Wavelet 変換によるむだ時間と相対次数の同定

非会員 飯 星 洋 一 (筑波大学)

正 員 新 誠 一 (東京大学)

非会員 太 田 道 男 (筑波大学)

Detection of Dead Time and Relative Degree using Wavelet Transform

Iihoshi Yoichi, Non-member (University of Tsukuba), Shin Seiichi, Member (University of Tokyo),
Ohta Michio, Non-member (University of Tsukuba)

This paper proposes a novel estimation method of dead time and relative degree, in which wavelet transformation (WT) is applied to the step response of linear system with dead time. By wavelet analysis, it is found that the dead time is detected from the co-form point of WT iso-phase lines and the relative degree is calculated from scaling principle of WT. An example is given with simple numerical simulations on a 3rd order linear system.

キーワード：wavelet 変換，むだ時間，相対次数，自己相似性

1. はじめに

むだ時間は制御系の安定や性能に大きな影響を及ぼす重要なパラメータである⁽¹⁾。むだ時間が制御系の閉ループ内に存在すると，目標入力への追従性や外乱除去特性が劣化し，最悪の場合は安定性も損なわれる。また相対次数は，制御系設計の重要な要因である。

むだ時間や相対次数は，周波数応答の高域から同定できる。例えばボーデ線図の高周波数領域をみれば，位相の傾きからむだ時間がわかり，ゲインの傾きから相対次数がわかる。しかし，高周波数領域の測定は早いサンプリングと高い精度が必要であり，さらに雑音の影響も受けやすい。

そこで本論文では，雑音の影響が少なく，測定も容易な低周波数領域の情報（具体的にはステップ応答）を連続系 wavelet 変換⁽²⁾⁽³⁾により解析し，むだ時間と相対次数を同定する方法を提案する。またこの同定法が，バイアスなどの低周波雑音の影響を受けにくい事を示す。なお高周波雑音がある場合や一般の入出力に関するむだ時間の同定法については，入出力の相関を wavelet 変換する方法が有効なことを示している⁽⁴⁾⁽⁵⁾。本論文はこのような同定法の基礎理論を提供する物である。

2. ステップ応答の自己相似性

本論文では，1 入力 1 出力連続時間線形時不変なシステム

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t-L) \\ y(t) &= C^T x(t) \dots\dots\dots (1)\end{aligned}$$

を考える。ここで， $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$ 及び $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は，それぞれ制御入力，制御出力及び内部状態である。また， L をむだ時間とし便宜上 A は安定行列と仮定する。このとき，むだ時間後の入力 $u(t-L)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数の相対次数 m を次のように定義する。

$$m \equiv \min\{i | C^T A^{i-1} B \neq 0\}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

提案する同定法は，ステップ応答の自己相似性⁽²⁾という性質に着目している。これはステップ応答のむだ時間後の立ち上がり波形は，短い時間でみても長い時間でみても同じ形をしていると言う性質である（図 1）。

〔補題 1〕 相対次数が m である (1) において，ステップ応答 $y(t)$ はむだ時間 $t = L$ 後の立ち上がり近傍で

$$y_L(\lambda t) = \lambda^m y_L(t) \dots\dots\dots (3)$$

なる自己相似性をもつ。ただし

$$y_L(t) \equiv y(t+L) - y(L) \dots\dots\dots (4)$$

である。

証明

$$y_L(t) = \begin{cases} C^T e^{AL}(e^{At} - I)x(0) & t < 0 \\ C^T e^{AL}(e^{At} - I)x(0) \\ + \int_L^{t+L} C^T e^{A(t+L-\tau)} B d\tau & t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

であり， $x(0) = 0$ とすれば時刻 $t < 0$ の範囲で $y_L(\lambda t) = \lambda^m y(t) = 0$ であり (3) を満たすのは明らか。一方 $t \geq 0$ の範囲では

図1 ステップ応答の立ち上がりの自己相似性：外枠内の波形は内枠内の波形を λ^m 倍拡大したものと一致する。

Fig. 1. Self-similarity of step response: the response shape in the bigger frame is λ^m times as large as that in the smaller frame.

$$\begin{aligned} y_L(t) &= \int_L^{t+L} C^T e^{A(t+L-\tau)} B d\tau \\ &= \int_0^t C^T e^{A\zeta} B d\zeta \quad (t+L-\tau=\zeta) \\ &= \int_0^t \sum_{i=m-1}^{\infty} \frac{C^T A^i B \zeta^i}{i!} d\zeta \dots\dots\dots (6) \\ &\quad (\text{マクローリン展開}) \end{aligned}$$

と書ける。同様にして $y_L(\lambda t)$ も

$$\begin{aligned} y_L(\lambda t) &= \int_0^t \sum_{i=m-1}^{\infty} \frac{C^T A^i B \zeta^i \lambda^{i+1}}{i!} d\zeta \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

と書ける。このとき (6) (7) は $t \rightarrow 0_+$ で、近似的に

$$\begin{aligned} y_L(t) &\approx \int_0^t \frac{C^T A^{m-1} B \zeta^{m-1}}{(m-1)!} d\zeta \\ y_L(\lambda t) &\approx \int_0^t \frac{C^T A^{m-1} B \zeta^{m-1} \lambda^m}{(m-1)!} d\zeta \\ &= \lambda^m y_L(t) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる。 □

補題1の結果を簡単に言えば、むだ時間後の立ち上がりは t の m 次関数で近似できる事を述べている。このとき t の m 次関数は

$$f(\lambda t) = (\lambda t)^m = \lambda^m t^m = \lambda^m f(t) \dots\dots\dots (9)$$

なる自己相似性を満たすことから、むだ時間後の立ち上がりも同様に自己相似性 (3) を持つのである。ここで重要なのは、様々な時間スケール λ で (3) が成立すると言う事、すなわち、(3) が高周波数領域から低周波数領域までの広い周波数領域で成立する事である。このことから自己相似性の検出は、低い周波数からも可能である。

3. むだ時間および相対次数の同定

まず最初に連続系 wavelet 変換を定義し、次に自己相似性と連続系 wavelet 変換の関係であるスケーリング則について述べる。そして前節で述べたステップ応答の自己相似性 (3) とスケーリング則からむだ時間と相対次数が同定できる事を示す。なお以後は、連続系 wavelet 変換のことを単に wavelet 変換と呼ぶ。

信号 $s(t)$ の wavelet 変換 ⁽²⁾⁽³⁾ を以下のように定義する。

〔定義1〕 アドミッシブル条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \phi(t) dt = 0 \quad m = 0, 1, \dots, N > 0 \quad (10)$$

を満たし、時間及び周波数領域で局在する $\phi(t)$ を基本 wavelet 関数と呼ぶ。このとき wavelet 変換を

$$W_\phi s(b, a) \equiv \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) s(t) dt \dots\dots (11)$$

と定義する。
ただし $b \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}(a > 0)$ であり、*は複素共約とする。また (10) より、 $s(t)$ の N 次までのモーメントにたいし wavelet 変換の値は 0 となる。そこでこの N を基本 wavelet 関数のレギュラリティと呼ぶ。ここで wavelet 変換の基本性質について整理しておく。

(線形性) $\lambda \in \mathbb{R}$ にたいして、

$$\begin{aligned} W[\phi; s_1 + s_2] &= W[\phi; s_1] + W[\phi; s_2] \\ W[\phi; \lambda s(t)] &= \lambda W[\phi; s(t)] \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

を満足する。ただし $W[\phi; s] = W_\phi s(b, a)$ である。

(シフト (移動) とダイレーション (拡大) 則)

$$W[\phi; s(t - t_0)] = W_\phi s(b - t_0, a) \dots\dots\dots (13)$$

$$W[\phi; s(\lambda t)] = W_\phi s(\lambda b, \lambda a) \dots\dots\dots (14)$$

ただし、ここでは $\lambda > 0$ である。この基本性質から自己相似性を持つ信号と wavelet 変換の関係であるスケーリング則が導出される。

〔定理1〕 $s(t)$ が自己相似性

$$s(\lambda t + t_c) - C = \lambda^{D(t_c)} (s(t + t_c) - C) \dots (15)$$

を持てば、その信号の wavelet 変換には

$$W_\phi s(\lambda b + t_c, \lambda a) = \lambda^{D(t_c)} W_\phi s(b + t_c, a) \cdot (16)$$

というスケーリング則が成立する。

証明 (10) (12) より

$$\begin{aligned} &W[\phi; s(\lambda t + t_c) - C] \\ &= W[\phi; s(\lambda t + t_c)] - W[\phi; C] \\ &= W[\phi; s(\lambda t + t_c)] \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
& W[\phi; \lambda^{D(t_c)}(s(t+t_c) - C)] \\
&= \lambda^{D(t_c)}(W[\phi; s(t+t_c)] - W[\phi; C]) \\
&= \lambda^{D(t_c)}W[\phi; s(t+t_c)] \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

このとき (17)(18) は (15) によって

$$W[\phi; s(\lambda t + t_c)] = \lambda^{D(t_c)}W[\phi; s(t+t_c)] \dots\dots (19)$$

となる。そこで (13) (14) の関係をもちいて (19) の両辺をそれぞれ変形すると

$$W_\phi s(\lambda b + t_c, \lambda a) = \lambda^{D(t_c)}W_\phi s(b + t_c, a) \dots\dots (20)$$

となる。

スケーリング則 (16) は信号の自己相似性が wavelet 変換後も保存されることを示している。そこで次に wavelet 変換後の自己相似性を利用して、むだ時間と相対次数を検出する方法について述べる。

〈3・1〉 むだ時間の検出 補題 1 でステップ応答の立ち上がりが自己相似性を持つ事は既に示した。この結果よりステップ応答の wavelet 変換は次のスケーリング則を満足する。

$$W_\phi y(\lambda b + L, \lambda a) = \lambda^m W_\phi y(b + L, a) \dots\dots\dots (21)$$

ここで (21) の両辺の位相に着目すると λ が実数であることから

$$\arg W_\phi y(\lambda b + L, \lambda a) = \arg W_\phi y(b + L, a) \dots\dots (22)$$

となり、両辺の位相は λ の値にかかわらず一定であることがわかる。このとき、ある (b_0, a_0) と等位相な点の集合は、 λ を媒介変数とする

$$b = \lambda b_0 + L \quad a = \lambda a_0 \dots\dots\dots (23)$$

という直線の上に存在し、この直線は $\lambda \rightarrow 0$ で $(L, 0)$ に向かうことがわかる (図 2)。この結果、ステップ応答を wavelet 変換した時の等位相線の集中先からむだ時間の検出が出来る。また、ここまでは初期値 $x(0) = 0$ としたが、このむだ時間の同定方法は初期値の影響をほとんど受けない。なぜならば、初期値項

$$y_0(t) \equiv C^T e^{At} x(0) \dots\dots\dots (24)$$

と、応答項を

$$y_1(t) \equiv \begin{cases} 0 & t < L \\ \int_{t-L}^t C^T e^{A(t-\tau)} B d\tau & t \geq L \end{cases} \dots\dots (25)$$

とすれば $y_0(t)$ が連続であるのにたいして、 $y_1(t)$ は $t = L$ で m 階微分不連続である。一般に不連続点での wavelet 変換のゲインは、連続点でのゲインよりも大きく⁽³⁾

$$|W_\phi y_0(b, a)| \ll |W_\phi y_1(b, a)| \quad L - \epsilon < b < L + \epsilon \quad (26)$$

となるので、初期値をもつステップ応答 $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ の wavelet 変換は

$$\begin{aligned}
|W_\phi y(b, a)| &= |W_\phi y_0(b, a) + W_\phi y_1(b, a)| \\
&\approx |W_\phi y_1(b, a)| \quad L - \epsilon < b < L + \epsilon \quad (27)
\end{aligned}$$

のように初期値を持たない場合と、ほぼ同じとなる (図 3)。同様な事が低周波雑音についても言える。つまり $t = L$ 近傍で一定もしくは滑らかに変化する雑音 $n(t)$ の wavelet 変換は

$$|W_\phi y(b, a)| \ll |W_\phi n(b, a)| \quad L - \epsilon < b < L + \epsilon \quad (28)$$

となるので、低周波雑音が含まれていてもむだ時間の同定ができる。

〈3・2〉 相対次数の検出 スケーリング則 (21) のゲインを用いて相対次数も計算できる。

〔補題 2〕 相対次数 m はむだ時間近傍のゲインを用いて

図 2 自己相似性と等位相線：自己相似性 (3) が成立すれば、wavelet 変換の等位相直線の集中先は $b = L$ である。

Fig. 2. Self-similarity and iso-phase lines: if self-similarity (3) is satisfied, iso-phase lines converge on point L.

図 3 wavelet 変換の線形性： $W_\phi y_0(b, a)$ が小さければ、 $W_\phi y(b, a)$ と $W_\phi y_1(b, a)$ は、ほとんど同じである。

Fig. 3. Linearity of WT: if $W_\phi y_0(b, a)$ is very small, $W_\phi y(b, a)$ is almost the same as $W_\phi y_1(b, a)$.

$$m = \frac{\log|W_{\phi y}(\lambda b + L, \lambda a)/W_{\phi y}(b + L, a)|}{\log|\lambda|} \quad (29)$$

と表せる。

証明 (21) の両辺の log を取れば良い。 □

(29) の右辺には未知パラメータである L が含まれているが、 L は位相の集中先から検出できるので、相対次数も低周波数領域で計算可能である。

4. 数 値 例

数値実験では、相対次数 3 のシステム

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(5s + 1)(10s + 1)} \exp(-50s) \quad (30)$$

のステップ応答 (図 4) を wavelet 解析し、むだ時間と相対次数を同定した。ただし、ステップ応答のサンプリング時間は 0.1[sec.] であり、さらに低周波雑音として周期約 13[sec.] でゲインが変化する方形波を加えている。このステップ応答を wavelet 変換し、その位相を濃淡図で縦軸 (周期) a [sec.]、横軸 (時刻) b [sec.] に表したものが図 5 である。なお基本 wavelet 関数としてガボール関数

$$\phi_g(t) = \exp(-\frac{t^2}{2}) \exp(j5.5t) \dots\dots\dots (31)$$

を選んだ。この図では約 50[sec.] に集中する等位相直線が見られる。さて位相の集中先を計算する方法はいくつか考えられるが、ここでは単純に最小自乗による直線近似と、スケール方向の位相の分散を用いた方法でむだ時間を求めた結果だけを示す。まず直線近似について、(図 6) では 0.6[rad.] から 0.8[rad.] までの位相を取り出し、点線枠内の点を使って最小自乗法により、直線

$$a = -2.52366b + 127.164 \dots\dots\dots (32)$$

を求めた。この直線と b 軸との交点を計算したところ、むだ時間は約 50.4[sec.] と推定された。真値からの若干のずれがあるが、これは複数の等位相直線からむだ時間を求め、その平均をとることで改善されと考えられる。次に位相の分散を用いる方法について、スケール方向の位相分散は、(21) より、むだ時間において最小値 0 をとる。そこで、図 5 においてスケール方向に位相値の分散を計算してみると、図 7 を得た。この結果、むだ時間は 50.2[sec.] と推定された。

また相対次数は (29) ではなく、より単純に

$$m = \frac{\log|W_{\phi y}(b, \lambda a)/W_{\phi y}(b, a)|}{\log|\lambda|} \dots\dots\dots (33)$$

で計算した。(33) は $b = L$ で (29) と一致する。その結果を図 8 に示す。この時、むだ時間時刻では相対次数がそれぞれ 3.04, 3.05, 3.02[sec.] と真値 3 [sec.] に近い値をとることが確認できる。

5. お わ り に

ステップ応答の wavelet 変換により、むだ時間と相対次数を同定する方法を提案した。この方法はステップ応答の

図 4 低周波数雑音を含むステップ応答：サンプリング時間は 0.1[sec.]、下段はむだ時間 ($L=50$ [sec.]) 近傍の拡大図

Fig.4. Step response with low frequency noise: the sampling time is 0.1 [sec.] and the lower is magnification e around dead time ($L=50$ [sec.]).

図 5 ステップ応答の wavelet 変換：位相の濃淡図 (横 (時刻) 軸 b [sec.]、縦 (周期) 軸 a [sec.] $b = 50$ [sec.] 付近に位相の集中が見られる。

Fig.5. WT of the step response: contour plotting of WT phase (horizontal (time) axis b [sec.],vertical(period) axis a [sec.]) co-form point of iso-phase lines drops on $b=50$ [sec.].

自己相似性という、広い周波数範囲で成立する性質を利用している為に、測定が容易な低周波数領域でも同定ができる。また、この同定方法は低周波雑音にたいしてロバストであることを示し、数値実験により、この結果を確認した。

(平成 9 年 9 月 22 日受付、同 9 年 11 月 10 日再受付)

文 献

(1) 例えば 渡部 慶二: むだ時間システムの制御, 計測自動制御学会 (1993).
(2) M. Holschneider: *Wavelets An Anlysis Tool*; Calrendon Press Oxford (1995).
(3) 佐藤 雅昭: ウェーブレット理論の数学的基礎 [I][II], 日本音響学会

- 誌, Vol. 47, No. 6, pp. 405-422 (1991).
- (4) 田原 鉄也, 新 誠一: 相関データのウェーブレット解析に基づくむだ時間検出, 第35回計測自動制御学会学術講演会前刷, pp. 695-696 (1996).
- (5) K. Nakano, T. Tabaru, S. Shin, H. Mitsuo, Y. Toyoda and Y. Akiyama: Wavelet based identification for transfer function with dead time and its application, Proc. IFAC Symposium on System Identification, Vol. 1, pp. 51-56 (1997).

図6 等位相直線を用いたむだ時間の同定: 位相 $0.6[\text{rad.}]-0.8[\text{rad.}]$ だけを取り出し, 点線枠内から最小自乗法より等位相直線 (32) を導出した。むだ時間の推定値は約 $50.4[\text{sec.}]$ である。

Fig. 6. The dead time detection using iso-phase line: (32) is derived from least square approximation using phase points in the box $(0.6-0.8 [\text{rad.}])$. The dead time is estimated as about $50.4 [\text{sec.}]$

図7 位相値の分散を用いたむだ時間の同定: 横軸は時間, 縦軸 (対数軸) は位相の分散である。むだ時間の推定値は約 $50.2[\text{sec.}]$ である。

Fig. 7. The dead time detection using variance of phase: the horizontal axis shows time and the vertical axis shows variance of phase in log scale. The dead time is estimated as about $50.2 [\text{sec.}]$

図8 相対次数の計算: (33) により相対次数を計算, むだ時間時刻では $3.04, 3.05, 3.02[\text{sec.}]$ と真値 (3) に近い値をとる。

Fig. 8. Estimation of the relative degree: the relative degree is calculated from (33). In the neighbor of the dead time, the estimated degree become $3.04, 3.05, 3.02 [\text{sec.}]$.

飯 星 洋 一 (非会員) 1971 年 2 月 17 日生まれ。95 年筑波大学大学院理工学研究科修了。現在筑波大学大学院博士課程在学中。wavelet 変換によるシステム同定に関する研究に従事。

新 誠 一 (正員) 1954 年 5 月 8 日生まれ。80 年東京大学大学院工学系研究科修了。筑波大学電子・情報工学系助教授などを経て, 現在東京大学大学院工学系研究科計数工学先攻助教授。計測・制御を中心に理論, 応用研究に従事。

太 田 道 男 (非会員) 1964 年東京工業大学大学院理工学研究科修了。69 年工学博士。64 年東京工業大学理工学部制御工学科助手。現在筑波大学構造工学系教授, 工学システム学類担当。主として人間と機械の協調について研究し, 根本的な考え方を優愛工学としてまとめている。