キーワード

ロバスト制御, μ -設計, 不確かなシステム, LFT 表現, 磁気浮上系

正員 滑川 徹

金沢大学

正員 藤田 政之

北陸先端大

1. はじめに

実システムを制御するには、一般には対象となるシステムの (数学) モデルを導出し、そのモデルに対して補償器の設計を行ない、得られた補償器を実システムに適用する。しかしモデルを導出する際には客観的な物理法則のみによりモデルが得られるわけではなく、設計者の主観に基づく何らかの理想化、簡略化が存在する。それにより実システムとモデルにギャップが生じることは避けられない。

このギャップを埋めるための理論がロバスト制御理論であり、その中核が H_∞/μ 制御である。現在では応用例は数え切れない。しかしながら、ロバスト制御は万能ではなく、その成否は上述のギャップの大きさと、またギャップの表現にかかっていると思われる。公称モデルとして使うに耐えないギャップの情報をそのまま切捨ててしまうのではなく、有効に活用すべきである。

良く知られているように μ -設計では評価指標として以下で定義される構造化特異値 $\mu_\Delta(M)$ を用いる⁽¹⁾。

$$\mu_\Delta(M) := \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

上述の実システムとモデルのギャップを有効に利用するということは、行列 M とブロック構造 Δ を実システムに適するように表現するということである。

本稿では、 μ -設計とそれに密接に関わる LFT(Linear Fractional Transformation)⁽²⁾ を用いた不確かなシステムの表現に焦点を絞り、不安定系である磁気浮上系への適用例を紹介する。

2. 磁気浮上系

図 1 に本稿で扱う磁気浮上系の概略図を示す。ここでは物理法則と幾つかの仮定を用いて、このシステムの公称モデルを導出する⁽³⁾⁽⁴⁾。このシステムは以下の鉄球の運動方程式、電磁石吸引力式、電気回路方程式で記述される。

図 1 磁気浮上系

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = Mg - f(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$f(t) = k \cdot (I + i(t))^2 / (X + x(t) + x_0)^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + R(I + i(t)) = E + e(t) \dots\dots\dots (3)$$

ここで M は鉄球の質量, $f(t)$ は電磁石吸引力, k, x_0 (実際の電磁石の特性を補正する定数⁽³⁾) は実験により決まる係数, $\{L, R\}$ は電磁石のインダクタンス, 抵抗である。次に電磁石吸引力式 (2) を動作点近傍でテイラー級数展開により線形近似する。

$$f(t) = k \cdot I^2 / (X + x_0)^2 - K_x x(t) + K_i i(t)$$

$$K_x = \frac{2kI^2}{(X + x_0)^3}, \quad K_i = \frac{2kI}{(X + x_0)^2} \dots\dots\dots (4)$$

式 (1), (3), (4), および定常値間に成り立つ関係式より制御対象の公称伝達関数 $G_{nom}(s)$ は図 2 のブロック線図で表現される。この公称モデルパラメータを表 1 に示す。

図 2 公称モデル $G_{nom}(s)$

Applications of Advanced Control Theory.
Uncertainty Structure and μ -Design of a Magnetic Suspension System.

By Toru Namerikawa, Member (Kanazawa University), & Masayuki Fujita, Member (JAIST).

表1 モデルパラメータ

Parameter	Nominal Value	Unit
M	1.04	[kg]
X	5.00×10^{-3}	[m]
I	0.789	[A]
k	1.71×10^{-4}	[Nm ² /A ²]
x_0	-1.80×10^{-3}	[m]
K_x	6.27×10^3	[N/m]
K_i	25.7	[N/A]
L	0.859	[H]
R	24.76	[Ω]

3. 不確かなシステムとLFT表現

得られた公称モデルは動作点が変わったときには必ずしも対象の挙動を正確に表現するとは限らない。ここではより広い動作点の変化を包含するモデルの集合を考え、より広い範囲の挙動を表現することを試みる。

一般に制御系設計時に問題となる不確かさとしては「線形化による不確かさ」、「パラメータの不確かさ」、「モデル化されないダイナミクス」が挙げられる⁽⁵⁾。本章ではこれらの不確かさについて考察を行なう。

3.1 線形化による不確かさ

まず電磁石吸引力の線形化に起因するモデル誤差に関して考察する。図3に、電流-吸引力($i-f$)曲線($X=5.0\text{mm}$)、ギャップ-吸引力($x-f$)曲線($I=1.15\text{A}$)をそれぞれ上下に示す。ここで○は計測した実際の実験データを示し、実線は最小2乗法により決定された2次曲線を示す。また破線の直線は動作点での接線を表す。これらの接線の傾きがそれぞれ K_i 、 K_x である。またここで、一点鎖線は線形化誤差のセクタを示す。線形化誤差を表現するセクタとして、以下の表現を用いる。

$$K_i = K_{i0} + k_i \delta_i, \quad \delta_i \in [-1, 1] \quad (5)$$

$$K_x = K_{x0} + k_x \delta_x, \quad \delta_x \in [-1, 1] \quad (6)$$

ここで $\{K_{i0}, K_{x0}\}$ は公称値、 $\{k_i, k_x\}$ は重みである。

図3 電流-吸引力特性, ギャップ-吸引力特性

3.2 パラメータの不確かさ

さらに鉄球の質量 M の変化や予期せぬ外力乱に対してもシステムがロバスト性を保持することが期待される。ここではそれらをパラメータ M の変動とみなし、以下のように記述する。ただし M_0 は公称値、 k_M は重みである。

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_0 + k_M \delta_M}, \quad \delta_M \in [-1, 1] \quad (7)$$

3.3 モデル化されないダイナミクス

実際の電磁石の特性は非常に複雑で、広範な挙動の記述は大規模な非線形微分方程式を用いても正確に表現することは難しい。パラメータ同定においても、 L 、 R の測定はノイズに非常に敏感で、計測の再現性が乏しい。

図4は電磁石電圧 $e(t)$ から電磁石電流 $i(t)$ までの伝達関数 $1/(Ls + R)$ の実測値を表しており、実線は公称値を用いた場合の公称周波数応答を、鎖線はその上下限を表す。図より、電磁石のダイナミクスは周波数依存の帯として分布している。ここでは帯の中心値を公称値とし、その帯の幅を非構造的なダイナミカルな不確かさとして以下に表現する。ただし $|\Delta_i(j\omega)| \leq 1$ 、 $\{L_0, R_0\}$ は公称値、 $w_i(s)$ は重みである。

$$\frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{L_0 s + R_0} + w_i(s) \Delta_i(s) \quad (8)$$

図4 伝達関数 $\frac{1}{Ls+R}$ の周波数応答

3.4 プラントモデルの集合

上記の議論を受け、これらの不確かさを考慮して図2に示す公称モデルを再構築すると、プラントモデル集合は図5で与えられる。図5において4つの不確かさのブロックを1つのブロック構造として上側にまとめて記述すると不確かなシステムをLFT表現できる。

4. 不確かさと性能

4.1 不確かさの定量化

ここでは動作点の変動を考慮して、それをもとにプラントモデル集合の大きさを決定する。動作点は定常ギャップ $\{X \mid X_{\min} \leq X \leq X_{\max}\}$ によって特徴付けられる。設

図5 構造的な不確かさを考慮したモデル集合

計仕様としては X の範囲が可能なだけ大きいことが好ましいが、動作点 X の変動がモデルパラメータ K_i と K_x の変動を引き起こすため、動作点の変動には限界がある。

X の変動幅としては制御系設計を数回繰り返すことにより、最終的には $\{X \mid 3.8 \leq X \leq 6.2\}$ が得られた。設計には後述する $D-K$ イテレーションに基づく μ -設計を、解析には混合 μ -解析を用いた⁽¹⁾。このときパラメータ K_i , K_x には以下のような変動が生じる。

$$K_i = 25.7 + 11.6 \cdot \delta_i, \quad \delta_i \in [-1, 1] \dots\dots\dots (9)$$

$$K_x = 6270 + 890 \cdot \delta_x, \quad \delta_x \in [-1, 1] \dots\dots\dots (10)$$

さらに電磁石の不確かさについても考慮する。パラメータ L および R のパラメトリックな変動に加え、高周波帯域でのモデル化されないダイナミクスについても考慮する。ホワイトノイズを用いて伝達関数を実測した結果、電磁石の不確かさを考慮したダイナミクスは以下で与えられる。

$$\frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{0.859s + 24.76} + \frac{1.28 \times 10^{-3}(s + 3.20)(s + 900)}{(s + 25.8)(s + 31.4)} \Delta_i(s) \dots (11)$$

ここで $|\Delta_i(j\omega)| \leq 1$ である。以上の議論により、最終的な定量化された不確かさを表2に示す。ここで質量 M の変動幅としては7%を考慮している。

表2 定量化された不確かさ

	Value		Value
k_i	11.6	k_x	8.90×10^2
k_M	7.25×10^{-2}	$w_i(s)$	$\frac{1.28 \times 10^{-3}(s + 3.20)(s + 900)}{(s + 25.8)(s + 31.4)}$

4.2 制御性能の定量化と内部結合構造の構築

性能の仕様として感度低減化問題を考える。感度関数 $S := (I + G_{nom}K)^{-1}$ に対する重み W_{perf} として、以下の関数を与える。

$$W_{perf}(s) = \frac{100}{1 + s/0.1} \dots\dots\dots (12)$$

上記の仕様を加え、図5のモデルを再びLFT表現すると図6のような内部結合構造が得られる。

図6 内部結合構造

5. μ -解析・シンセシス

5.1 $D-K$ イテレーション

ロバスト性能を達成する補償器の設計には良く知られている $D-K$ イテレーションを用い、解析には混合構造化特異値 (mixed μ) を用いる。まず不確かさのブロック構造 Δ を以下に定義する。

$$\Delta := \{\text{diag}[\delta_i, \delta_x, \delta_M, \Delta_i, \Delta_{perf}] : \delta_i, \delta_x, \delta_M \in \mathbf{R}, \Delta_i, \Delta_{perf} \in \mathbf{C}\},$$
$$|\delta_{\{i,x,M\}}| < 1, |\Delta_{\{i,perf\}}(j\omega)| < 1, \forall \omega \quad (13)$$

制御問題は以下のロバスト性能条件式を満たす補償器 $K(s)$ を求めることとする。

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \mu_{\Delta}[F_i(P(j\omega), K(j\omega))] < 1 \dots\dots\dots (14)$$

ここで $P(s)$ は公称モデル $G_{nom}(s)$ や他の重み関数を含む一般化プラントである。実際の $D-K$ イテレーションでの計算には以下の式を用いる。

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} \inf_{D(\omega)} \{\bar{\sigma}(D(j\omega)F_i(P, K)(j\omega)D^{-1}(j\omega))\} < 1 \quad (15)$$

以下では良く知られているように、次のようなステップでイテレーションを行なう。

- [Step 1]: H_{∞} 補償器 $K(s)$ の計算
- [Step 2]: 混合 μ -解析
- [Step 3]: D スケーリング行列の計算と $P(s)$ への吸収

ここで、[Step 2] で混合 μ -解析を行なう際には (13) 式のブロック構造をそのまま (実・複素) 混合ブロックとして計算に用い、[Step 3] で D スケーリング行列のフィッティングを行なう際には (13) 式中のスカラ実ブロックを複素ブロックとして計算する。

上記ステップを3回繰り返した後に、補償器 $K(s)$ が得られた。ここで $\mu_{\Delta}[F_l(P, K)]$ のピーク値は0.949である。最終的なスケリング行列 $D(s)$ は12次であり、 $K(s)$ は30次となる。これは非常に高次であるためハンケルノルム近似により低次元化を行なう。得られた補償器 $\hat{K}(s)$ を以下に示す。 $\mu_{\Delta}[F_l(P, \hat{K})]$ のピーク値も0.949である。

$$\begin{aligned} \hat{K}(s) = & \frac{3.27 \times 10^{10} \cdot (s + 497 \pm 897i)}{(s + 1750)(s + 950 \pm 1320i)} \\ & \times \frac{(s + 382 \pm 508i)(s + 75.3)(s + 33.3)(s + 11.5)}{(s + 504 \pm 805i)(s + 364 \pm 499i)(s + 6.10)} \\ & \times \frac{(s + 4.20)(s + 0.150)(s + 0.0374)}{(s + 0.194)(s + 0.0802)(s + 0.0373)} \dots (16) \end{aligned}$$

図7に $\mu_{\Delta}[F_l(P, \hat{K})]$ の上下界、 $\sigma[DF_l(P, \hat{K})D^{-1}]$ をそれぞれ実線、破線で示す。 μ のピーク値が1未満であり、補償器 $\hat{K}(s)$ が、前節で設定した動作点の変動 ($\{X \mid 3.8 \leq X \leq 6.2\}$) を考慮して構築したモデル集合に対してロバスト性能を達成している。

図7 $\mu_{\Delta}[F_l(P, \hat{K})]$ および $\sigma[DF_l(P, \hat{K})D^{-1}]$

5.2 ロバスト性能の検証

補償器 $\hat{K}(s)$ を実装し、実システムを用いてロバスト性能の検証を行なう。ここで検証すべき「ロバスト性能の達成」とは「動作点の変動 $\{X \mid 3.8 \leq X \leq 6.2\}$ に対して安定性を損なわず、かつ応答が不変である」ことである。

そこで動作点を $X = 3.8, 5.0, 6.2\text{mm}$ に設定し、浮上実験を行なった。実験ではステップ状外乱に対する時間応答を測定した。加えた外乱は鉛直下向きで定常吸引力の約2倍程度に相当する。実験結果を図8に示す。この図で公称定常ギャップである $X = 5.0\text{mm}$ でのステップ状外乱応答を破線で示す。これがノミナル性能を表す。実線は $X = 3.8, 6.2\text{mm}$ での応答を示すが、これらの応答はノミナル応答と殆ど変わらない。この結果より「 $\hat{K}(s)$ がロバスト性能を達成している」と言えよう。

図8 動作点の変動に対する性能検証 ($X = 3.8, 5.0, 6.2\text{mm}$)

6. おわりに

本稿では、 μ -設計とそれに密接に関わる LFT を用いた不確かなシステムの表現に焦点を絞り、磁気浮上系への適用例を紹介した。実システムとモデルのギャップの影響を更に小さくするには不確かさの記述とその表現法、またその表現に適した評価指標の検討が重要であろう。本稿の例でも明らかに、LFT 表現および μ -設計は不確かなシステムの記述、設計に極めて有効な設計理論であると言える。
(平成9年12月10日受付)

文 献

- (1) G. J. Balas, J. C. Doyle, et al., *μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide*, The Math Works, 1995.
- (2) C. Beck, R. D'Andrea, F. Paganini and J. C. Doyle, "A State-Space Theory of Uncertain Systems," *Proc. of 13th IFAC World Congress*, pp. 291-296, San Francisco, 1996.
- (3) 電気学会 磁気浮上応用技術調査専門委員会 編, 磁気浮上と磁気軸受, コロナ社, 1993.
- (4) M. Fujita, T. Namerikawa, et al., " μ -Synthesis of an Electromagnetic Suspension System," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp. 530-536, 1995.
- (5) R. D'Andrea, F. Paganini and J. C. Doyle, "Uncertain Behavior," *Proc. of 32nd IEEE CDC*, pp. 3891-3896, San Antonio, 1993.

滑 川 徹 (正員) 1991 年 金沢大学工学部電気・情報工学科卒業。1993 年 同大学大学院工学研究科修士課程修了(電気・情報工学専攻)。1994 年 同大学大学院自然科学研究科博士課程中退(システム科学専攻)。同年 金沢大学工学部電気・情報工学科助手となり現在に至る。メカトロニクスシステムのロバスト制御に関する研究に従事。博士(工学)。計測自動制御学会, IEEE などの会員。

藤 田 政 之 (正員) 電学論 C, 118 巻 2 号, p. 276 参照。