部分正規化 LMS 法の提案

非会員 ジラサック タンパリヤチャヤー (名古屋工大)
 正 員 内 匠 逸 (名古屋工大)
 非会員 畑 雅 恭 (名古屋工大)

A New Partial-normalized Least Mean Square Algorithm

Jirasak Tanpreeyachaya, Non-member (Nagoya Institute of Technology), Ichi Takumi, Member
 (Nagoya Institute of Technology), Masayasu Hata, Non-member (Nagoya Institute of Technology)

In this paper, a new partial-normalized least mean square (partial-NLMS) algorithm for updating the coefficients of an adaptive FIR digital filter (ADF) is proposed. The new adaptive algorithm is modified to overcome the NLMS method's problem, about instability when very small input enters into the filter, and the LMS method's gradient noise amplification problem by using the preset value $p\sigma_x^2$ to decide which method is to be used. This value is determined beforehand by the knowledge of the statistical properties (probability density function and variance) of the input signal. In the new partial-NLMS (P-NLMS) algorithm, the measured input signal's square norm is compared with the preset value $p\sigma_x^2$. If the square norm is larger than $p\sigma_x^2$ the coefficients of the ADF are renewed by the NLMS algorithm. Renewal of the ADF's coefficients is done with the LMS algorithm when the square norm is smaller than $p\sigma_x^2$.

The simulation results and theoretical analyses show the effectiveness of the proposed P-NLMS, and a good agreement between both results. The saturated residual error of the P-NLMS ADF under the noisy circumstances is smaller than that of the ordinary NLMS ADF and also have good stability. Even in bad condition, corrupted input, the proposed method still shows good performance.

キーワード：学習同定法, 閾値制御, LMS 法, 適応ディジタルフィルタ

あらまし

既に著者らは、入力信号ベクトルの 2 乗ノルムが設定された閾値以下の場合に係数修正をしない条件付学習同定法を提案している。しかしながら、この方法においては、閾値を設定することは若干の入力信号を無視し捨ててしまうことを意味し、閾値を $0.5N\sigma_x^2$ (N : フィルタ係数の数) より大きく設定すると、従来の学習同定法 (NLMS 法) より収束速度が急激に劣化することが明らかとなった。本論文では、入力信号が小さい場合には、この信号を無視せずに、その 2 乗ノルムの大きさに応じた重みづけ (ランプ関数による) をし、係数修正に寄与させる改善方式を提案する。このランプ関数による緩和係数制御は最急降下法に基づく LMS 法と一致しているため、この方法を部分正規化 LMS 法と呼ぶ。提案する方式により推定誤差を従来の学習同定法および条件付学習同定法より小さくし安定性を向上させることができることを明らかにした。

従来の学習同定法および条件付学習同定法と本方式の特性の比較から、本提案方式が最良の性能を有することを明らかにした。また、従来の両方法 (LMS 法と NLMS 法) の長所を組み合わせた複合方式として、本方式は一般の応用に適する。

1 はじめに

適応信号処理はディジタル信号処理技術の中で重要なものの一つであり、ノイズキャンセラー、エコーキャンセラー、ラインエンハンサーなどに応用される。特に最急降下法に基づく LMS (Least Mean Square) アルゴリズム^{(1),(2)}は、係数更新のための演算量が少ないこと、機構の単純さ、装置化の容易さから実時間処理にもっとも利用されているアルゴリズムの一つである。しかし、LMS アルゴリズムを用いたシステムの収束速度・適応誤差はステップサイズと呼ばれる定数と入力信号の相関行列の固有値の積により決定される。ステップサイズを入力信号により正規化し、入力信号に応じて変化させることにより収束速度の向上を図る方法として、学習同定法 (NLMS: Normalized LMS) が提案されている⁽³⁾。学習同定法は実システムに適したアルゴリズムとして実用化検討も含め広く研究されている^{(3),(8),(11),(13)~(16)}。

我々は既に、閾値以下の小入力信号に対して係数修正を行わないことによって学習同定法の安定性と収束後の同定残差を改善する条件付学習同定法 (C-NLMS: Conditioned-NLMS) を提案・解析し、最適閾値を導出している⁽⁶⁾。これは、小入力信号に対しては係数修正を行わない方法である。一般に、同定における推定誤差 e_j の電力は入力信号の

電力と相関をもつ。また、学習同定法の特性として、SN 比（雑音電力 n_j に対しての未知系出力 d_j の電力比）が大きい時は残差は小さくなる。そこで、既に提案した条件付学習同定法では、入力信号の 2 乗ノルム（SN 比が大きい場合）が予め設定された閾値 $p\sigma_x^2$ よりも大きい時のみ、ADF の係数を修正することによって同定残差を減少させた。しかしながら、SN 比の小さい時の入力信号を無視するため収束速度は悪化することや閾値 $p\sigma_x^2$ の設定値が大き過ぎると、ADF の係数更新がほとんど行なわれないことなどが明らかになっている。

本論文では、小さい入力信号を無視せずに、入力信号の 2 乗ノルムの大きさに応じた重みづけをし、係数修正に寄与させる改善方式を提案する。具体的には、入力信号の 2 乗ノルムが事前に設定された閾値 $p\sigma_x^2$ より大きい場合には、ADF の係数の変更は予め設定された最大緩和係数（ $\alpha = \alpha_R$ ）を用いて行い、 $p\sigma_x^2$ よりも小さい場合は ADF の係数はランプ関数によって与えられる緩和係数を用いて更新する。この方法により、収束時間を従来の学習同定法より短縮させることが可能となる。

本方法は N の小さい場合に優れており、ADF のタップの数いわゆる自由度 N の大きい場合には長所があまり目立たないが、既に提案されている係数の個数を可変にしたデジタルエコーキャンセラ⁽⁹⁾に適用すれば、同定開始後の早い段階では、係数の数が少ないため本提案方式が有効になる。さらに、既に提案されている可変ステップサイズアルゴリズム^{(10),(13)}と一緒に併用すれば、より良い性能が得られる。特に、2 次の IIR フィルタを並列に接続した構成の ADF⁽²⁰⁾の零点制御に適用した場合、本アルゴリズムによって制御される係数の数が 2 個と少ないため、やはり有効である。

また、入力ノルム $\|\mathbf{x}_j\|^2$ の値が非常に小さくなると ADF 係数の修正において、 $\|\mathbf{x}_j\|^2$ による割算が発散し、ADF の動作不安定になる現象が発生する^{(15),(17)}。これに対して、本方式は、前述したフィルタ係数の発散を防ぐばかりでなく、収束後の同定残差量の改善も可能である。

本論文では、平均零の白色信号の場合について、提案する部分的正規化による新しい学習同定法の解析を行い、本方式の特性を明らかにするとともに解析結果がシミュレーション結果と一致することを示す。

2 部分正規化 LMS 法

NLMS アルゴリズムが適用される系のモデルを図 1 に示す。未知系は適応の対象のシステムをモデル化した FIR 形フィルタである。フィルタ係数はフィルタ出力 y_j と希望出力信号 d_j との誤差に基づいて、その誤差の 2 乗平均を最小にするように逐次修正される。

NLMS アルゴリズムによる ADF 係数の修正方程式は次のように定義される^{(3),(4)}。

図 1 学習同定を用いたシステム
Fig. 1. Real NLMS adaptive filter structure.

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j + \frac{\alpha^*(e_j + n_j)\mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_j\|^2} \dots\dots\dots (1)$$

α^* は ADF の緩和係数 $0 < \alpha^* \leq 1$ ⁽¹⁶⁾、 $\mathbf{v}_j$ は時刻 j におけるフィルタの係数ベクトル、 d_j は希望出力信号、 e_j は推定誤差、 $\mathbf{x}_j$ は時刻 j に観測される入力信号ベクトル ($x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-N+1}$)^T、 n_j は ADF の出力側の加法的な雑音、 N は ADF の自由度（係数の数）である。

一般に推定誤差 e_j の大きさは入力信号の大きさとの間に相関をもつ。この相互相関は以下のように求められる。入力信号レベルは、その 2 乗ノルムとして測定するものとすれば、時刻 j における入力信号の 2 乗ノルムと e_j^2 との相互相関 R_j は、相互相関の定義より、次式となる。

$$R_j = \frac{E[\|\mathbf{x}_j\|^2 \cdot e_j^2]}{\sqrt{E[\|\mathbf{x}_j\|^4] \cdot E[e_j^4]}} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $E[\]$ は不確定な入力信号 x_j に関する期待値を表す。入力信号 x_j が平均零の白色信号と仮定すると、式 (2) は、さらに簡単な次式となる（付録参照）。

$$R_j = \frac{N+2}{\sqrt{3N(N+2)}} \dots\dots\dots (3)$$

上式より、ADF の係数の数 N が小さい場合には相互相関 R_j が大きくなることが明らかになった。 R_j は $N = 1$ のとき最大値 1 をとり、自由度 N が大きくなるに従って減少し 0.58 に漸近する。 R_j の理論値と測定値（異なる白色入力信号系列 x_j に関するアンサンブル平均）を図 2 に示す。 $\|\mathbf{x}_j\|^2$ と e_j^2 が相関を持つことから、入力信号の大きさにほぼ比例して誤差も大きくなる。また、推定誤差の減少は推定誤差信号に重畳する雑音電力によって制限されるため、SN 比（雑音電力に対する未知系出力信号電力の比率）が大きい時は残差は小さくなる。これらの事実から、入力信号の 2 乗ノルムが予め設定された閾値 $p\sigma_x^2$ よりも大きいときに、ADF の係数を最大緩和係数 α_R で修正し、閾値 $p\sigma_x^2$ より小さいときはランプ関数によって与えられる緩和係数

図 2 相互相関 R_j
Fig. 2. The correlation R_j .

図 3 従来の学習同定法とのステップサイズの比較
Fig. 3. Comparison of the stepsizes.

を用いて更新する新しい方法によって残差の 2 乗平均を減らすことが可能となる。

本文で提案するランプ関数による緩和係数制御学習同定法アルゴリズムの係数修正方程式の新たな緩和係数は式 (4) で与えられる。

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha_R & ; \text{if } \|\mathbf{x}_j\|^2 \geq p\sigma_x^2 \\ \frac{\alpha_R \|\mathbf{x}_j\|^2}{p\sigma_x^2} & ; \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots\dots (4)$$

ここで p は修正決定閾値 (定数) である。上式は入力信号の 2 乗ノルムが $p\sigma_x^2$ よりも小さい場合、すなわち未知系出力における SN 比 ($\overline{d_j^2}/\overline{n_j^2}$) が小さい場合にはフィルタの係数を従来の最急降下法 (LMS 法) を用いて修正することを意味する。 σ_x^2 は入力信号の分散で既知とする。たとえ予め知り得なくとも、ADF への入力側に AGC (自動利得制御) を設けることにより、ADF の入力信号の分散を設定できる。

従来の学習同定法、既に提案した条件付学習同定法、本文で提案する方式のそれぞれの緩和係数 $\alpha_N, \alpha_C, \alpha_R$ の関係を図 3 に示す。

3 収束の振舞いの解析

ここでは、入力系列 $\mathbf{x}_j$ は白色信号 (white Gaussian) であり、ADF の係数ベクトル $\mathbf{v}_j$ と ADF の入力信号ベクトル $\mathbf{x}_j$ と加法的な雑音 n_j はそれぞれ互いに統計的に独立していると仮定して、定常状態での同定残差と収束速度の理論解析を行う。

<3.1> 定常状態の残差の解析

システム同定における適応デジタルフィルタ (ADF) の評価値としてエコー打ち消し量 (ERLE; echo return loss enhancement) が広く用いられている。時刻 j における ERLE は次式で定義される。

$$\begin{aligned} ERLE_j &= 10 \log_{10} \left\{ E[d_j^2] / E[e_j^2] \right\} \\ &= 10 \log_{10} \left\{ E[d_j^2] / E[\|\mathbf{v}_j - \mathbf{w}\|^2 x_j^2] \right\} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

ここで $E[\]$ は期待値、 $\|\ \|$ はノルム、 $\mathbf{w}$ は未知系をモデル化した場合の係数である。また j は時刻を表す。入力信号の白色性の仮定より $ERLE_j$ は次式となる。

$$ERLE_j = 10 \log_{10} \left\{ E[d_j^2] / E[\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 \sigma_x^2] \right\} \quad \dots\dots (6)$$

ただし、

$$\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 = \|\mathbf{v}_j - \mathbf{w}\|^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

式 (1) の両辺から $\mathbf{w}$ を引き、そして 2 乗ノルムを計算することによって、係数誤差の期待値 ($\|\Delta \mathbf{v}_{j+1}\|^2$) を次式で得る。

$$\begin{aligned} \overline{\|\Delta \mathbf{v}_{j+1}\|^2} &= \overline{\|\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{w}\|^2} \\ &= \overline{\|(I - \alpha^* \frac{\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T}{\|\mathbf{x}_j\|^2})(\mathbf{v}_j - \mathbf{w})\|^2} + \frac{\alpha^{*2} \overline{n_j^2}}{\|\mathbf{x}_j\|^2} \\ &\quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

I は $N \times N$ 単位行列、 $\overline{}$ は期待値を意味する。さらに、入力信号 x_j の白色性の仮定のもとで、上式は次のように書き直せる⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} \overline{\|\Delta \mathbf{v}_{j+1}\|^2} &= \overline{1 - 2\alpha^* X_j + \alpha^{*2} X_j} \times \overline{\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2} \\ &\quad + \frac{\alpha^{*2}}{\|\mathbf{x}_j\|^2} \times \overline{n_j^2} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここで、

$$X_j = \frac{x_j^2}{\|\mathbf{x}_j\|^2}$$

である。

(i) $N > 2$ の場合

さらに、式 (9) 中の主要な期待値に関して式 (4) を代入し、 $\|\mathbf{x}_j\|^2$ が $p\sigma_x^2$ より大きい部分と小さい部分に分けて積分することにより次式を得る (参考文献⁽⁷⁾参照)。

$$E[\alpha^* X_j] = \frac{\alpha_R C}{p} + \frac{\alpha_R A}{N} \dots\dots\dots (10)$$

$$E[\alpha^{*2} X_j] = \frac{\alpha_R^2 (N+2) D}{p^2} + \frac{\alpha_R^2 A}{N} \dots\dots\dots (11)$$

$$E \left[\frac{\alpha^{*2}}{\|\mathbf{x}_j\|^2} \right] = \frac{\alpha_R^2 N C}{p^2 \sigma_x^2} + \frac{\alpha_R^2 B}{\sigma_x^2 (N-2)} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $A = \mathcal{P}(p, N)$, $B = \mathcal{P}(p, N-2)$, $C = 1 - \mathcal{P}(p, N+2)$, $D = 1 - \mathcal{P}(p, N+4)$, $p \geq 0$ である。ここで、 $\mathcal{P}(p, N)$ は χ_N^2 の確率関数で χ_N^2 (Chi-square) の確率分布関数の積分として次式で与えられる^{(18), (19)}。

$$\mathcal{P}(p, N) = \int_{p\sigma_x^2}^{\infty} \frac{(\chi_N^2)^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{\chi_N^2}{2}}}{\sigma_x^N 2^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2})} d(\chi_N^2) \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$\Gamma(\frac{N}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{N}{2}-1} dt \dots\dots\dots (14)$$

である。

l を定常状態 (収束後) における平均 2 乗係数誤差 ($\|\Delta \mathbf{v}_{j+1}\|^2$) とする。すなわち、

$$l \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 \dots\dots\dots (15)$$

とする。式 (10), (11), (12) を式 (9) に代入し、式 (15) を用いると l は次式で得られる。

$$\begin{aligned} l &= \left[\frac{\alpha_R N n_j^2}{\sigma_x^2 (N-2)} \right] \\ &\times \left[\frac{N(N-2)C + p^2 B}{(2 - \alpha_R)p^2 A + 2pNC - \alpha_R N(N+2)D} \right] \\ &= \left[\frac{\alpha_R N n_j^2}{d_j^2 (N-2)} \right] \|\mathbf{w}\|^2 \\ &\times \left[\frac{N(N-2)C + p^2 B}{(2 - \alpha_R)p^2 A + 2pNC - \alpha_R N(N+2)D} \right] \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

式 (5) の ERLE の定義式から収束後の ERLE は

$$\begin{aligned} ERLE_{[dB]} &= 10 \log_{10} \left[\frac{d_j^2}{e_j^2} \right] = 10 \log_{10} \left[\frac{d_j^2}{l \sigma_x^2} \right] \\ &= 10 \log_{10} \left[\frac{d_j^2}{n_j^2} \right] \\ &+ 10 \log_{10} \left[\frac{N-2}{\alpha_R N} \right] \\ &\times \left[\frac{(2 - \alpha_R)p^2 A + 2pNC - \alpha_R N(N+2)D}{N(N-2)C + p^2 B} \right] \\ &\dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

となる。式 (17) の第 1 項は、未知系の出力側の SN 比である。第二項は閾値 p と自由度 N の関数であり、定常状態の ERLE と未知系の出力の SN 比との差である。

(ii) $N = 2$ の場合

$N = 2$ の場合には、 $p > 0$ の条件のもとで式 (10), (11), (12) と同様にして各期待値は次式となる。

$$E[\alpha^* X_j] = \frac{\alpha_R C_2}{p} + \frac{\alpha_R A_2}{2} \dots\dots\dots (18)$$

$$E[\alpha^{*2} X_j] = \frac{2\alpha_R^2 D_2}{p^2} + \frac{\alpha_R^2 A_2}{2} \dots\dots\dots (19)$$

$$E \left[\frac{\alpha^{*2}}{\|\mathbf{x}_j\|^2} \right] = \frac{2\alpha_R^2 C_2}{p^2 \sigma_x^2} + \frac{\alpha_R^2 B_2}{\sigma_x^2 2} \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $A_2 = \mathcal{Q}(1, p/2)$, $B_2 = \mathcal{Q}(0, p/2)$, $C_2 = 1 - \mathcal{Q}(2, p/2)$, $D_2 = 1 - \mathcal{Q}(3, p/2)$ である。ここで、 $\mathcal{Q}(N, p)$ は不完全ガンマ関数であり次式で与えられる。

$$\mathcal{Q}(N, p) = \int_p^{\infty} e^{-t} t^{N-1} dt \dots\dots\dots (21)$$

また、式 (18), (19), (20) を式 (9) に代入し、式 (15) を用いると l は次式で得られる。

$$\begin{aligned} l &= \left[\frac{\alpha_R n_j^2}{\sigma_x^2} \right] \\ &\times \left[\frac{2C_2 + 0.5p^2 B_2}{(1 - 0.5\alpha_R)p^2 A_2 + 2pC_2 - 2\alpha_R D_2} \right] \\ &= \left[\frac{\alpha_R n_j^2}{d_j^2} \right] \|\mathbf{w}\|^2 \\ &\times \left[\frac{2C_2 + 0.5p^2 B_2}{(1 - 0.5\alpha_R)p^2 A_2 + 2pC_2 - 2\alpha_R D_2} \right] \\ &\dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ERLE も $N > 2$ の場合と同様の手順で求まる。

<3.2> 部分的正規化 LMS 法による収束速度

<3.1> では、提案された部分的正規化 LMS 法における定常誤差を誤差修正係数 α と自由度 N と閾値 p の関数として求めた。未知のパラメータ $\mathbf{w}$ が定常的であれば、フィルタ係数ベクトル $\mathbf{v}_j$ の誤差の期待値 $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2$ は、定常誤差 (式 (16)) l に漸近し、アンサンブル平均として定常誤差 l を保ち続ける。したがって $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2$ がこの定常誤差の近くに達するまでに必要なステップ数 (過渡状態期間の長さ) は、本文の方式による同定の収束速度の評価を与える。

(i) $N > 2$ の場合

過渡状態期間においては ADF の係数が収束途中にあり、同定誤差に混入するノイズの割合が小さいことから式 (9) の第 2 項を無視することができ、式 (9) の漸化式を解くと、

$$\begin{aligned} \frac{\|\Delta \mathbf{v}_{j+1}\|^2}{\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2} &= \left(1 - \frac{\alpha_R (2 - \alpha_R) A}{N} - \frac{2\alpha_R C}{p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_R^2 (N+2) D}{p^2} \right)^j \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

を得る。上式は、 $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2$ が減衰する状況を示しており上式の値を β_j とおくと、

$$\begin{aligned}\beta_{j+1} &= \frac{\|\Delta \mathbf{v}_{j+1}\|^2}{\|\Delta \mathbf{v}_1\|^2} \\ &= \left(1 - \frac{\alpha_R(2 - \alpha_R)A}{N} - \frac{2\alpha_R C}{p}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{\alpha_R^2(N+2)D}{p^2}\right)^j \dots\dots\dots (24)\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\beta_{j+1} < \epsilon \dots\dots\dots (25)$$

を満たす最初の j を T_ϵ とする。 T_ϵ は ϵ -過渡状態期間の長さと呼ばれる。式 (24) から T_ϵ は十分大きな N (たとえば $N > 10$) または十分小さな α_R ($\alpha_R \ll 1$) に対し近似的に、

$$\begin{aligned}T_\epsilon &= \\ &\frac{-Np^2 \ln \epsilon}{\alpha_R(2 - \alpha_R)Ap^2 + 2\alpha_R pNC - \alpha_R^2 N(N+2)D} \dots\dots\dots (26)\end{aligned}$$

となる。

(ii) $N = 2$ の場合

$N = 2$ のとき T_ϵ は、同様に

$$T_\epsilon = \frac{-p^2 \ln \epsilon}{\alpha_R(1 - 0.5\alpha_R)p^2 A_2 + 2\alpha_R pC_2 - 2\alpha_R^2 D_2} \dots\dots\dots (27)$$

となる。

<3.3> 解析結果の検証

以上の解析結果の妥当性を確認するために、 $N = 4$ 、SN 比 = 30dB の場合の従来の学習同定法のシミュレーション結果 ($\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 / \|\mathbf{w}\|^2$) を図 4 に示す。なお、入力信号には白色信号を用いており、 $\mathbf{v}_1 = 0$ すなわち $\Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}$ としている。 $p/N = 0$ の結果が従来の学習同定法によるものである。図 4 の収束途中のグラフから T_ϵ の実測値 $T_\epsilon(\text{sim.})$ を求め、収束値から l の実測値 $l(\text{sim.})$ を求めて表 1 に記してある。同時に A, B, C, D の値及び式 (16) から得られる l の理論値 $l(\text{the.})$ と式 (26) から得られる T_ϵ の理論値 $T_\epsilon(\text{the.})$ を比較のために示す。表 1 より T_ϵ の実測値と理論値がほぼ一致し、 l の実測値と理論値がほぼ一致することから、式 (16) 及び式 (26) の妥当性が確認される。

収束速度を示す式 (26) は式 (9) の第 1 項から導出されており、また収束後の推定誤差を示す式 (16) は、式 (9) の第 2 項を主要素として導出されている。実測値と理論値の一致は式 (9) の妥当性も示しているといえる。なお $N = 2$ の場合については、後述の応用例で考察する。

図 4 係数推定誤差 $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 / \|\mathbf{w}\|^2$ ($N = 4$)
Fig. 4. Estimation error $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 / \|\mathbf{w}\|^2$ when $N = 4$.

4 従来の学習同定法との比較

提案する方式と従来の学習同定法において同一の定常 ERLE の比較を行い、さらに同一の定常 ERLE となるように設計した場合の収束速度の比較を行う。なお、 $N \leq 2$ の場合には学習同定法における収束後の ERLE が安定しないことが知られており⁽⁵⁾、定常 ERLE が求まらないためこの比較では取り扱わない。

提案するランプ関数による緩和制御学習同定法による定常の ERLE を従来の学習同定法のと比較した改善量 (ADV : advantage) は式 (17) より次式となる。

$$\begin{aligned}ADV &= ERLE|_{p=p} / ERLE|_{p=0} \\ &= \left[\frac{\alpha_N}{(2 - \alpha_N)\alpha_R} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{(2 - \alpha_R)p^2 A + 2pNC - \alpha_R N(N+2)D}{N(N-2)C + p^2 B} \right] \dots\dots\dots (28)\end{aligned}$$

提案する新しいアルゴリズムによる定常 ERLE の改善量は自由度 N (係数の数) と設定された閾値 p のみで与えられることがわかる。従来の学習同定法は、提案する方法における閾値 p がゼロの場合に相当する。また、本方式の α_R は任意の値であるが、簡単のため 1 とし、解析を進める。 $\alpha_R = 1$ とすると式 (28) より次式を得る。

$$\begin{aligned}ADV_{all} &= \frac{ADV(\text{proposed})}{ADV(NLMS)} \\ &= \frac{\alpha_N}{(2 - \alpha_N)} \frac{2pNC + p^2 A - N(N+2)D}{N(N-2)C + p^2 B} \dots\dots\dots (29)\end{aligned}$$

式 (26) の T_ϵ を従来の学習同定法 ($p = 0$, $\alpha^* = \alpha_N$) の T_ϵ と比較し、収束時間の増加率として評価する。

$$\begin{aligned}T_{all} &= \frac{T_\epsilon(\text{proposed})}{T_\epsilon(NLMS)} \\ &= \frac{p^2 \alpha_N (2 - \alpha_N)}{2pNC + p^2 A - N(N+2)D} \dots\dots\dots (30)\end{aligned}$$

表 1 シミュレーション結果の比較 ($N = 4, \epsilon = 0.001$)
Table.1 Comparison of simulation result when $N = 4$ and $\epsilon = 0.001$

condition	$T_\epsilon(\text{the.})$	$T_\epsilon(\text{sim.})$	$l(\text{the.})$	$l(\text{sim.})$	A	B	C	D
$\alpha_R = 0.1, p/N = 0$	145	146	$1.05 \times 10^{-4} \ \mathbf{w}\ ^2$	$1.0 \times 10^{-4} \ \mathbf{w}\ ^2$	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
$\alpha_R = 0.1, p/N = 1$	198	199	$4.93 \times 10^{-5} \ \mathbf{w}\ ^2$	$4.9 \times 10^{-5} \ \mathbf{w}\ ^2$	0.4060	0.1353	0.3233	0.1429
$\alpha_R = 1, p/N = 10$	149	153	$5.41 \times 10^{-5} \ \mathbf{w}\ ^2$	$5.5 \times 10^{-5} \ \mathbf{w}\ ^2$	0.0000	0.0000	1.0000	1.0000

図 5 収束時間の比
Fig. 5. Convergence time ratio $T_{\epsilon, p>0}/T_{\epsilon, p=0}$.

ここで、同一の ERLE を達成する場合の T_{all} を求めるため $ADV_{all} = 1$ とし、式 (30) の α_N に代入すると次式を得る。

$$T_{all}|_{ADV_{all}=1} = \frac{4p^2[N(N-2)C + p^2B]}{[(A+B)p^2 + 2pNC - N(N+2)D + N(N-2)C]^2} \quad (31)$$

ここで、 χ_N^2 の関数の積分 A, B, C, D を計算機による数値積分で求め、計算された T_{all} の結果を図 5 に示す。各自由度 N に対する T_{all} は p/N の増加に従って減少し、 $(N-2)/N$ に漸近する。 $p/N > 10$ ($ADV = 12dB$ に対応) の閾値 p を用いる場合に、ERLE の収束速度の改善が顕著となり、従来の学習同定法による収束時間の $(N-2)/N$ で収束する。しかし N が大きくなると収束速度があまり速くならず、収束速度改善の有効性が低下する。

前述の解析結果を確認するために $N = 3, \alpha_R = 1, p = 60, SN \text{ 比} = 30dB$ の場合のシミュレーション結果を図 6 に示す。上記の解析結果を用いると、提案方式と同一の同定残差に収束する学習同定法の緩和係数 $\alpha_N = 0.01724$ となる。またその時の ERLE の収束値は式 (17) より $45dB$ となる。図 6 のシミュレーション結果より両方式の収束時間の比 T_{new}/T_{nlms} は 0.37 が得られた。これは式 (30) から得る収束時間の比率 $T_{all} = 0.357$ とほぼ一致する。

また、参考までに同一の同定残差 $45dB$ に収束する条件付学習同定法の緩和係数 $\alpha_C = 0.05527$ 、最適閾値 $p(C -$

図 6 新方式によるシミュレーション結果 ($N = 3$)
Fig. 6. Simulation result when $N = 3$.

$NLMS$) $= 1.6027$ の場合のシミュレーション結果も図 6 に合わせて示してある。そして収束時間の比率 $T_{all-C-NLMS} = 0.474$ となる⁽⁶⁾。

本方式の収束速度が従来の学習同定法及び条件付学習同定法のより速いことが確認された。

5 IIR 形 ALE への応用例

ここまでは白色信号の場合の理論解析及びシミュレーション結果を示した。しかしながら、実際の応用面においては、入力信号は必ず白色性を持つとは限らない。よって、提案する方式の実用性の検証には、有色信号に対する特性を確認する必要がある。

適応デジタルフィルタの 1 つの応用例として、広帯域信号中に埋もれた狭帯域信号を抽出する手段として適応ラインエンハンサー (ALE: adaptive line enhancer) が提案されている^{(1), (21)}。また ALE によって抽出された信号を原信号から減算することにより、狭帯域信号を除去できる。中西らにより、2 次 IIR 形 ADF により 1 つの狭帯域信号を予測し、これらを並列的に接続することによって複数の狭帯域信号を予測する ALE が提案されている⁽²⁰⁾。この方法では、ALE を構成する ADF の零点を与える係数の収束値から ADF の共振周波数と除去対象信号の周波数の誤差を検出し、極の修正を行っており、零点制御の安定性が重要となる。この零点制御に対し、本文で提案する方式を応

図 7 ADF を構成する 1 個の 2 次フィルタと狭帯域信号 s_i を生成する AR モデル

Fig. 7. One of second order IIR filters of ADF and AR model for narrow band input signal s_i are shown.

用して得た結果と従来の学習同定法を用いた結果と比較し、提案する方式が良好な性能を持つことを示す。

まず提案されている IIR 形 ADF の構成を図 7 に示し説明する。入力信号 x としては、広帯域信号 s_0 に狭帯域信号 s_i が混入したものを仮定する。ADF の入力信号 x に含まれる狭帯域信号を 2 次フィルタ A_i によって予測し、除去する。2 次フィルタ A_i は x のスペクトルのピークに対応して、ピークの周波数と同じ共振周波数を持つよう制御される。

w_i は平均零の白色信号である。また広帯域信号 s_0 はここでは白色信号とする。零点制御では、消去残差 e の電力を最小にするよう c_i, d_i を逐次修正制御する。係数 c_i, d_i への入力信号が狭帯域信号であるため、有色性が強い。この様に、入力信号が強い有色性を有する条件において、従来の学習同定法と本提案方式の比較を行なう。

広帯域信号 s_0 は ADF の制御に関して雑音として働く。 $[s_i^2]/[s_0^2] = 0[\text{dB}]$ の雑音環境下で ADF の零点制御を行った場合のシミュレーション結果を図 8 に示す。狭帯域信号を生成する AR モデルの極は $\Theta_0 = 45^\circ$, $R_0 = 0.999$ に設定されている。また、ADF の極は $\theta_i = 45^\circ$, $r_i = 0.965$ としている。零点を決定する係数 c_i, d_i のそれぞれの最適値 $c_{i-\text{opt}}, d_{i-\text{opt}}$ は簡単に求めることができる⁽²⁰⁾。この場合の $c_{i-\text{opt}}, d_{i-\text{opt}}$ は 0.0711 と -0.0494 である。この c_i, d_i の逐次制御に本提案方式を用いるものとする。従って、先の解析におけるベクトル $\mathbf{v}_j, \mathbf{w}$ はそれぞれ具体的に $\mathbf{v}_j = (c_i(j), d_i(j))$, $\mathbf{w} = (c_{i-\text{opt}}, d_{i-\text{opt}})$ で与えられる。また、 $N = 2$ である。さらに、 n_j は $S_0(j)$, x_j は $x_i(j)$ に相当する。この例の場合 $\overline{n_j^2}/\sigma_x^2$ は 2.3461×10^{-3} となる。

図 8 にシミュレーションにおける係数誤差の収束の様子を示す。 $p/N = 0, 0.1, 1, 10, 100$ の場合の係数誤差 $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 / \|\mathbf{w}\|^2$ の 1000 回の試行の平均値を示している。本提案方式のすべての緩和係数 α_R と閾値 p は前述した解析結果 (式 (22)) と $\overline{n_j^2}/\sigma_x^2 = 2.3461 \times 10^{-3}$ を使い、同一の係数誤差 $l(\text{the.}) = 2.2871 \times 10^{-3} \|\mathbf{w}\|^2$ を与えるような α_R , p の組み合わせに設定した。具体的には $(p/N, \alpha_R) = (0.1, 0.0039), (1.0, 0.01), (10, 0.072), (100, 0.72)$ である。なお、各組合せに対して式 (27) で得られる T_e は表 2 の

図 8 収束特性の比較 $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 / \|\mathbf{w}\|^2$ ($N = 2$)

Fig. 8. Comparison of convergence properties $\|\Delta \mathbf{v}_j\|^2 / \|\mathbf{w}\|^2$ when $N = 2$.

$T_e(\text{the.})$ の列に示す。

また、この例では $N = 2$ であるため、従来の学習同定法に当たる $p/N = 0$ の収束後の係数誤差 l が理論的に得られないので、収束速度が同程度となる緩和係数 $\alpha_R (= \alpha_N)$ の値を 0.01 に設定した。

図 8 では本方式による係数誤差の収束値は表 2 の $l(\text{sim.})$ の列に示すとおりとなった。これは入力信号として白色信号を仮定して得た式 (22) をもとに計算される係数誤差 $l(\text{the.}) = 2.2871 \times 10^{-3} \|\mathbf{w}\|^2$ とほぼ一致している。また、図 8 より本方式を用いた場合のシミュレーションの $T_e(\text{sim.})$ は表 2 に示すとおり式 (27) で与えられる理論値 $T_e(\text{the.})$ よりかなり長い。一般的に有色入力信号の場合、白色入力信号の場合より収束速度が遅いが、本方式でも 1.5 ~ 2 倍程度遅くなる特性を示している。

また、図 8 では、 p/N が大きい程収束速度が速いが、 $p/N \geq 10$ ではほぼ同じ収束速度となっている。これは 4 の図 5 で示される p/N に対する収束速度と同じ傾向を示している。

前述のように、学習同定法の特性として、自由度 $N \leq 2$ であるときや入力信号が非常に小さくなった場合には収束後の同定残差が不安定になることが知られている^{(5), (15)}。この不安定性は学習同定法の誤差ベクトルの 2 乗の期待値式 (9) の右辺の第二項目の分母 $\|\mathbf{w}_j\|^2$ が小さい入力信号に対し非常に敏感であり、雑音によって修正量が急変してしまうことに起因する。図 8 においても学習同定法 (NLMS) によるグラフは安定しておらず、特に繰り返し回数 4000 回付近で、推定誤差が極端に悪化している様子がうかがえる。しかし本方式では、小さい入力信号に対し、緩和係数を減少させ修正量を抑制することにより修正量の急変を防止することができる。特に、自由度 $N \leq 2$ の場合の学習同定法では、式 (12) が ∞ となるが、本方式を用いると有限となる。したがって、 $N \leq 2$ の場合であっても、本方式においては同定残差の収束値を求めることができ、安定である。これは図 8 における NLMS 法と本方式の収束後の安定性

表 2 シミュレーション結果の比較 ($N = 2$, $\epsilon = 0.01$)
Table.2 Comparison of simulation result when $N = 2$ and $\epsilon = 0.01$

condition	$T_c(\text{the.})$	$T_c(\text{sim.})$	$l(\text{the.})$	$l(\text{sim.})$
$p/N = 0, \alpha_R = 0.01$	462	1750	—	unstable
$p/N = 0.1, \alpha_R = 0.0039$	1191	2200	$2.287 \times 10^{-3} \ \mathbf{w}\ ^2$	$2.223 \times 10^{-3} \ \mathbf{w}\ ^2$
$p/N = 1.0, \alpha_R = 0.01$	517	1100		$1.662 \times 10^{-3} \ \mathbf{w}\ ^2$
$p/N = 10, \alpha_R = 0.072$	325	520		$1.474 \times 10^{-3} \ \mathbf{w}\ ^2$
$p/N = 100, \alpha_R = 0.72$	325	480		$1.474 \times 10^{-3} \ \mathbf{w}\ ^2$

の比較によっても確認できる。いっぽう、LMS 法ではこのような小入力信号に対する不安定性の問題はないが、逆に大きい入力信号に対し係数修正量が発散する問題が指摘されている^{(13),(17)}。両方法の長所をうまく組み合わせることにより、提案する部分正規化 LMS 法となる。

6 まとめ

本文では、従来の学習同定法および著者らが既に提案した条件付学習同定法⁽⁶⁾より定常残差を小さくできる部分正規化 LMS 法を提案した。また理論解析を行い、提案した方法は、閾値 p を $p/N > 10$ に設定する場合に、収束時間が従来の $(N-2)/N$ に改善されることを明らかにした。特に N の小さい場合 ($N < 16$) には収束速度を速める効果が大いことが見出された。

なお、従来の学習同定法の場合には、自由度 $N \leq 2$ の時や小さい入力信号などに対し、係数修正方程式の分母 $\|\mathbf{x}_j\|^2$ が非常に小さくなり、収束が不安定になることは一般に知られている。本方法のランプ関数による緩和係数制御アルゴリズムによって小さい入力信号の場合の緩和係数を減少させ係数修正量の急変を抑制し、収束の安定性が保証される。さらに、狭帯域信号除去 IIR 形 ADF における零点制御にも応用し、従来の学習同定法にとって厳しい条件である有色性の強い入力信号および自由度 $N = 2$ でのシミュレーション結果から、提案方式の方が良い収束性と安定性を持つことを確認した。

(平成 7 年 4 月 27 日受付, 同 7 年 8 月 14 日再受付)

文 献

- (1) B.Widrow et al. : "Adaptive Noise Cancelling: Principles and Applications", *Proc. IEEE*, **63**, 12, 1692 ~ 1716 (1975-12)
- (2) B.Widrow · S.D.Stearns : "Adaptive Signal Processing", *Prentice-Hall, Chiffs* (1985).
- (3) J.Nakumo · A.Noda : "A learning Method for System Identification", *IEEE trans. Automatic Control*, **AC-12**, 3, 282 ~ 287 (1967-3).

- (4) 野田 淳彦 : "学習同定法における雑音およびパラメータ変動の影響", 計測と制御, **8**, 5, 303 ~ 312 (1969-5).
- (5) N. J. Bershad : "Analysis of the Normalized LMS algorithm with Gaussian Inputs", *IEEE trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, **ASSP-28**, 8, 793 ~ 806 (1986-8).
- (6) J. Tanpreeyachaya · I. Takumi · M. Hata : "A New Adaptive Algorithm Based on Conditioned Normalized LMS Method", *SINGAPORE ICSS/ISITA'92 Conference Proceedings*, Vol. 3, 1190 ~ 1194 (1992-11).
- (7) J. Tanpreeyachaya · I. Takumi · M. Hata : "A Partial-normalized LMS algorithm and Its Applications", *AUSTRALIA ICSS/ISITA'94 Conference Proceedings*, Vol. 2, 745 ~ 750 (1994-11).
- (8) J. Tanpreeyachaya · I. Takumi · M. Hata : "Performance Improvement of Variable Stepsize NLMS", *IEICE Trans. on Fundamentals*, **E78-A**, 8, 905 ~ 914 (1995-8).
- (9) K. Wesolowski · C. M. Zhao · W. Rupprecht : "Adaptive LMS transversal filters with controlled length", *IEE Proc. F, Commun., Radar & Signal Process.*, **139**, 3, 233 ~ 238 (1992-6).
- (10) R. H. Kwong · E. W. Johnston : "A Variable Step Size LMS Algorithm", *IEEE trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, **ASSP-40**, 7, 1633 ~ 1642 (1992-7).
- (11) 藤井 健作 · 大賀 寿郎 : "学習同定法における修正定数の最適制御", 信学論 A, **J75-A**, 6, 975 ~ 983 (1992-6).
- (12) 田口 亮 · 浜田 望 : "可変ステップ形学習同定法の一提案", 信学論 A, **J71-A**, 8, 1663 ~ 1665 (1988-8).
- (13) D. T. M. Slock : "On the Convergence Behavior of the LMS and the Normalized LMS Algorithms", *IEEE Trans. Signal Processing*, **SP-41**, 9, 2811 ~ 2825 (1993-9).
- (14) M. Rupp : "The Behavior of LMS and NLMS Algorithms in the Presence of Spherically Invariant Processes", *IEEE Trans. Signal Processing*, **SP-41**, 3, 1149 ~ 1160 (1993-3).
- (15) N. J. Bershad : "Behavior of the ϵ -Normalized LMS Algorithm with Gaussian inputs", *IEEE trans. Acoust., Speech & Signal Processing*, **ASSP-35**, 5, 636 ~ 644 (1987-5).
- (16) 藤井 健作 · 坂井 良弘 · 増田 浩幸 · 大賀 寿郎 : "学習同定法の新しい表現と安定条件", 信学論 A, **J73-A**, 11, 1769 ~ 1775 (1990-11).

- (17) S. Haykin : "Adaptive Filter Theory", 2nd ed. *Prentice-Hall, Cliffs* (1991).
- (18) A. Hald : "Statistical Theory with Engineering Applications", *Wiley & Sons* (1952).
- (19) A. Papoulis : "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", 2nd ed. *McGraw-Hill* (1984).
- (20) 中西 貴裕・内匠 逸・畑 雅恭・山田 孝一 : "狭帯域信号除去のための IIR 形 ADF の構成と極制御", 信学論 A, **J78-A**, 2, 202 ~ 213 (1995-2).
- (21) B. Friedlander : "A Recursive Maximum Likelihood Algorithm For ARMA Line Enhancement", *IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Process.*, **ASSP-30**, 4, 651 ~ 657 (1982-8).

付 録

1. 相関関数式 (3) の導出

式 (2) の分母の $E[||\mathbf{x}_j||^4]$ は次のように求められる。まず, $||\mathbf{x}_j||^4$ は次式となる。

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x}_j||^4 &= (x_j^2 + x_{j-1}^2 + \cdots + x_{j-N+1}^2)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_{j-i}^2 x_{j-k}^2}_{N^2\text{-terms}} \cdots \cdots \cdots \text{(付 1)} \end{aligned}$$

上式の期待値を計算するため, $E[a_1 a_2 a_3 a_4]$ の恒等式⁽¹⁹⁾

$$\begin{aligned} E[a_1 a_2 a_3 a_4] &= E[a_1 a_2] E[a_3 a_4] + E[a_1 a_3] E[a_2 a_4] \\ &\quad + E[a_1 a_4] E[a_2 a_3] \cdots \cdots \cdots \text{(付 2)} \end{aligned}$$

を用いると, x_j が白色信号であるとの仮定のもとで次式を得る。

$$E[||\mathbf{x}_j||^4] = N(N+2)\sigma_x^4 \cdots \cdots \cdots \text{(付 3)}$$

また, 式 (2) の分母の $E[e_j^4]$ も同様に,

$$\begin{aligned} e_j^4 &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} [\Delta v_{i+1,j} x_{j-i}] [\Delta v_{k+1,j} x_{j-k}] \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} [\Delta v_{i+1,j} x_{j-i}] [\Delta v_{k+1,j} x_{j-k}] \\ &\quad [\Delta v_{l+1,j} x_{j-l}] [\Delta v_{m+1,j} x_{j-m}] \cdots \cdots \cdots \text{(付 4)} \end{aligned}$$

となる。ここで, 時刻 j における異なる入力信号系列 x_j に関する e_j^4 の期待値を計算する。入力信号 x_j はガウス性を有すると仮定する。なお, 時刻 j においてフィルタ係数ベクトル $\mathbf{v}_j$ は既に決定されているため, それにともない $\Delta \mathbf{v}_j$ は定数として扱うことができる。従って, 次式を得る。

$$E[e_j^4] = 3\sigma_x^4 ||\Delta \mathbf{v}_j||^4 \cdots \cdots \cdots \text{(付 5)}$$

式 (2) の分子は次式となる。

$$E[||\mathbf{x}_j||^2 \cdot e_j^2] = (N+2)\sigma_x^4 ||\Delta \mathbf{v}_j||^2 \cdots \cdots \cdots \text{(付 6)}$$

式 (付 3), (付 5), (付 6) を式 (2) に代入すると, 式 (3) を得る。

ジラサック タンバリヤチャヤー (非会員) 平2年タイ国のチェンマイ大学・工・電子卒。平5年名工大大学院修士課程了。現在同大大学院博士課程在学中。デジタル信号処理に関する研究に従事。IEEE 学生会員。電子情報通信学会会員。

内匠 逸

(正員) 昭57名工大・工・電子卒。昭59同大大学院修士課程了。同年沖電気工業(株)入社。昭60年12月より名工大助手。デジタル信号処理の研究に従事。工博。計測自動制御学会会員。電子情報通信学会会員。

畑 雅恭

(非会員) 昭33名工大・工・電気卒。同年沖電気工業(株)入社。以来, デジタル通信方式, 電子回路応用, ミリ波通信機器の研究開発に従事。昭60年同社退職, 同年4月より名工大電気情報工学科教授としてデジタル信号処理, 情報通信の研究に従事。現在知能情報システム学科に所属。工博(東工大)。