汎関数を目的関数とする最適化問題への遺伝的アルゴリズムの適用

正員 三 浦 武 (秋 田 大)
正員 谷 口 敏 幸 (秋 田 大)

A New Method in Application of Genetic Algorithm for an Optimization Problem with Objective Functional
Takeshi Miura, Member, Toshiyuki Taniguchi, Member (Akita University)

キーワード：最適化問題，汎関数，関数の連続性および微分可能性，遺伝的アルゴリズム

1. はじめに

数理計画問題あるいは最適化問題は，ある制約条件のもとで，ある目的関数の最大値あるいは最小値を与える最適解を求める問題として知られており⁽¹⁾⁽²⁾，

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximize (or minimize) } f(\mathbf{x}) \\ \text{subject to } \mathbf{x} \in S \subset X \end{array} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

と表記される⁽³⁾。 f は， $f: X \rightarrow R$ (X は集合， R は順序集合)である目的関数で， $\mathbf{x}$ は実行可能解， S は実行可能領域である。 X の各要素が関数である場合には， f は汎関数となり，例えば，ゲインスケジュール方式の制御⁽⁴⁾において，環境条件の関数である制御ゲインの値を調整し，評価関数を最小化するという問題がこれに当たる。

近年， X の要素がそれぞれ離散集合である組合せ最適化問題の解法として，遺伝的アルゴリズム (以下 GA) が注目されている⁽⁶⁾。 f が汎関数である場合でも， X の要素である関数 $g(x)$ の定義域を離散化して関数そのものをベクトル $[g(x_1), \dots, g(x_n)]$ で近似し，

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximize (or minimize) } f(g(x_1), \dots, g(x_n)) \\ \text{subject to } [g(x_1), \dots, g(x_n)] \in S \subset X \end{array} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

と扱うことにより近似解を得ることが可能となる。

例えば，前述のゲイン調整において，環境条件が連続的に変化する時には，出力へのショックを避けるためにゲインの変化も連続的にするといったように，解に対して連続性や微分可能性等の条件が付加される場合がある。上記の方法では，ベクトルの各成分が独立に扱われるため必ずしもそれらの条件を満足できないという問題が生ずる。

本研究は，このような最適化問題への GA の適用に関し，連続かつ微分可能な重み関数を遺伝的操作に導入し，上記の条件を満足する解を得る手法を提案するものである。

2. 関数を遺伝子型とする遺伝的アルゴリズム

本手法においては，通常は記号列として表現される遺伝子型が，区間 $[x_{\min}, x_{\max}]$ で定義される関数 $g(x)$ に置き換えられる。遺伝的操作は通常は選択・交叉・突然変異の3つであるが，遺伝子型に対し直接実行される操作は交叉と突然変異であり，これらが以下の様な手順で実行される。

交叉は，2つの個体の遺伝子の一部を交換する操作であ

る。それぞれの個体の交叉前の遺伝子型が $g_1(x)$ ， $g_2(x)$ ，交叉点が x_0 であった場合，交叉後のそれぞれの遺伝子型 $\hat{g}_1(x)$ ， $\hat{g}_2(x)$ を，

$$\left. \begin{array}{l} \hat{g}_1(x) = w_{co}(x)g_1(x) + \{1 - w_{co}(x)\}g_2(x) \\ \hat{g}_2(x) = \{1 - w_{co}(x)\}g_1(x) + w_{co}(x)g_2(x) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

とする。 $w_{co}(x)$ は定数 a を含む図1の様な重み関数である。区間 $[x_0 - a, x_0 + a]$ における重み関数は連続，微分可能かつ単調減少であればよく，本研究では以下のような円周の一部分を表す関数とした。

$$w_{co}(x) = \begin{cases} 1 & (x < x_0 - a \text{ の場合}) \\ \frac{\sqrt{(2a)^2 - (x - x_0 + a)^2} + 2a(1 - \sqrt{3})}{\{2a(2 - \sqrt{3})\}} & (x_0 - a \leq x < x_0 \text{ の場合}) \\ \frac{-\sqrt{(2a)^2 - (x - x_0 - a)^2} + 2a}{\{2a(2 - \sqrt{3})\}} & (x_0 \leq x < x_0 + a \text{ の場合}) \\ 0 & (x_0 + a \leq x \text{ の場合}) \end{cases} \dots\dots\dots(4)$$

突然変異は，任意の個体の一部の遺伝子をランダムに別の値に書き換える操作である。本手法では，ある個体の突然変異の発生する前の遺伝子型が $g(x)$ ，変異の発生する位置が x_0 であった場合，変異後の遺伝子型 $\hat{g}(x)$ を，

$$\hat{g}(x) = g(x) + w_m(x)d_m \dots\dots\dots(5)$$

として与える。 d_m は x_0 における $g(x)$ の変化量， $w_m(x)$ は図1に示す重み関数であり，定数 b を用い次の様に与える。

$$w_m(x) = \begin{cases} 0 & (x < x_0 - b \text{ あるいは } x_0 + b \leq x \text{ の場合}) \\ 1 - \frac{\sqrt{b^2 - (x - x_0 + b)^2} + b(1 - \sqrt{3})}{\{b(2 - \sqrt{3})\}} & (x_0 - b \leq x < x_0 - b/2 \text{ の場合}) \\ 1 - \frac{-\sqrt{b^2 - (x - x_0)^2} + b}{\{b(2 - \sqrt{3})\}} & (x_0 - b/2 \leq x < x_0 \text{ の場合}) \\ \frac{\sqrt{b^2 - (x - x_0)^2} + b(1 - \sqrt{3})}{\{b(2 - \sqrt{3})\}} & (x_0 \leq x < x_0 + b/2 \text{ の場合}) \\ \frac{-\sqrt{b^2 - (x - x_0 - b)^2} + b}{\{b(2 - \sqrt{3})\}} & (x_0 + b/2 \leq x < x_0 + b \text{ の場合}) \end{cases} \dots\dots\dots(6)$$

初期集団における各個体の遺伝子型である関数が連続かつ微分可能であれば，連続かつ微分可能な重み関数を用いた上記の操作を経た後もそれらの性質が保存される。

3. 提案された手法の最適化問題への適用例

前章の手法を次のような最適化問題に適用し，その有効

図1 遺伝的操作において用いられる重み関数
Fig. 1. Weight functions used in genetic operator.

図2 各世代における最大適応度の変化
Fig. 2. Variation of maximum fitness at each generation.

図3 第1000世代において最大適応度を与える関数
Fig. 3. Functions with maximum fitness at the 1000th generation.

性の検討を行った。

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \exp\left(-\int_0^1 |F(x)-g(x)|dx\right) \\ &\text{subject to } g(x) \text{ defined on } [0, 1], -1 \leq g(x) \leq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

この問題の解は、 $-1 \leq F(x) \leq 1$ であれば $g(x)=F(x)$ となり、目的関数の最大値は1となる。GAを用いるにあたり、各個体の適応度を各々の目的関数値とした。選択は、集団中の適応度の高い半数の個体を1個体ずつ増殖させ、残りの半数は死滅するというランク戦略によった。交叉は、全個体を2個体ずつのペアとし、(4)式中の x_0 、 a をそれぞれ $[0, 1]$ 、 $[0.15, 0.30]$ 上でペア毎にランダムに決定して行った。突然変異は各個体に関して5%の確率で発生するとし、(6)式中の x_0 、 d_m 、 b の値をそれぞれ $[0, 1]$ 、 $[-g(x_0)/2, g(x_0)/2]$ 、 $[0.15, 0.30]$ 上でランダムに与えて行った。

尚、比較のために、問題を(2)式のように組合せ最適化問題と近似した計算も行った。この場合、 $[0, 1]$ を50等分して $[g(x_1), \dots, g(x_{51})]$ とし、 $[-1, 1]$ を256段階で表した8ビットの2進コードによってベクトルの各成分を表したものを遺伝子型とした。交叉は各成分毎にランダムに決定した交叉点における1点交叉とし、突然変異は各ビット毎に0.2%の確率で発生するとした。

いずれの手法を用いた場合にも個体数は20とし、初期集団における各個体は、それぞれ区間 $[-1, 1]$ 上でランダムに与えられた値を持つ定数関数とした。

図2および図3に、 $F(x) = 0.75\cos(2\pi x)$ とした場合の計算結果を示す。図2より、本研究で提案した手法を用いた場合の方が高い適応度を持ちうるということがわかる。また、図3より、得られた関数も、本手法を用いた場合の方が、連続性および微分可能性に関して優れていることがわかる。

4. おわりに

本研究において提案された手法を用いることにより、組合せ最適化問題のみならず汎関数を目的関数として持つ最適化問題に関しても、GAにより良好な解が得られることが示された。また、遺伝的操作に用いられる重み関数を調整すれば、より効率的な計算が可能になると考えられる。

(平成8年8月2日受付、同8年9月19日再受付)

文 献

- (1) 日本数学会編：岩波 数学事典 第3版，岩波書店(1985)
- (2) 清水清孝：最適制御の理論と計算法，コロナ社(1994)
- (3) 坂和正敏・田中雅博：遺伝的アルゴリズム，朝倉書店(1995)
- (4) 寺尾満監修・金井喜美雄著：ロボスト適応制御入門，オーム社(1989)
- (5) 安居院猛・長尾智晴：ジェネティックアルゴリズム，昭晃堂(1993)

三 浦 武 (正員) 1991年3月岩手大学大学院工学研究科修士課程修了。1993年3月北海道大学大学院工学研究科博士後期課程中退。同年4月秋田大学鉱山学部電気電子工学科助手

谷 口 敏 幸 (正員) 1979年3月北海道大学大学院工学研究科博士課程修了。1981年2月秋田大学鉱山学部電気工学科助手。現在、同電気電子工学科教授