

$$XV = 0 \quad \dots\dots\dots (A14)$$

が成り立ち, かつ, A_X の A_p 以外の固有値が安定である場合, X を疑似安定化解と言う。すると以下の定理を得る。

< 定理 A1 > A1')-A4'), B1)-B3) を仮定する。

1. この時, 重みを除く物理系を内部安定にし, かつ, $\|G_{zw}\|_\infty < 1$ とする H_∞ 制御問題の可解条件は以下の I) ~ III) が成り立つことである。

I) (A12a) 式が疑似安定化解 $X \geq 0$ を持つ。

II)

$$\begin{aligned} &Y(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T + (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)Y \\ &+ Y(C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2)Y + B_1 D_{21}^\perp (B_1^\dagger D_{21}^\perp)^T = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (A15a)$$

ただし

$$E_{21} = D_{21}^T D_{21} \quad \dots\dots\dots (A15b)$$

が以下の A_Y を安定にする意味で安定化解 $Y \geq 0$ を持つ。

$$A_Y = A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 + Y(C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2) \dots \dots \dots (A16)$$

III)

$$\rho(XY) < 1 \dots \dots \dots (A17)$$

2. 可解条件が満たされると、すべての H_∞ 制御器 $K(s)$ は A_p を極として持ち、

$$K(s) = \text{LFT}(M(s), N(s)) \dots \dots \dots (A18a)$$

ただし

$$M(s) = \left(\begin{array}{c|cc} \bar{A} & -ZL_\infty & Z\bar{B}_2 E_{12}^{-1/2} \\ F_\infty & 0 & E_{12}^{-1/2} \\ -E_{21}^{-1/2} \bar{C}_2 & E_{21}^{-1/2} & 0 \end{array} \right) \dots \dots \dots (A18b)$$

および

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_1 B_1^T X + B_2 F_\infty + ZL_\infty \bar{C}_2 \\ \bar{B}_2 &= B_2 + Y C_1^T D_{12} \\ \bar{C}_2 &= C_2 + D_{21} B_1^T X \dots \dots \dots (A18c) \\ F_\infty &= -D_{12}^\dagger C_1 - E_{12}^{-1} B_2^T X \\ L_\infty &= -B_1 D_{21}^\dagger - Y C_2^T E_{21}^{-1} \\ Z &= (I - YX)^{-1} \end{aligned}$$

で与えられ、 $N(s) \in BH_\infty$ は自由パラメータとなる。

3. 自由パラメータ N を $N = 0$ と置いた解は中心解と言われ次式となる。

$$K(s) = -F_\infty(sI - \bar{A})^{-1} ZL_\infty \dots \dots \dots (A19)$$

付録 4 [疑似安定化解 (54) 式の証明]

X を (54) 式のようにおくと (41) 式を満たす $V = (0_{n_0 \times 1}, 1, 0_{n_a \times 1})^T$ に対して、 $XV = 0$ を満たし、また、(42) 式に X を代入すると X_0 は

$$X_0 A_0 + A_0^T X_0 - X_0 b b^T X_0 = 0 \dots \dots \dots (A20)$$

を満たす。このリカッチ方程式に対応したハミルトン行列は

$$H_{X_0} = \left(\begin{array}{ccc} A_0 & -bb^T & \\ 0 & -A_0^T & \end{array} \right) \dots \dots \dots (A21)$$

となり、 A_0 が $j\omega$ 固有値を持たない仮定と、 (A_0, b) 可制御の仮定から $H_{X_0} \in \text{Dom}(\text{Ric})$ となり⁽⁶⁾、(A20) 式は $A_{X_0} = A_0 - bb^T X_0$ を安定にする安定化解を持つ。また、(A20) 式は

$$X_0 A_{X_0} + A_{X_0}^T X_0 + X_0 b b^T X_0 = 0 \dots \dots \dots (A22)$$

を満たすので $X_0 \geq 0$ となる。この時

$$A_X = \left(\begin{array}{ccc} A_{X_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_a \end{array} \right) \dots \dots \dots (A23)$$

の固有値は $A_p = 0$ を除いて安定である。よって、(54) 式は $X \geq 0$ を満たす疑似安定化解である。

付録 5 [$A + ZL_\infty C_2$ の安定性の証明]

リカッチ方程式 (45) 式に対応するハミルトン行列は

$$H_Y = \left(\begin{array}{cc} (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T & C_1^T C_1 - C_2^T E_{21}^{-1} C_2 \\ -B_1 D_{21}^\dagger (B_1 D_{21}^\dagger)^T & -(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) \end{array} \right) \dots \dots \dots (A24)$$

となる。ここで、文献⁽⁶⁾の p.75 と逆の手順で H_Y に

$$\left(\begin{array}{cc} I & -X \\ 0 & I \end{array} \right) H_Y \left(\begin{array}{cc} I & X \\ 0 & I \end{array} \right) = H_W \dots \dots \dots (A25)$$

の相似変換を行なうと、(55) 式の $B_1^T X = 0$ に注意して

$$H_W = \left(\begin{array}{cc} (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T & F_\infty^T F_\infty - C_2^T E_{21}^{-1} C_2 \\ -B_1 D_{21}^\dagger (B_1 D_{21}^\dagger)^T & -(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) \end{array} \right) \dots \dots \dots (A26)$$

を得る。今、(45) 式が安定化解 $Y \geq 0$ を持っているので、 $H_Y \in \text{Dom}(\text{Ric})$ 、 $Y = \text{Ric}(H_Y) \geq 0$ となり、 H_Y の全安定固有値に対する固有基底は $(I, Y)^T$ となるが^s、 H_Y と H_W は相似だから、 H_W の同じ安定固有値に対する固有基底を $(W_1^T, W_2^T)^T$ とおくと、

$$\left(\begin{array}{c} W_1 \\ W_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} I & -X \\ 0 & I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I \\ Y \end{array} \right) \dots \dots \dots (A27)$$

が成り立つ。よって、 $W_1 = I - XY$ 、 $W_2 = Y$ を得るが^s、 $\rho(YX) < 1$ が成り立っていると仮定しているので、 $\det|W_1| \neq 0$ であり、よって $H_W \in \text{Dom}(\text{Ric})$ となり、しかも、 $W = \text{Ric}(H_W)$ は

$$\begin{aligned} W &= W_2 W_1^{-1} = Y(I - XY)^{-1} \\ &= Y^{1/2} (I - Y^{1/2} X Y^{1/2})^{-1} Y^{1/2} \geq 0 \dots \dots (A28) \end{aligned}$$

を満たし、かつ、(A26) 式に対応するリカッチ方程式

$$\begin{aligned} W(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T &+ (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)W \\ &+ W(F_\infty^T F_\infty - C_2^T E_{21}^{-1} C_2)W + B_1 D_{21}^\dagger (B_1 D_{21}^\dagger)^T = 0 \dots \dots \dots (A29) \end{aligned}$$

の安定化解となる。(A29) 式は

$$\begin{aligned} W(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 - W C_2^T E_{21}^{-1} C_2)^T & \\ &+ (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 - W C_2^T E_{21}^{-1} C_2)W \\ &+ W F_\infty^T F_\infty W + B_1 D_{21}^\dagger (B_1 D_{21}^\dagger)^T = 0 \dots \dots (A30) \end{aligned}$$

のリアプノフ方程式に変形でき、しかも、 $W \geq 0$ なので

$$A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 - W C_2^T E_{21}^{-1} C_2 \dots \dots \dots (A31)$$

は安定である。最後に

$$W = Y(I - XY)^{-1} = (I - YX)^{-1} Y = ZY \dots (A32)$$

であることと、 $Z = (I - YX)^{-1} = I + Y(I - XY)^{-1} X$ を使えば

$$Z B_1 = [I + Y(I - XY)^{-1} X] B_1 = B_1 \dots \dots \dots (A33)$$

を得るので

$$\begin{aligned} & A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 - W C_2^T E_{21}^{-1} C_2 \\ &= A + Z(-B_1 D_{21}^\dagger - Y C_2^T E_{21}^{-1}) C_2 \\ &= A + Z L_\infty C_2 \\ & \dots\dots\dots (A34) \end{aligned}$$

は安定である。

美多 勉 (正員) 昭和 50 年, 東京工業大学博士課程修了。千葉大学講師, 助教授を経て, 平成 2 年電気電子工学科教授。平成 7 年東京工業大学制御システム工学科教授。制御理論, ロボット工学, 電力工学などの研究・教育に従事(工学博士)。著書にロボット制御工学入門(コロナ社), デジタル制御理論, H ∞ 制御(昭見堂)など。平成元年, 6 年, 計測自動制御学会論文賞受賞。

平田 光男 (学生員) 昭和 44 年 1 月 17 日生。平成 5 年 3 月千葉大学大学院工学研究科(修士課程)修了, 同年千葉大学大学院自然科学研究科(博士課程)に入学, 現在に至る。ロバスト制御理論及びその応用に関する研究に従事。計測自動制御学会会員。

村田 健一 (正員) 昭和 42 年 11 月 17 日生。平成 3 年 3 月九州工業大学工学部卒業, 平成 3 年 4 月(株)安川電機に入社。平成 6 年 4 月千葉大学大学院工学研究科(修士課程)に入学, 現在に至る。ロバスト制御理論及びその応用に関する研究に従事。