多入出力系のコンティニユアス最適有限整定制御装置の設計

学生員 松島優一 (広島工業大学)

正 員 原田義治 (広島工業大学)

正 員 村田弘志 (広島工業大学)

A Design Method of Optimal Continuous Deadbeat Controller for Multivariable system

Yuichi Matsushima, Yoshiharu Harada, Hiroshi Murata

(Hiroshima Institute of Technology)

The continuous deadbeat controller which includes some delay-element has already reported and the finite settling responses can be realized in continuous-time domain. This controller is, however, impractical because it is difficult to construct delay-element.

In this paper, we propose a new design method of an optimal continuous deadbeat controller without using delay-element for the multivariable system. The sequence of the optimal control signal which can minimize the quadratic performance index for the manipulated variable and deviation can be easily obtained from the computation of the matrix described by the step response of the system.

Our new controller is composed of both digital deadbeat compensator which can be designed by using sequence of the control signal and a series smoothing filter of the analog element. Finally, we show a numerical example of the 2 input-2 output system.

キーワード：多入出力系有限整定制御，コンティニユアス最適有限整定制御，連続時間デッドビート制御

1. まえがき

連続時間有限整定制御はサンプル値系でのリップルのない有限整定制御に対応すると考えられ，連続時間での操作量によりデッドビート応答を達成するものである。この連続時間系の有限整定制御については，黒沢^{1), 2)}がむだ時間要素を閉ループ系に導入する設計手法を最初に提案している。また，延山³⁾は複数個のむだ時間を用いた制御装置の設計法を示した。さらに，加藤⁴⁾は1つのむだ時間要素と動的要素を用いたデッドビート連続時間コントローラの設計法を提案している。しかし，応答波形の改善や多入出力系への適用が考慮されていないこと，むだ時間要素を含むことから操作量に不連続な跳躍が生じること，むだ時間の導入はサンプル値系よりも大がかりな装置になることなど実用面での問題が存在している。

ところで，サンプル値系におけるデッドビートデジタル制御装置の設計法については，前置補償器や^{5), 6)}緩和フィルタ^{7), 8)}を用いて自由度を増し操作量と偏差の2乗積分を評価とした最適有限整定制御系の設計法が報告されている。著者らもインパルス応答を用いた最適有限整定制御装置の設計法を提案し，多入出力系に対しても言及している。^{9), 10), 11)}そこで，最適有限整定デジタル制御装置の設計法を用いて応答改善をはかった制御装置を求めて，制御式の演算はデジタルで行いその離散値信号を平

滑化した連続時間操作量を制御対象に加えればサンプル値系と連続時間系との融合による有限整定制御が実現できる。

本論文ではこのような観点から， m 入力 l 出力の制御対象 $G(s)$ の各要素を $G^{pq}(s)$ ($p=1 \sim l, q=1 \sim m$) とするとき m 個の低次平滑フィルタ $G_b^q(s)$ ($q=1 \sim m$) を入力端に前置した拡大系 $G(s)$ を考える。この拡大系のステップ応答のサンプル値を用いた簡単な行列計算から評価関数を最小化する多入出力系の最適有限整定操作量を求め，この操作量に対する $G(s)$ の応答を閉ループ系の規範応答とする出力フィードバックによる最適有限整定デジタル制御装置を設計し，CPU処理による零次ホールドした操作量 u_i^* を $G_b^q(s)$ に加え，その出力 $u^q(t)$ を連続操作量とする最適連続時間有限整定制御系の設計法を提案する。

本手法によれば，従来の最適有限整定デジタル制御装置の設計法が利用できること， $G_b^q(s)$ は簡単な一次遅れの系を構成すればよいことから制御式の次数を1次増すだけでよいこと，むだ時間要素を用いないから制御系の構成が簡単なこと，過渡応答波形の改善ができ制御対象に跳躍のない滑らかな連続操作量を与えることのできることで，操作量の制限についてもサンプル周期の変化なしに対応可能なことなどの利点があげられ，実用的に有益と思われる。

2. 系の記述と問題の設定

図1に示すように，制御対象の伝達関数行列が $G(s)$ で

表される m 入力 l 出力の多入出力系の各入力端に一次の平滑要素 $G_\theta^p(s)$ を設定した拡大系 $G(s)$ を考える。この拡大系の入出力間の各伝達要素を $G^{pq}(s)=G_\theta^p(s) \cdot G^{pq}(s)$, ステップ応答を $h^{pq}(t)$ ($p=1 \sim l, q=1 \sim m, m \geq l$) とする。ただし、 $G^{pq}(s)$ は制御対象 $G(s)$ の各伝達要素である。ここで、拡大系 $G(s)$ の各入力端にサンプル周期が θ の零次ホールド回路を置き $x_i^{pq}=x^{pq}(i\theta)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) なる表現で統一して離散値データを表すこととし、次式のステップ応答行列 H_i , インパルス応答行列 G_i , 入力行列 U_i , 出力行列 Y_i とステップ応答ベクトル h_i , 入力ベクトル u_i , 出力ベクトル y_i を定める。なお、 $G_i = H_i - H_{i-1}$ である。

$$H_i = \begin{bmatrix} h_i^{11} & h_i^{12} & \cdots & h_i^{1m} \\ h_i^{21} & h_i^{22} & \cdots & h_i^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_i^{l1} & h_i^{l2} & \cdots & h_i^{lm} \end{bmatrix} \quad (l \times m) \quad \cdots (1)$$

$$G_i = \begin{bmatrix} g_i^{11} & g_i^{12} & \cdots & g_i^{1m} \\ g_i^{21} & g_i^{22} & \cdots & g_i^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_i^{l1} & g_i^{l2} & \cdots & g_i^{lm} \end{bmatrix} \quad (l \times m) \quad \cdots (2)$$

$$U_i = \begin{bmatrix} u_i^{11} & u_i^{12} & \cdots & u_i^{1l} \\ u_i^{21} & u_i^{22} & \cdots & u_i^{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_i^{m1} & u_i^{m2} & \cdots & u_i^{ml} \end{bmatrix} \\ = [u_i^1, u_i^2, \cdots, u_i^l] \quad \cdots (3)$$

$$u_i^p = [u_i^{1p}, u_i^{2p}, \cdots, u_i^{mp}]^T \quad \cdots (4)$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_i^{11} & y_i^{12} & \cdots & y_i^{1m} \\ y_i^{21} & y_i^{22} & \cdots & y_i^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_i^{l1} & y_i^{l2} & \cdots & y_i^{lm} \end{bmatrix} \quad \cdots (5)$$

$$h_i = [h_i^1, h_i^2, \cdots, h_i^l]^T = H_i i_m \quad (l \times 1) \quad \cdots (6)$$

$$u_i = [u_i^1, u_i^2, \cdots, u_i^m]^T = U_i i_l \quad (m \times 1) \quad \cdots (7)$$

$$y_i = [y_i^1, y_i^2, \cdots, y_i^l]^T = Y_i i_m \quad (l \times 1) \quad \cdots (8)$$

ただし、 h_i^p , u_i^q , y_i^p , i は次式で与えられる。

$$h_i^p = \sum_{j=1}^m h_i^{pj} \quad (p=1, \cdots, l) \quad \cdots (9)$$

$$u_i^q = \sum_{j=1}^l u_i^{qj} \quad (q=1, \cdots, m) \quad \cdots (10)$$

$$y_i^p = \sum_{j=1}^m y_i^{pj} \quad \cdots (11)$$

$$i_m = [1, 1, \cdots, 1]^T \quad (m \times 1) \quad \cdots (12)$$

$$i_l = [1, 1, \cdots, 1]^T \quad (l \times 1) \quad \cdots (13)$$

このとき、系の入出力間には次式が成立している。

$$y_i = \sum_{j=0}^{i-1} G_{i-j} u_j = \sum_{j=0}^{i-1} G_{i-j} U_j i_l = Y_i i_m \quad \cdots (14)$$

また、制御段数を N とし、(7), (8)式の u_i , y_i から入力系列ベクトル u と出力系列ベクトル y を

$$u = [u_0^T, u_1^T, \cdots, u_N^T]^T \quad \cdots (15)$$

$$y = [y_1^T, y_2^T, \cdots, y_{N+1}^T]^T \quad \cdots (16)$$

(2)式の G_i から伝達行列 G を

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ G_2 & G_1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ G_{N+1} & G_N & \cdots & \cdots & G_1 \end{bmatrix} \quad \cdots (17)$$

とおけば、(14)式は次式となる。

$$y = Gu \quad \cdots (18)$$

なお、系 (Φ, Γ, C) が可制御・可観測で

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i \quad \cdots (19)$$

$$y_i = C x_i \quad \cdots (20)$$

として表現されていれば、系のパルス伝達関数行列は

$$G(z) = C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} C \Phi^{i-1} \Gamma z^{-i} \quad \cdots (21)$$

として得られるから、(1), (2)式の H_i , G_i は

$$H_i = \sum_{j=1}^i (C \Phi^{j-1} \Gamma) = \sum_{j=1}^i G_j \quad \cdots (22)$$

$$G_i = C \Phi^{i-1} \Gamma = H_i - H_{i-1} \quad (i \geq 1, H_0 = 0, G_0 = 0) \quad \cdots (23)$$

と表せる。次に、出力フィードバックを想定して目標値ベクトルを r_i , 偏差ベクトルを $e_i = r_i - y_i$ として

$$e_i = [e_i^1, e_i^2, \cdots, e_i^l]^T \quad (l \times 1) \quad \cdots (24)$$

$$e = [e_0^T, e_1^T, \cdots, e_N^T]^T \quad l(N+1) \times 1 \quad \cdots (25)$$

のように定めるとき、 R を $m(N+1) \times m(N+1)$, Q を $l(N+1) \times l(N+1)$ なる正定対称な荷重行列として次式の評価を考える。

$$P = \frac{1}{2} (u^T R u + e^T Q e) \quad \cdots (26)$$

図1 多入出力系の入出力関係

Fig.1. Input-output relation of the multivariable system.

ここでの問題は、制御対象が(14)または(18)式で与えられるとき、ステップ状の目標値 $r^1, \dots, r^l$ に対し、(26)式の評価を最小化する最適有限整定操作量を求め、この操作量を用いて閉ループ系を有限整定応答させるデジタル制御装置を設計し、出力フィードバックによる最適有限整定応答サーボ系を設計することである。

3. ステップ状目標値に対する最適有限整定操作量

単一入出力系の場合、制御対象の次数に等しい制御段数の操作量で目標値に有限整定応答させることができる。この章では、図1の多入出力系における各伝達要素 $G^{pq}(s)$ の次数を n^{pq} とするとき、次数 $n(=\max n^{pq})$ に対して l 個の出力を単位ステップ状目標値に $N(\geq n)$ 段の操作量で有限整定応答させる操作量を求める。

説明を容易にするため、2入出力($m=2, l=2$)で $n=n^{pq}=2$ の場合をまず考え、等価ブロック線図を図2に示す。図2の[a]において、目標値を $r^1=1, r^2=0$ とするとき、応答 y_i^{11}, y_i^{21} を $N=n$ なる2段の操作量で有限整定させる操作量を u_j^{11}, u_j^{21} ($j=0, 1, \dots$) とすれば、この入出力間には次式が成立している。

$$\begin{bmatrix} y_i^{11} \\ y_i^{21} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^i \begin{bmatrix} g_j^{11} & g_j^{12} \\ g_j^{21} & g_j^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-j}^{11} \\ u_{i-j}^{21} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^i G_j u_{i-j}^1 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (27)$$

応答が2段で有限整定したと仮定すれば、2段以後 $y_i^{11}=1, y_i^{21}=0$ ($i \geq 2$) となるはずである。また、 u_j^{11}, u_j^{21} ($j=0, 1, 2$) が決定すべき操作量であり、 $j \geq 2$ に対して u_j^{11}, u_j^{21} は各々一定値となり $u_2^{11}=u_{2+\sigma}^{11}, u_2^{21}=u_{2+\sigma}^{21}$ ($\sigma \geq 1$) が成立する。ここで、(27)式において前記条件 $y_i^{11}=1, y_i^{21}=0$ と $u_2^{11}=u_{2+\sigma}^{11}, u_2^{21}=u_{2+\sigma}^{21}$ の関係を代入し、 $i=2, 3, 4$ (一般には、 $i=n \sim 2n$) について行列表示すれば次式を得る。

図2 目標値変化に対する等価図
(2入出力系の場合)

Fig. 2. Equivalent block diagram for step change of the desired value (2 input-2 output system).

$$i_0^1 = \begin{bmatrix} G_2 & G_1 & 0 \\ G_3 & G_2 & H_1 \\ G_4 & G_3 & H_2 \end{bmatrix} u^1 = J_0 u^1 \quad (28)$$

ただし、 i_0^1, u^1 は次式で表される。

$$i_0^1 = [1, 0, 1, 0, 1, 0]^T \quad (29)$$

$$u^1 = [u_0^{11}, u_0^{21}, u_1^{11}, u_1^{21}, u_2^{11}, u_2^{21}]^T \quad (30)$$

同様に、図2の[b]における入出力間には

$$\begin{bmatrix} y_i^{12} \\ y_i^{22} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^i \begin{bmatrix} g_j^{11} & g_j^{12} \\ g_j^{21} & g_j^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i-j}^{12} \\ u_{i-j}^{22} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^i G_j u_{i-j}^2 \quad (31)$$

が成立している。そこで、目標値を $r^1=0, r^2=1$ とし図2の[a]の場合と同様に整理して行列表示すれば、

$$i_0^2 = \begin{bmatrix} G_2 & G_1 & 0 \\ G_3 & G_2 & H_1 \\ G_4 & G_3 & H_2 \end{bmatrix} u^2 = J_0 u^2 \quad (32)$$

が得られる。ただし、 i_0^2, u^2 は次式で表される。

$$i_0^2 = [0, 1, 0, 1, 0, 1]^T \quad (33)$$

$$u^2 = [u_0^{12}, u_0^{22}, u_1^{12}, u_1^{22}, u_2^{12}, u_2^{22}]^T \quad (34)$$

したがって、(28)、(32)式から

$$u^1 = J_0^{-1} i_0^1 \quad (35)$$

$$u^2 = J_0^{-1} i_0^2 \quad (36)$$

が得られるが、 u^1, u^2 は各々 y^{11}, y^{22} を2段以後有限整定させる操作量である。

更に、図2の[c]においては

$$i_0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1]^T = J_0 u = J_0 [u_0^1, u_0^2, u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2]^T \quad (37)$$

が成立し、目標値が $r^1=1, r^2=1$ の場合の、有限整定操作量 u は次式から得られる。

$$u = J_0^{-1} i_0 = u^1 + u^2 \quad (38)$$

$$i_0 = i_0^1 + i_0^2 \quad (39)$$

なお、(30)、(34)式の系列の中から qp 要素を取り出し、次式の操作量の系列を作るとき、

$$u(qp) = \{u_0^{qp}, u_1^{qp}, u_2^{qp}, u_3^{qp}, \dots, u_n^{qp}\} \quad (p, q=1, 2) \quad (40)$$

この $u(qp)$ が、4章において設計されるデジタルコントローラの出力系列として使用される。

以上のことから、 m 入力 l 出力 ($n=n^{pq}$) の一般的な場合の有限整定応答操作量は次のように表せる。

任意の出力 y^p ($p=1, 2, \dots, l$) のみを単位ステップ状の目標値 $r_i^p=1$ ($i=0, 1, \dots$) に、その他の出力 $y^1, y^2, \dots, y^{p-1}, y^{p+1}, \dots, y^l$ を $r^1=r^2=\dots=r^{p-1}=r^{p+1}=\dots=r^l=0$ に n 段で有限整定応答させる操作量を u^p とすれば、 $i=n \sim 2n$ に対応する応答を整理して

$$\begin{aligned}
 i_0^p &= J_0 u^p \\
 &= J_0 [u_0^{1p}, u_0^{2p}, \dots, u_0^{mp}, \dots, u_n^{1p}, u_n^{2p}, \dots, u_n^{mp}]^T \\
 &\quad l(n+1) \times 1 \quad \dots \dots \dots (41)
 \end{aligned}$$

を得る。ただし、 i_0^p, J_0 は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 i_0^p &= [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \\
 &\quad l(n+1) \times 1 \quad \dots \dots \dots (42)
 \end{aligned}$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} \overleftarrow{\dots\dots\dots l \dots\dots\dots} & \overleftarrow{\dots\dots\dots l \dots\dots\dots} \\ G_n & G_{n-1} & \dots & G_1 & 0 \\ G_{n+1} & G_n & \dots & G_2 & H_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ G_{2n-1} & G_{2n-2} & \dots & G_n & H_{n-1} \\ G_{2n} & G_{2n-1} & \dots & G_{n+1} & H_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{matrix} \quad l(n+1) \quad \dots \dots \dots (43)$$

従って、入出力数が等しく $m=l$ であれば、 J_0 は $m(n+1) \times m(n+1)$ 行列となり、 $|J_0| \neq 0$ が成立することから

$$u^p = J_0^{-1} i_0^p \quad (p=1, 2, \dots, l) \quad \dots \dots \dots (44)$$

が得られる。また、 $m > l$ の場合には疑似右逆行列を用いて次式から操作量が求められる。

$$u^p = J_0^T (J_0 J_0^T)^{-1} i_0^p \quad \dots \dots \dots (45)$$

そこで、すべての出力 y^p を $r^p=1$ に有限整定応答させる操作量 u は次式となる。

$$\begin{aligned}
 u &= J_0^{-1} i_0 = J_0^{-1} \sum_{p=1}^l i_0^p = \sum_{p=1}^l u^p \\
 &= [u_0^1, u_0^2, \dots, u_0^m, \dots, u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^m]^T \\
 &\quad m(n+1) \times 1 \quad \dots \dots \dots (46)
 \end{aligned}$$

$$i_0 = [1, \dots, 1, \dots, 1]^T \quad l(n+1) \times 1 \quad \dots \dots \dots (47)$$

一方、より一般的には $m \neq l$, $n \neq n^q$, $N \neq n$ である。この場合は、(26) 式の評価を最小化する最適有限整定操作量を以下のよう求めることができる。

k を任意の整数とすると、 $N=n+k$ ($k \geq 1$) なる制御段数での有限整定応答を考える。前述と同様に、 N 段の操作量で有限整定したとすれば、 y_i ($i=N \sim 2n+k$) なる応答について整理すれば次式が得られる。

$$i_k^p = J_k u^p = J_k [u_0^{1p}, \dots, u_0^{mp}, \dots, u_n^{1p}, \dots, u_n^{mp}, \dots, u_N^{1p}, \dots, u_N^{mp}]^T \quad \dots \dots \dots (48)$$

ただし、 J_k, i_k^p は次式で与えられる。

$$J_k = \begin{bmatrix} \overleftarrow{\dots\dots\dots mk \dots\dots\dots} & \overleftarrow{\dots\dots\dots m(n+1) \dots\dots\dots} \\ G_n & G_{n-1} & \dots & G_n & G_{n-1} & \dots & G_1 & 0 \\ G_{N+1} & G_N & \dots & G_{n+1} & G_n & \dots & G_2 & H_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ G_{N+n-1} & \dots & \dots & G_{2n-1} & \dots & \dots & G_n & H_{n-1} \\ G_{N+n} & \dots & \dots & G_{2n} & \dots & \dots & G_{n+1} & H_n \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{matrix} \quad l(n+1) \quad \dots \dots \dots (49)$$

$$\begin{aligned}
 i_k^p &= [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \\
 &\quad l(n+1) \times 1 \quad \dots \dots \dots (50)
 \end{aligned}$$

また、(37) 式に対応して

$$\begin{aligned}
 i_k &= [1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1]^T \\
 &= \sum_{p=1}^l i_k^p = J_k u = J_k [u_0^1, \dots, u_0^m, \dots, u_n^1, \dots, u_n^m]^T \\
 &\quad \dots \dots \dots (51)
 \end{aligned}$$

が成立している。そこで、(51) 式から $J_k u - i_k = 0$ なる拘束条件の下で、(26) 式の評価を最小化する操作量をラグランジェの未定係数法を用いて求める。ラグランジェ関数

$$\begin{aligned}
 L &= P + \lambda^T (J_k u - i_k) \\
 &= \frac{1}{2} (i - Gu)^T Q (i - Gu) + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T (J_k u - i_k) \\
 &\quad \dots \dots \dots (52)
 \end{aligned}$$

において、 $\partial L / \partial u = 0, \partial L / \partial \lambda = 0$ から u を求めれば

$$\begin{aligned}
 u &= M^{-1} [G^T Q i - J_k^T [J_k M^{-1} J_k^T]^{-1} [J_k M^{-1} G^T Q i - i_k]] \\
 &= [u_0^1, \dots, u_0^m, \dots, u_n^1, \dots, u_n^m]^T \quad \dots \dots \dots (53)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここに、 λ はラグランジェ定数であり、 M, i は次式で表せる。

$$M = [R + G^T Q G] \quad \dots \dots \dots (54)$$

$$i = [1, \dots, 1]^T \quad l(N+1) \times 1 \quad \dots \dots \dots (55)$$

4. 最適有限整定応答サーボ系の設計

図3に示すように、直列積分+局部フィードバック制御による1型サーボ系を考え、 r を目標値、 e を偏差、 y を制御量、 H を零次ホールド回路とする。直列補償積分器を $D_1^{qp}(z)$ 、局部フィードバック制御装置を $D_2^{qp}(z)$ ($p=1 \sim l, q=1 \sim m$) とすれば最適有限整定操作量を直接用いてサーボ系は以下のように設計できる。

まず、ステップ状目標入力 $r^p=1$ に対し、出力 y^p ($p=1 \sim l$) を N 段で有限整定させる操作量は(53)式から得られ

$$\begin{aligned}
 u &= [u_0^1, \dots, u_0^m, \dots, u_n^1, \dots, u_n^m]^T \\
 &= \sum_{p=1}^l u^p = \sum_{p=1}^l [u_0^{1p}, \dots, u_0^{mp}, \dots, u_n^{1p}, \dots, u_n^{mp}]^T \\
 &\quad \dots \dots \dots (56)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、操作量 u^p から u_j^{qp} ($j=1, 2, \dots, N$) なる要素の操作量系列 $u(qp)$ を

$$u(qp) = \{u_0^{qp}, u_1^{qp}, \dots, u_N^{qp}, \dots, u_N^{qp}, \dots\} \quad (q=1, 2, \dots, m) \quad \dots \dots \dots (57)$$

とおけば、この $u(qp)$ が系に加わったとき、制御量が有限整定するまでの値 y_i ($i=1, \dots, N-1; y_0=0$) は(14)式から求められ、目標値 $r^p=1$ との偏差は次式となる。

$$e_i^p = 1 - y_i^p \quad (e_{N+j} = 0, j > 0) \quad \dots\dots\dots (58)$$

ここで、(58)式から、 l 組の偏差系列を次のように $\varepsilon(p)$ とおく。

$$\varepsilon(p) = \{e_0^p, e_1^p, \dots, e_{N+l}^p\} \quad \dots\dots\dots (59)$$

主ループの積分要素 $D_I^{qp}(z)$ のゲインを (53) 式の有限整定操作量の初段の値にとり

$$D_I^{qp}(z) = \frac{u_0^{qp}}{1 - z^{-1}} \quad \dots\dots\dots (60)$$

とする。 $D_I^{qp}(z)$ の入力系列は (59) 式と等しいから、その出力系列を W_j^{qp} とすれば、次式が得られる。

$$W_j^{qp} = u_0^{qp} \left\{ (j+1) - \sum_{i=1}^j y_i^p \right\} \quad (j=0, 1, \dots, N-1) \quad \dots\dots\dots (61)$$

一方、局部フィードバック要素 $D_F^{qp}(z)$ の入力系列 y^p に対する出力系列を V_j^{qp} とすれば、 $u_j^{qp} = W_j^{qp} - V_j^{qp}$ が成立しなければならない。従って、

$$V_j^{qp} = u_0^{qp} \left\{ (j+1) - \sum_{i=1}^j y_i^p \right\} - u_j^{qp} \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$V_{N+\beta}^{qp} = V_N^{qp} = u_0^{qp} \left\{ N - \sum_{i=1}^{N-1} y_i^p \right\} - u_N^{qp} \quad (\beta \geq 0) \quad \dots\dots\dots (63)$$

となり、この V_j^{qp} が $D_F^{qp}(z)$ の出力系列であればよい。以上のことから、局部フィードバック制御装置は、

$$D_F^{qp}(z) = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} V_j^{qp} z^{-j} + \frac{V_N^{qp} z^{-N}}{1 - z^{-1}}}{\sum_{i=1}^{N-1} y_i^p z^{-i} + \frac{z^{-N}}{1 - z^{-1}}} \quad \dots\dots\dots (64)$$

となる。この $D_I^{qp}(z)$, $D_F^{qp}(z)$ の出力 u_j^{qp} を低次の平滑回路を通して連続操作量 $u^q(t)$ とし、制御対象に加えることとなる。このように、 $D_I^{qp}(z)$, $D_F^{qp}(z)$ は目標値に対する操作量を用いて設計したが、同時にステップ状の外乱に対しても有限整定応答が得られる。

図3 サーボ系のブロック図

Fig. 3. Block diagram of the deadbeat servo system.

5. 数値例

2 入出力系 ($m=2, l=2$) について、本手法による連続時間最適有限整定応答制御系の設計法を示し、シミュレーション結果を検討する。

伝達関数行列 $G'(s)$ が次式で表される制御対象を考え、サンプル周期を $\theta=0.2\text{sec}$ とする。¹¹⁾

$$G'(s) = \begin{bmatrix} G'^{11}(s) & G'^{12}(s) \\ G'^{21}(s) & G'^{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{4(s+3)}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (65)$$

2つの入力端に前置する平滑要素を

$$G_\theta(s) = G_\theta^1(s) = G_\theta^2(s) = \frac{1}{1 + \theta s} \quad \dots\dots\dots (66)$$

なる一次遅れ要素とすれば、拡大系 $G(s)$ の要素 $G^{pq}(s)$ は

$$G^{pq}(s) = G_\theta^q(s) G'^{pq}(s) \quad (p=1 \sim l, q=1 \sim m) \quad \dots\dots\dots (67)$$

となり、 $n=3 (= \max n^{pq})$ である。ここで (53) 式の最適有限整定操作量を求めるため、制御段数を $N=4$ ($k=1$) とすれば、(49) 式の J_k は拡大系の各要素 $G^{pq}(s)$ のステップ応答から

$$J_k = \begin{bmatrix} G_4 & G_3 & G_2 & G_1 & 0 \\ G_5 & G_4 & G_3 & G_2 & H_1 \\ G_6 & G_5 & G_4 & G_3 & H_2 \\ G_7 & G_6 & G_5 & G_4 & H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.209 & -0.116 & 0.271 & -0.130 & 0.307 \\ 0.046 & 0.206 & 0.070 & 0.297 & 0.090 \\ 0.156 & -0.099 & 0.209 & -0.116 & 0.271 \\ 0.028 & 0.136 & 0.046 & 0.206 & 0.070 \\ 0.115 & -0.082 & 0.156 & -0.099 & 0.209 \\ 0.017 & 0.088 & 0.028 & 0.136 & 0.046 \\ 0.089 & -0.068 & 0.115 & -0.082 & 0.156 \\ 0.009 & 0.057 & 0.017 & 0.088 & 0.028 \\ -0.127 & 0.188 & -0.069 & 0 & 0 \\ 0.367 & 0.060 & 0.240 & 0 & 0 \\ -0.130 & 0.307 & -0.127 & 0.188 & -0.069 \\ 0.297 & 0.090 & 0.367 & 0.060 & 0.240 \\ -0.116 & 0.271 & -0.130 & 0.496 & -0.197 \\ 0.206 & 0.070 & 0.297 & 0.150 & 0.607 \\ -0.099 & 0.209 & -0.116 & 0.767 & -0.326 \\ 0.136 & 0.046 & 0.206 & 0.220 & 0.904 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (68)$$

となる。(50), (51), (55) 式から

$$\left. \begin{aligned} i_1^1 &= [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]^T & i_2^2 &= [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]^T \\ i_1 &= [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

であり、(26) 式の評価式の荷重行列 Q, R を各々単位行列に選べば最適有限整定操作量は (53) 式から

$$u^1 = [u_0^{11}, u_0^{21}, u_1^{11}, u_1^{21}, u_2^{11}, u_2^{21}, u_3^{11}, u_3^{21}, u_4^{11}, u_4^{21}]^T = [5.655, -0.772, 1.418, 0.123, -3.054, -0.050, 1.488, -0.145, 0.529, -0.117]^T \quad \dots\dots\dots (70)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^2 &= [u_0^{12}, u_0^{22}, u_1^{12}, u_1^{22}, u_2^{12}, u_2^{22}, u_3^{12}, u_3^{22}, u_4^{12}, u_4^{22}]^T \\ &= [0.629, 2.565, 0.5126, 1.311, 0.366, -0.670, 0.323, 0.872, 0.352, 0.588]^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_0^1, u_0^2, u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2, u_3^1, u_3^2, u_4^1, u_4^2]^T \\ &= [6.284, 1.793, 1.931, 1.434, -2.688, -0.721, 1.811, 0.726, 0.882, 0.471]^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (72)$$

となり、2出力 y^1, y^2 を4段でステップ状目標値に有限整定させる操作量 $\mathbf{u}$ が得られ、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2$ が成立している。

表1には、拡大系 $G(s)$ と制御対象 $G'(s)$ に対して評価関数の荷重行列を $Q=R=I$ と選んだ場合の最適有限整定操作量($N=4, \theta=0.2, 1.2$)を(53)式から求め示した。また、表2は $G'(s)$ の最短時間有限整定操作量を(44)式から求め表示している。なお、 $N \geq n$ なる任意の N に対し u_N は一定値をとり、サンプル周期や制御段数によって変化しないことから次数やデータ処理の確認に利用できる。また、制御段数と荷重行列を適当に選べば、応答波形の改善と操作量の制限に対処できることが解る。

次に、直列積分+局部フィードバック制御装置 $D_F^{pp}(z)$, $D_F^p(z)$ を $N=4, Q=R=I, \theta=0.2sec$ の場合について設計する。
拡大系の場合には、最適有限整定操作量 $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ は(70), (71)式で得られており(表1(a)), 積分要素 $D_F^{pp}(z)$ のゲインはこの操作量の初段の値にとればよく(60)式から

$$\left. \begin{aligned} D_I^{11}(z) &= \frac{5.655}{1-z^{-1}} & D_I^{12}(z) &= \frac{0.629}{1-z^{-1}} \\ D_I^{21}(z) &= \frac{-0.772}{1-z^{-1}} & D_I^{22}(z) &= \frac{2.565}{1-z^{-1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (73)$$

となる。また、(72)式の最適有限整定操作量 $\mathbf{u}$ に対する出力応答 y_i^1, y_i^2 は(18)式から得られるので、(63)式から V_j^{qp} を求め(64)式に代入すれば局部フィードバック要素 $D_F^{pp}(z)$ が求まり

$$\left. \begin{aligned} D_F^{11}(z) &= \frac{3.891 - 1.011z^{-1} - 6.950z^{-2} + 0.958z^{-3}}{1.061 + 0.906z^{-1} - 0.544z^{-2} - 0.426z^{-3}} \\ D_F^{12}(z) &= \frac{0.237 - 0.284z^{-1} - 0.171z^{-2} - 0.030z^{-3}}{0.808 + 0.876z^{-1} - 0.344z^{-2} - 0.340z^{-3}} \\ D_F^{21}(z) &= \frac{-0.848 + 0.922z^{-1} + 0.424z^{-2} - 0.028z^{-3}}{1.061 + 0.906z^{-1} - 0.544z^{-2} - 0.426z^{-3}} \\ D_F^{22}(z) &= \frac{1.746 + 0.226z^{-1} - 2.415z^{-2} + 0.284z^{-3}}{0.808 + 0.876z^{-1} - 0.344z^{-2} - 0.340z^{-3}} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

を得る。この $D_F^{pp}(z), D_F^p(z)$ を用いて図3のサーボ系を構成した場合のステップ状目標値変化($r^1=1.0, r^2=1.0$)に対するシミュレーション結果を図4(a)に示す。デジタルコントローラからの離散値出力 u_i^q が平滑要素 $G_b^q(s)$ に加わり連続操作量 $u^q(t)$ として制御対象に与えられている。

一方、制御対象 $G'(s)$ の最適有限整定操作量は表1(b)に示したが、 $N=4, Q=R=I$ なる同一条件での値を用いて前述と同様の $D_F^{pp}(z), D_F^p(z)$ を設計すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} D_I^{11}(z) &= \frac{2.189}{1-z^{-1}} & D_I^{12}(z) &= \frac{0.343}{1-z^{-1}} \\ D_I^{21}(z) &= \frac{-0.514}{1-z^{-1}} & D_I^{22}(z) &= \frac{1.074}{1-z^{-1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (75)$$

$$\left. \begin{aligned} D_F^{11}(z) &= \frac{0.048 - 0.759z^{-1} + 0.344z^{-2} - 0.984z^{-3}}{1.119 + 0.504z^{-1} + 0.010z^{-2} - 0.633z^{-3}} \\ D_F^{12}(z) &= \frac{0.098 - 0.120z^{-1} - 0.259z^{-2} + 0.066z^{-3}}{0.719 + 0.545z^{-1} + 0.351z^{-2} - 0.615z^{-3}} \\ D_F^{21}(z) &= \frac{-0.259 + 0.069z^{-1} + 0.538z^{-2} - 0.036z^{-3}}{1.119 + 0.504z^{-1} + 0.010z^{-2} - 0.633z^{-3}} \\ D_F^{22}(z) &= \frac{0.309 - 0.241z^{-1} + 0.067z^{-2} - 0.293z^{-3}}{0.719 + 0.545z^{-1} + 0.351z^{-2} - 0.615z^{-3}} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

これらのコントローラを用いて最適有限整定デジタル制御を行ったシミュレーション結果を図4(b)に示す。
さらに、表2に示した最短時間有限整定操作量を用いて同様に $D_F^{pp}(z), D_F^p(z)$ を設計し、有限整定デジタル制御を行った場合のシミュレーション結果を図4(c)に示す。

表1 目標値変化に対する最適有限整定操作量
Table 1. Deadbeat control signal for desired value.
(optimal control)

(a)	θ	j	u^{11}	u^{12}	u^1	u^{21}	u^{22}	u^2
			0	1	2	3	4	
$G(s)$	0.2	$Q=I$	5.6550	0.6290	6.2841	-0.7721	2.5646	1.7925
			1.4183	0.5126	1.9309	0.1233	1.3110	1.4342
			-3.0542	0.3660	-2.6882	-0.0508	-0.6702	-0.7210
			1.4876	0.3230	1.8106	-0.1457	0.8720	0.7263
	1.2	$R=I$	0.5294	0.3529	0.8824	-0.1176	0.5882	0.4706
			0.7434	0.3163	1.0598	-0.2575	0.6326	0.3752
			0.7230	0.4111	1.1341	-0.0862	0.7366	0.6504
			0.4667	0.3653	0.8320	-0.1196	0.5737	0.4541
	(k=1)	1.2	0.5310	0.3526	0.8835	-0.1176	0.5883	0.4707
			0.5294	0.3529	0.8824	-0.1176	0.5882	0.4706
			0.7434	0.3163	1.0598	-0.2575	0.6326	0.3752
			0.7230	0.4111	1.1341	-0.0862	0.7366	0.6504
(b)	0.2	$Q=I$	2.1890	0.3426	2.5316	-0.5142	1.0739	0.5597
			1.8807	0.3411	2.2218	-0.1934	1.0662	0.8728
			1.2753	0.3709	1.6463	0.0583	1.0236	1.0818
			-0.4548	0.4193	-0.0355	-0.1541	0.2956	0.1415
	1.2	$R=I$	0.5294	0.3529	0.8824	-0.1176	0.5882	0.4706
			0.4681	0.1967	0.6648	-0.1599	0.4331	0.2732
			0.4399	0.2333	0.6732	-0.1497	0.4092	0.2595
			0.5816	0.3440	0.9256	-0.1142	0.6079	0.4937
	(k=2)	1.2	0.5281	0.3533	0.8813	-0.1177	0.5881	0.4704
			0.5294	0.3529	0.8824	-0.1176	0.5882	0.4706
			0.4681	0.1967	0.6648	-0.1599	0.4331	0.2732
			0.4399	0.2333	0.6732	-0.1497	0.4092	0.2595

表2 目標値変化に対する最短有限整定操作量
Table 2. Deadbeat control signal for desired value.
(minimum-time control)

(c)	θ	j	u^{11}	u^{12}	u^1	u^{21}	u^{22}	u^2
			0	1	2	3	4	
$G'(s)$	0.2	(k=0)	7.1992	0.6848	7.8840	-0.6480	3.2402	2.5921
			-2.7776	0.4064	-2.3712	0.0775	-0.3877	-0.3101
			0.5294	0.3529	0.8824	-0.1176	0.5877	0.4706
	1.2	(k=0)	0.8209	0.3091	1.1300	-0.1305	0.6523	0.5218
			0.5219	0.3544	0.8763	-0.1175	0.5877	0.4702
			0.5294	0.3529	0.8824	-0.1176	0.5882	0.4706

図(c)の場合、最短時間のデジタル有限整定応答であり、応答はサンプル周期 θ で一意に定まり、操作量も大きく波形も非常にシャープである。図(b)の場合はデジタル最適有限整定の場合であり、(c)と同様に操作量は離散的な値をとっているが、応答波形の改善が行われている。図(a)は、提案した手法によるコンティニユアス有限整定制御の結果であり、平滑要素 $G_0(s)=1/(1+\theta s)$ を制御対象の入力端に前置している。(b)の場合と同じ制御段数 $N=4$ と荷重行列 $Q=R=I$ の場合であるが、応答波形がスムーズな形で改善されていて操作量も連続量 $u^q(t)$ として得られており、むだ時間を用いた時に生じる操作量の跳躍もない。また、(a)、(b)、(c)いずれの場合も 6θ の時点で2つの入力端に $d^1=1.0$ 、 $d^2=0.5$ のステップ状の外乱を加えたが、いずれも安定な制御が行われており、(a)の場合には応答、操作量ともに連続的な時間波形が得られている。

なお、(b)の外乱特性が少し悪いが、これは操作量を求めるとき(a)と同じ荷重行列 $Q=R=I$ を用いたためであり、(a)、(b)、(c)の操作量は表1、2から u_0^i についてみれば各々6.28, 2.53, 7.88なる値が得られており、(a)、(c)に比較して1/2~1/3位の操作量となっていることが原因である。 Q, R を適当に選んでもっと大きな操作量を許容すればさらに特性の改善が可能である。

ところで、コンティニユアスデッドビート制御の場合、制御対象に前置する平滑要素として一次遅れ要素 $G_0(s)=1/(1+\theta s)$ を与えたが、次数が低く製作の容易さ等を考えれば一次遅れ要素あるいは積分要素などが適当と思われる。

6. まとめ

多入出力系の入力端に低次の平滑要素を前置した拡大系に対して、直列積分+局部フィードバック型の有限整定応答デジタル制御装置によるサーボ系を構成し、コンティニユアスデッドビート制御を実現する手法を提案した。この方法によれば、従来の方法と異なりむだ時間要素を用いないことから制御系の構成が簡単である。また、これまで提案されている種々の最適有限整定応答デジタル制御装置の設計法が適用でき、過渡応答波形の改善や操作量の制限への対応が容易である。デジタル制御と連続時間制御の融和をはかった連続有限整定制御であり、全ての補償器をアナログで実現するという完全な意味でのコンティニユアスデッドビート制御ではないが、むだ時間要素を用いないという利点があり実用的な手法と思われる。

図4 コンティニユアス有限整定制御とデジタル有限整定制御の比較
(2入力-2出力系)

Fig. 4. Comparison of both the continuous deadbeat control and the digital deadbeat control.
(2 input-2 output system)

なお、多入出力系の出力フィードバックによるコンティニューアス有限整定制御を提案したが、今後は同様な制御構成での状態フィードバックによる手法を検討するつもりである。

(平成9年1月24日受付, 平成9年8月4日再受付)

文献

- (1) 黒沢:「コンティニューアスデッドビートコントロール」, 電気学会論文誌 D, 111-4, 289/295, 1991
- (2) 黒沢:「コンティニューアスデッドビートコントロールの設計」, 計測自動制御学会論文集 Vol. 28-6, 680/689, 1992
- (3) 延山・新・北森:「連続時間における有限整定サーボ系の設計」, 計測自動制御学会論文集 Vol. 28-10, 1201/1208, 1992
- (4) 加藤・舟橋:「デッドビート特性を有する連続時間コントローラ」, 計測自動制御学会論文集Vol. 32-5, 699/705, 1996
- (5) 瓜倉・長田:「過渡応答を考慮した離散時間システムに対するデッドビート制御」, 計測自動制御学会論文集Vol. 23-4, 353/357, 1987
- (6) 瓜倉:「連続時間過渡応答を考慮に入れたデッドビート制御」, システム制御情報学会論文集Vol. 5-6, 229/234, 1992
- (7) 西村・米沢:「緩和フィルタを用いる有限時間整定制御系の設計」, システム制御情報学会論文誌Vol. 4-10, 399/406, 1991
- (8) 西村・米沢・櫛田:「操作量飽和のある系に対する有限時間整定制御装置の設計」, 計測自動制御学会論文集Vol. 22-11, 1134/1141, 1986
- (9) 村田・相良・和田:「直列・フィードバック補償による有限整定応答制御装置の設計」, 計測自動制御学会論文集Vol. 20-10, 873/879, 1984
- (10) 村田・相良:「状態フィードバックによる最適有限整定制御系の設計」, 電気学会論文誌 C, 109-6, 432/438, 1989
- (11) 村田・相良:「インパルス応答を用いた多入出力系の有限整定応答デジタル制御装置の設計」, 電気学会論文誌 C, 108-8, 555/562, 1988

松島 優一

(学正員) 1974年8月20日生。1997年3月広島工業大学電子工学科卒業。同年広島工業大学大学院工学研究科博士前期課程電子工学専攻入学, 現在に至る。主として最適有限整定制御に関する研究に従事。

原田 義治

(正員) 1944年6月11日生。1967年3月広島工業大学電気工学科卒業。1970年4月同大学電気工学科勤務, 現在に至る。主としてサイリスタ回路と電気・機械系の制御に関する研究に従事。計測自動制御学会会員。

村田 弘志

(正員) 1941年2月2日生。1966年3月広島工業大学電子工学科卒業。1970年4月同大学講師, 助教授を経て, 同教授, 現在に至る。主として, 制御系の同定とプロセス制御に関する研究に従事。工学博士。計測自動制御学会, システム制御情報学会会員。