近似逆システムを用いた多変数モデル追従制御系の一般化

正 員 加 瀬 渡 (大阪工業大学) 学 生 員 北 岡 央 之 (大阪工業大学)

Generalization of Multivariable Model Following Control Systems Using Approximate Inverse Systems

Wataru Kase, Member (Osaka Institute of Technology)

Nakayuki Kitaoka, Student member (Osaka Institute of Technology)

Recently, a design of model following control systems (MFCS) for discrete-time multivariable nonminimum phase systems is proposed using an approximate inverse systems. However, the method is not sufficient since the complexity of input-output relation is not considered. Moreover, the controller structures are not well defined. In this paper, we generalize the MFCS using an interactor matrix and clarify the structures of control systems.

キーワード：離散時間制御系，非最小位相系，モデル追従制御，近似逆システム，インタラクタ，スミス正準形

1. まえがき

モデルマッチング法に基づく制御系では，制御系の内部において極零相殺が行われるため，制御対象が不安定な零点を有する非最小位相系には用いることができない⁽¹⁾．ところが，連続時間システムを0次ホールドとサンプラを使って離散化する場合，得られる離散時間系では不安定な零点が生じる可能性があることが指摘されている⁽²⁾．そこで，非最小位相系でも任意のモデルの出力信号に追従することができる制御系の構成法が，特に離散時間系で研究されている．文献(3)では，多重サンプリング手法を用い，周期時変フィードバックをすることによって不安定零点を回避できることが示されている．しかし，この方法では，入力信号が振動的になりがちであり，実装にあたっては好ましくない場合があると思われる．また，文献(4)では，任意の精度でモデル出力に制御対象の出力を近づける方法が提案されている．ただし，この方法では精度を上げるためには規範モデルの伝達関数の相対次数を大きくする必要があり，やはり実装にあたっては現実的でないかも知れない．さらに，文献(6)では規範モデルに制御対象の不安定零点を付加する方法が紹介されている．この方法は，規範モデルに厳しい制限が課せられるため，必ずしも満足な応答が得られるとは限らない．

ところで，最近，制御対象の分子多項式の逆数を多項式で近似し，その近似された系に対してモデルマッチング法を適用する方法が提案されている⁽⁵⁾．この方法と上記文献(3)，(4)などの性能の比較をすることは興味深いことであるが，文献(5)では多変数系固有の入出力関係の複雑さを考慮していないため，制御器の実行可能性(プロパー性)が曖昧で，そのままでは比較の対象とならない．また，近似系に対

しての設計手順が非常に特殊な場合にしか適用できないと思われる．具体的には，文献(5)での設計方程式は，強安定化可能な制御対象⁽⁶⁾でしか解くことができず，仮に強安定化可能な制御対象であっても設計方程式において希望する特性をもつ解が存在するか否かはわからない．このような点から，文献(5)の結果を一般化することが必要である．

本論文では，入出力構造の複雑さに対処する方法としてよく使われるインタラクタ⁽⁷⁾を導入して文献(5)の結果を一般化する．制御器の構造を明確にするために，制御対象が左分解表現で与えられている場合と右分解表現の場合についてそれぞれ設計手順を示す．この方法は，近似系に対してモデルマッチング法を適用するだけで，制御対象が強安定化可能である必要はないし，設計方程式も分解表現の既約性にかかわらず常に可解である．さらに，近似逆システムの存在範囲を多項式行列のスミス正準形⁽⁸⁾を利用して拡張し，近似逆システムの次数の低減化および安定化可能領域の拡大を図る．安定化可能領域は，Diophantine方程式の解を巧く選ぶことによっても拡大することを考える．しかしながら，定性的にしか全系の安定性は言えないので，本論文では極配置法に基づく設計法を新たに提案する．なお，本論文では多項式行列に関する性質を頻繁に利用するので，必要な用語等については文献(8)を参照されたい．

2. 問題の設定と近似逆システムの設計

以下のような m 入出力線形離散時間系を考える．

$$y(t) = N(z)D^{-1}(z)u(t) = \tilde{D}^{-1}(z)\tilde{N}(z)u(t) \quad (1)$$

ここで、 $u(t)$, $y(t)$ は制御対象の入出力信号で、 z は時間進み演算子、 $N(z)$, $D(z)$, $\tilde{D}(z)$, $\tilde{N}(z)$ は z についての多項式行列であり、いずれも正則であるとする。また、制御対象は厳密にプロパーとし、 $D(z)$ は列プロパー、 $\tilde{D}(z)$ は行プロパーとする。つまり、

$$\begin{aligned} D(z) &= D_0 \text{diag}\{z^{\mu_i}\} + \text{低次数項} \\ N(z) &= N_0 \text{diag}\{z^{\mu_i-1}\} + \text{低次数項} \\ \tilde{D}(z) &= \text{diag}\{z^{\nu_i}\} \tilde{D}_0 + \text{低次数項} \\ \tilde{N}(z) &= \text{diag}\{z^{\nu_i-1}\} \tilde{N}_0 + \text{低次数項} \\ \text{diag}\{z^{\mu_i}\} &= \begin{bmatrix} z^{\mu_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{\mu_m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書いて、定数行列 D_0 , $\tilde{D}_0$ は正則であるとする。

制御目的は $y(t)$ が規範モデル $G_M(z)$ の出力信号 $y_M(t)$ に近づくように $u(t)$ を発生させることである。ただし、規範モデルは以下で説明する近似逆システムの次数にしたがって設計される。

z^{-1} についての多項式行列 $B(z^{-1})$ を

$$B(z^{-1}) = B_0 + z^{-1}B_1 + \cdots + z^{-\nu}B_\nu$$

とし、この係数行列を利用して

$$B = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_\nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_0 & \cdots & B_{\nu-1} & B_\nu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_0 & B_1 & \cdots & B_\nu \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\in \mathbf{R}^{m(k+1) \times m(k+\nu+1)}$

と定義する。ただし、 k は設計者が与える正の整数である。このとき、係数行列 Q_i をつぎのように設定する。

$$\begin{aligned} Q_i &= E_i B^T (B B^T)^{-1}, \\ E_i &= \begin{bmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{m_i} & I & \underbrace{0 \cdots 0}_{m(k+\nu-i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

この Q_i は、

$$\Delta_i := E_i - Q_i B \quad (4)$$

としたとき、 $\|\Delta_i\|$ の値を最小にすることが知られている⁽⁸⁾。ただし、行列 A に対するノルム $\|A\| := \{\text{trace}(A^T A)\}^{1/2}$ とする。

つぎに、正の整数 L を次式によって定義する。

$$L := \min_{0 \leq i \leq k+\nu} \|E_i - E_i B^T (B B^T)^{-1} B\| \quad (5)$$

さらに、単項式行列 $S_L^k(z^{-1})$ を

$$S_L^k(z^{-1}) = [I \ z^{-1}I \ \cdots \ z^{-k}I]^T \quad (6)$$

として、(4) 式の両辺に右から $S_L^{\nu+k}(z^{-1})$ を乗じ、 $i = L$ とすると、

$$\begin{aligned} Q_L(z^{-1})B(z^{-1}) + \Delta_L(z^{-1}) &= z^{-L}I, \\ Q_L(z^{-1}) &= Q_L S_L^k(z^{-1}), \\ \Delta_L(z^{-1}) &= \Delta_L S_L^{\nu+k}(z^{-1}) \end{aligned} \quad (7)$$

が成立する。ここで、 Δ_L は与えられた k に対して、できるだけ小さくなるように選ばれているので、適切な k の値に対しては Δ_L は近似的に 0 である。このとき、 $\Delta_L(z^{-1})$ も近似的に零行列であるから、(7) 式から $Q_L(z^{-1})B(z^{-1})$ は近似的に $z^{-L}I$ に等しい。以上から、 $Q_L(z^{-1})$ を $B(z^{-1})$ に対する左近似逆システムと呼ぶことにしよう。なお、(3) 式における $B B^T$ の正則性は以下のように証明できる。 $B(z^{-1})$ が正則であれば、 $[B_0 \ \cdots \ B_\nu]$ は行フルランクである。このことから、 B も行フルランクとなり、 $B B^T$ は正則である。文献(5)では、 $B_0, \dots, B_\nu$ の何れかが正則であれば B が行フルランクであることが示されているが、例えば $B(z^{-1}) = \text{diag}\{z^{-1}, z^{-2}\}$ を考えれば明らかに B_0, B_1, B_2 は非正則で、必要十分な証明になっていないので、ここで改めて証明を与えた。上述の近似逆システムの設計は、 $B(e^{j\omega})Q_L(e^{j\omega})$ の振幅特性が I 、群遅延が L となるような一種のフィルタ $Q_L(e^{j\omega})$ を求めることを意味している⁽¹⁰⁾。

さて、上述のように近似逆システムを設定すると、 $k+\nu+1$ 通りの候補の中から最適なものを選ぶことになる。ここでは、 k の値の低減化とロバスト性の向上を期待して、最大 $m(k+\nu+1)$ 通りの候補の中から最適なものを選ぶ方法を考えよう。いま、 $\tilde{N}(z)$ のスミス正準形を $S(z)$ として、

$$\tilde{N}(z) = U(z)S(z)V(z) \quad (8)$$

としよう。ただし、 $U(z)$, $V(z)$ は $\tilde{N}(z)$ を $S(z)$ に変換するためのユニモジュラ行列である⁽⁸⁾。また、 $S(z)$ の対角成分を $s_i(z)$ として、

$$s_i(z) = s_i^s(z)s_i^a(z) \quad (9)$$

と因数分解する。ここで、 $s_i^s(z)$ は漸近安定なモニック多項式、 $s_i^a(z)$ は反安定な⁽⁶⁾モニック多項式とする。 $s_i^a(z)$ の近似逆システム $q_i(z)$ を

$$q_i(z) = q_{i0} + q_{i1}z + \cdots + q_{ik}z^k \quad (10)$$

と定義して、

$$q_i(z)s_i^a(z) = z^{l_i} + \delta_i(z) \quad (11)$$

と書くことにしよう。上式は、進み演算子 z についての表現となっているが、 z を z^{-1} と読み替えることで $Q_L(z^{-1})$ の求め方と全く同様に $q_i(z)$ の係数や非負整数 l_i を求めることができる。なお、整数 $l_i \geq 0$ の上限は後に述べる。また、 $q_i(z)$ を選ぶ上で、安定な多項式 $s_i^s(z)$ や行列の非対角成分の近似が入らない分、近似精度の向上が期待できる。また、 i が小さいときには $s_i(z) = 1$ となるのが期待できるので⁽⁸⁾、そのような場合には $l_i = 0$, $q_i(z) = 1$ とすればよく、本質的な近似計算の量が少なくなることも期待できる。いま、

$$Q_L(z) := \text{diag}\{q_i(z)\}U^{-1}(z) \quad (12)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} Q_L(z)\tilde{N}(z) &= \text{diag}\{q_i(z)\}S(z)V(z) \\ &= \text{diag}\{(z^{l_i} + \delta_i(z))s_i^s(z)\}V(z) \end{aligned} \quad (13)$$

なる関係が成立する。なお、ユニモジュラ行列の逆行列もユニモジュラ行列となることに注意しておこう。

さて、以上のように $Q_L(z)$ を定義し、

$$\begin{aligned}\tilde{D}_a(z) &:= Q_L(z)\tilde{D}(z), \\ \tilde{N}_a(z) &:= \text{diag}\{z^{l_i}s_i^q(z)\}V(z)\end{aligned}\quad (14)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{-1}(z)\tilde{N}(z) &= [Q_L(z)\tilde{D}(z)]^{-1}Q_L(z)\tilde{N}(z) \\ &= \tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z) + \tilde{D}_a^{-1}(z)\text{diag}\{\delta_i(z)s_i^q(z)\}V(z)\end{aligned}\quad (15)$$

となる。 $\delta_i(z)$ は近似的に 0 なので、以下では制御対象を $\tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z)$ (これを $G(z)$ の近似システムと呼ぶ) と近似して議論する。ただし、近似システム $\tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z)$ は厳密にプロパーであるとする。逆に、そうなるように (11) 式の l_i を定めなくてはならない。また、 $\tilde{D}_a(z)$ は一般性を失うことなく、行プロパーであると仮定する⁽⁸⁾。この仮定は、次章で示す設計方程式を解く上では都合がよい。

上記の近似システムに対するインタラクタ $\xi(z)$ とは、以下の関係を満足する正則多項式行列である⁽⁷⁾。

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)\tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z) = K \text{ (正則)} \quad (16)$$

ただし、 $\det \xi(z)$ は漸近安定多項式となるように選ぶ。近似システムが厳密にプロパーであることから、 $\xi(z)$ の行次数は必ず 1 以上となることに注意しよう。このとき、規範モデル $G_M(z)$ は $\xi(z)G_M(z)$ がプロパーとなる範囲で任意に選べる。

3. 左分解表現に基づく設計法

前章で設計した行プロパー行列 $\tilde{D}_a(z)$ の行次数を $\bar{\nu}_i$ とし、

$$\bar{\nu} = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{\nu}_i \quad (17)$$

と定義する。 $H(z)$ を $\det H(z)$ が漸近安定多項式で、かつ行次数が $\bar{\nu}-1$ の行プロパー多項式行列とする。 $\det H(z)$ の零点は、状態オブザーバの極と一致することが知られており⁽¹⁾、したがって、その値は閉ループ系で指定される極 ($\det \xi(z)$, $\det \tilde{N}_a(z)$ の零点) よりも絶対値の意味で若干小さめに選ばれる。

このとき、次式を満たす多項式行列 $X(z)$, $Y(z)$ を考えよう。

$$\begin{aligned}H(z)K^{-1}\xi(z) &= X(z)\tilde{D}_a(z) + Y(z) \\ \deg Y(z) &< \deg \tilde{D}_a(z) = \bar{\nu}\end{aligned}\quad (18)$$

なお、多項式行列の次数の定義は文献 (8) を参照されたい。この関係式は、多項式行列の剰余定理と呼ばれるもので、上式を満たす多項式行列 $X(z)$, $Y(z)$ は一意に存在することが知られている⁽⁸⁾。文献 (5) の (6) 式が (18) 式に相当するものであるが、そこでは上式の商にあたる $X(z)$ が与えられており、しかも多項式であるとされている。その場合に $\deg Y(z) < \bar{\nu}$ となる解が存在する保証はない。したがって、後

に述べるように制御器の実行可能性、すなわち $y(t)$ の未来値を使うことなく $u(t)$ を発生できる保証はない。

さて、(18) 式を満たす $X(z)$, $Y(z)$ を用いて、制御入力を以下のように合成する。

$$\begin{aligned}u(t) &= [X(z)\tilde{N}_a(z)]^{-1}[H(z)K^{-1}\xi(z)G_M(z)v(t) \\ &\quad - Y(z)y(t)]\end{aligned}\quad (19)$$

ただし、 $v(t)$ は基準入力である。また、以下のように制御器を設定しよう。

$$\begin{aligned}C_f(z) &= [X(z)\tilde{N}_a(z)]^{-1}H(z)K^{-1}\xi(z)G_M(z) \\ C_b(z) &= [X(z)\tilde{N}_a(z)]^{-1}Y(z)\end{aligned}$$

(19) 式も文献 (5) の (7) 式に相当する式であるが、文献 (5) では $X(z)$ が漸近安定多項式となっている。このことは、フィードバック制御器 $C_b(z)$ が安定であることを意味している。フィードバック制御系が安定な制御器によって安定化できるか否かという問題は、強安定化問題と呼ばれ、そのような制御器が存在する必要十分条件は制御対象の極と零の間に p.i.p. 条件が成立することと報告されている⁽⁶⁾。したがって、文献 (5) の方法は p.i.p. 条件が成立するときのみ適用可能となる。もっとも、(19) 式を図 1 に示すように構成するならば $X(z)$ が安定でなければフィードフォワード制御器 $C_f(z)$ が不安定であるので、図 1 のように制御系を構成すると、(19) 式の実行は不可能である。しかし、このことは 2 自由度制御系の理論⁽⁶⁾から構成法に気をつければ実は実行可能であることが示される。

図 1 近似システムに対する制御系
Fig.1 Control system for approximate systems

さて、本論文のように $\xi(z)$ や $Y(z)$ の次数の制限を定めたのは、(19) 式の実行可能性を保証するためである。すなわち、(18) 式より、

$$\begin{aligned}K^{-1}\xi(z)\tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z) \\ = [H^{-1}(z)X(z) + H^{-1}(z)Y(z)\tilde{D}_a^{-1}(z)]\tilde{N}_a(z)\end{aligned}\quad (20)$$

であり、 $z \rightarrow \infty$ のとき、上式左辺は (16) 式より I に収束する。また、近似システムは厳密にプロパーであることから、 $\tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z)$ は 0 に収束する。さらに、 $H(z)$ の次数設定と (18) 式から $H^{-1}(z)Y(z)$ はプロパーである。よって、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H^{-1}(z)X(z)\tilde{N}_a(z) = I \quad (21)$$

となり、当然、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [X(z)\tilde{N}_a(z)]^{-1}H(z) = I \quad (22)$$

が成立する。上式と $\xi(z)G_M(z)$ がプロパーであることから、 $C_f(z)$ はプロパーとなる。また、 $H^{-1}(z)Y(z)$ がプロパーであることから、

$$\begin{aligned} [X(z)\tilde{N}_a(z)]^{-1}H(z) \cdot H^{-1}(z)Y(z) \\ = [X(z)\tilde{N}_a(z)]^{-1}Y(z) = C_b(z) \end{aligned} \quad (23)$$

もプロパーである。したがって、(19) 式の実行可能性が示された。

なお、

$$Z(z) := X(z)\tilde{N}_a(z) - H(z) \quad (24)$$

と定義すると、(21) 式が成立することから $H^{-1}(z)Z(z)$ は厳密にプロパーである。また、この $Z(z)$ を用いると、(19) 式は

$$\begin{aligned} u(t) = K^{-1}\xi(z)G_M(z)v(t) - H^{-1}(z)Z(z)u(t) \\ - H^{-1}(z)Y(z)y(t) \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここで、 $H^{-1}(z)Z(z)$ は厳密にプロパーなので、時刻 t における $u(t)$ を決める上では $u(t-1)$ などの入力過去の信号を利用するだけで (25) 式は実行できる。すなわち、(25) 式に基づいて図 2 のように制御系を構成すればよい。

図 2 実行可能な制御系
Fig.2 Admissible control system

4. 右分解表現に基づく設計法と安定解析

(18), (24) 式から

$$\begin{aligned} X(z)\tilde{D}_a(z) &= H(z)K^{-1}\xi(z) - Y(z) \\ X(z)\tilde{N}_a(z) &= H(z) + Z(z) \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる。ここで、 $X(z)$ は (21) 式から正則である。 $N_a(z)Q_R^{-1}(z)$ を $\tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z)D(z)$ の右既約分解と定義し、

$$D_a(z) := D(z)Q_R(z) \quad (27)$$

と定義すると、

$$\tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z) = N_a(z)D_a^{-1}(z) \quad (28)$$

が成立する。つまり、 $N_a(z)D_a^{-1}(z)$ は $G(z)$ の近似システムとなっている。また、一般性を失うことなく $D_a(z)$ は列プロパーと仮定する。さて、(26) 式から、

$$\begin{aligned} [X(z)\tilde{D}_a(z)]^{-1}X(z)\tilde{N}_a(z) &= \tilde{D}_a^{-1}(z)\tilde{N}_a(z) \\ &= [H(z)K^{-1}\xi(z) - Y(z)]^{-1}[H(z) + Z(z)] \end{aligned} \quad (29)$$

よって、上式と (28) 式から以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} Z(z)D_a(z) + Y(z)N_a(z) \\ = H(z)[K^{-1}\xi(z)N_a(z) - D_a(z)] \end{aligned} \quad (30)$$

上式は Diophantine 方程式と呼ばれる多項式行列方程式で、この方程式の解法は多数提案されているが、後の安定解析とも関係する 1 つの方法を示しておこう。証明は文献 (9) を参照されたい。 $N_a(z)D_a^{-1}(z)$ の任意の最小実現を (A, B, C) とする。 Y を $Y(z) = YS_I^{\bar{p}-1}(z)$ を満たす実行列としたとき、 Y は次式の関係を満たす。

$$Y\mathcal{O}_{\bar{p}-1} = F\mathcal{O}_p \quad (31)$$

ただし、

$$\mathcal{O}_{\bar{p}-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\bar{p}-1} \end{bmatrix}, \quad S_I^{\bar{p}-1} = \begin{bmatrix} I \\ zI \\ \vdots \\ z^{\bar{p}-1}I \end{bmatrix}$$

であり、 $p = \deg H(z)K^{-1}\xi(z)$ 、 F は $H(z)K^{-1}\xi(z) = FS_I^p(z)$ を満たす実行列である。このとき、 $Z(z)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z(z) &= (FT_I - YT)S_I^{\bar{p}-2}(z) \\ T_I &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & I & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\bar{p}-2}B & CA^{\bar{p}-3}B & CA^{\bar{p}-4}B & \cdots & I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^pB & CA^{p-1}B & CA^{p-2}B & \cdots & CAB \end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\bar{p}-1}B & CA^{\bar{p}-2}B & \cdots & CAB \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

いま、

$$\Delta(z) := N(z)Q_R(z) - N_a(z) \quad (33)$$

とすると、閉ループ系は

$$\begin{aligned} y(t) &= N(z)Q_R(z)[H(z)K^{-1}\xi(z)N_a(z) + Y(z)\Delta(z)]^{-1} \\ &\quad \times H(z)K^{-1}\xi(z)G_M(z)v(t) \end{aligned} \quad (34)$$

となる。もちろん、 $\Delta(z) = 0$ かつ $\det N(z)Q_R(z)$ が漸近安定多項式のときは $y(t) = G_M(z)v(t)$ となる。しかしながら、ここでは $\Delta(z) \neq 0$ なので、閉ループ系が安定である保証はない。ただし、2 章に示しているように、 $\Delta(z)$ が十分に零行列に近くなるように設計しているので、全系が安定となる可能性がある。

ところで、 $Y(z)\Delta(z)$ が零行列に近ければ安定となる可能性が高いので、 $Y(z)$ の係数行列 Y が (31) 式の拘束条件の下で小さくなれば全系が安定となる可能性がさらに高まると思われる。そこで、 $\mathcal{O}_{\bar{p}-1}$ の疑似逆行列を用いて、

$$Y = F \mathcal{O}_p (\mathcal{O}_{\bar{p}-1}^T \mathcal{O}_{\bar{p}-1})^{-1} \mathcal{O}_{\bar{p}-1}^T \quad (35)$$

とすれば、 $\|Y\|$ は最小となる⁽⁸⁾。ここで、 $\mathcal{O}_{\bar{p}-1}$ は可観測行列であり、最小実現を仮定しているため列フルランクである。したがって、 $\mathcal{O}_{\bar{p}-1}^T \mathcal{O}_{\bar{p}-1}$ は正則である。

何れにしても、近似システムに対してモデルマッチング法を適用しても定性的に全系が漸近安定となるだろうという推察以上のことは得られない。そこで、次章では閉ループ系の漸近安定性を確保するために極配置手法を用いる。

5. 極配置に基づく設計

ここでは、(1)式に対してまず、極配置を行って閉ループ系の安定性を保証した後、近似逆システムを前置補償器として使って追従特性を付加させる方法を提案する。そこで、以下では $D(z)$ と $N(z)$ は右既約であると仮定する。このとき、 $D_c(z)$ 、 $N_c(z)$ を解とする以下の Diophantine 方程式を考える。

$$D_c(z)D(z) + N_c(z)N(z) = H(z)[D_*(z) - D(z)] \quad (36)$$

ここで、 $D_*(z)$ は $m \times m$ の $D(z)$ と同じ列次数をもつ多項式行列であり、その列最高次係数行列は D_0 で、 $\det D_*(z)$ は漸近安定多項式に設定する。また、 $H(z)$ は $\nu - 1$ 次 ($\nu := \max_{1 \leq i \leq m} \nu_i$) の行プロパーな行列で、 $\det H(z)$ は漸近安定多項式に設定する。

図3 極配置制御器と前置補償器を使った制御系
Fig.3 Control system with pole assignment controller and pre-compensator

このとき、

$$u(t) = r(t) - H^{-1}(z)D_c(z)u(t) - H^{-1}(z)N_c(z)y(t) \quad (37)$$

と入力が発生させると、図3に示す $r(t)$ から $y(t)$ までの入出力関係は

$$y(t) = N(z)D_*^{-1}(z)r(t) \quad (38)$$

となり、閉ループ系の安定性は保証される⁽¹⁾。

つぎに、 $N(z)$ に対する近似を考える。 $N(z)$ のスミス正準形を $A(z)$ とし、

$$N(z) = U_r(z)A(z)V_r(z), \\ A(z) = \text{diag}\{\lambda_i(z)\} = \text{diag}\{\lambda_i^s(z)\lambda_i^a(z)\},$$

とする。ただし、 $U_r(z)$ 、 $V_r(z)$ はユニモジュラ行列で、 $\lambda_i^s(z)$ は漸近安定、 $\lambda_i^a(z)$ は反安定なともにモニック多項式である。 $r_i(z)$ を $\lambda_i^a(z)$ の近似逆システムとして、

$$r_i(z)\lambda_i^a(z) = z^{d_i} + \delta_{r_i}(z)$$

とする。このとき、

$$Q_r(z) = V_r^{-1} \text{diag}\{r_i(z)\}, \\ N_r(z) = U_r(z) \text{diag}\{z^{d_i} \lambda_i^s(z)\} \quad (39)$$

とする。

前置補償器 $C_{pre}(z)$ を以下のように設計する。

$$C_{pre}(z) = D_*(z)Q_r(z)N_r^{-1}(z)G_M(z) \quad (40)$$

ただし、 $C_{pre}(z)$ がプロパーとなるように規範モデルの伝達関数行列 $G_M(z)$ が設計されているものとする。このとき、基準入力 $v(t)$ から制御対象の出力 $y(t)$ までの入出力関係は

$$y(t) = N(z)D_*^{-1}(z)D_*(z)Q_r(z)N_r^{-1}(z)G_M(z)v(t) \\ = [I + U_r(z) \text{diag}\{z^{-d_i} \delta_{r_i}(z)\} U_r^{-1}(z)] G_M(z) v(t)$$

となる。ここで、 $y_M(t) := G_M(z)v(t)$ とし、

$$U_r(z) \text{diag}\{z^{-d_i} \delta_{r_i}(z)\} U_r^{-1}(z) \\ = z^\mu U_\mu + \dots + U_0 + \dots + z^{-d} U_{-d}$$

とすると、出力誤差 $e(t) = y(t) - y_M(t)$ のノルムの上限は、

$$\|e(t)\| = \|U_r(z) \text{diag}\{z^{-d_i} \delta_{r_i}(z)\} U_r^{-1}(z) y_M(t)\| \\ = \|U_\mu y_M(t + \mu) + \dots + U_{-d} y_M(t - d)\| \\ \leq \sqrt{\mu + d + 1} \|U_\mu \dots U_{-d}\| \max_{0 \leq \tau \leq t + \mu} \|y_M(\tau)\|$$

となる。 $U_r(z)$ は $\delta_{r_i}(z)$ の選び方に係わらずに決まるので、出力誤差のノルムは $\delta_{r_i}(z)$ の選び方のみに依存する。 $r_i(z)$ の次数を大きく設定することで $\delta_{r_i}(z)$ の各次数の係数は0に近づくので、設計者が設定する許容誤差の絶対値に基づいて、 $r_i(z)$ の次数を定めればよい。

6. 数値例

ここでは、近似逆システムの選び方に依存することなく全系の安定性の保証ができる前章の制御系に対してのみ考えることとしよう。簡単のため、既に極配置がなされているとして、以下のような制御対象を考える。

$$y(t) = \begin{bmatrix} z + 0.3 & 0 \\ -z - 0.3 & 2z - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}^{-1} u(t) \\ = z^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z + 0.3 & 0 \\ 0 & z - 2 \end{bmatrix} u(t)$$

この場合、零点は -0.3 と 2 であり、非最小位相系である。この場合の文献(5)の近似逆システムの設計では、 $k = 4$ のとき、

$$Q_o = \begin{bmatrix} -0.2730 & 0 & 0.9919 & 0 & 0.0024 & 0 \\ -0.0007 & -0.0007 & 0.0018 & 0.0018 & 0.2462 & 0.2462 \\ -0.0007 & 0 & 0.0002 & 0 & & \\ -0.1172 & -0.1172 & 0.0469 & 0.0469 & & \end{bmatrix}$$

図4 不安定零点補償のシミュレーション結果
Fig.4 Simulation result of compensator for unstable zeros

である。一方、本論文で提案した設計では、 $s_2^a(z) = z + 2$ に対して、

$$q_2(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32}$$

となり、

$$C_{pre}(z) = z^2 \begin{bmatrix} (z + 0.3)^{-1} & 0 \\ 0 & q_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} G_M(z)$$

である。上記2通りの不安定零点補償器を用いた場合の出力誤差のシミュレーション結果を図4に示す。ただし、簡単のため、ここでは規範モデルを与えるのではなく、規範出力 $y_M(t)$ を

$$y_M(t) = \begin{bmatrix} \sin(\pi t/5) \\ \cos(\pi t/10) \end{bmatrix}$$

と与え、 $y_M(t)$ の未来値は利用できるものとした。図中、本論文で提案した補償法による結果は実線で示しており、文献(5)の方法は破線で示している。本論文の手法では、1番目の出力に関しては追従誤差が全く生じない。また、2番目の出力に関しても文献(5)に比べてよくなっていると思われる。ここでは示していないが、入力も有限になっている。以上から、極配置を前提とした場合の本手法の有効性が検証された。

7. あとがき

本論文では、文献(5)で提案されている非最小位相系に対するモデル追従制御系の拡張を考えた。近似逆システムの導出に関しては、スミス正準形を利用して安定な零点と不安定な零点に分離し、近似精度よくすることを考えた。このことにより、モデルマッチング法に基づいてフィードバックループを構成する際のロバスト性の向上が期待できる。また、Diophantine方程式の解を巧く選ぶことにより、ロバスト性の向上が期待できることも指摘した。しかしながら、モデルマッチングに基づく設計では、定性的な議論でしかないため、全系の安定性を保証した極配置制御と前置補償器を併用した設計法を提案した。

なお、安定な零点と不安定な零点に分離する方法としては、余因子行列を利用する方法⁽⁴⁾やインナアウト分解を利用する方法⁽⁶⁾などが考えられる。本論文でスミス正準形を採用した理由は、2章に記した通りであるが、いくつか短所もある。すなわち、計算が一般に大変であること、また、近似と制御性能の評価が定量的には結びついていないことなどが挙げられる。極配置に基づく方法では、ある程度の評価は可能であるが、評価の中に $U_r(z)$ が含まれているために直接的に結びついているとはいえない。この点に関しては、今後の課題としたい。

本論文の動機となった文献(5)は適応制御についても言及されている。ここ提案した方法では、オンライン的にスミス正準形を求める必要があるなど適応制御に拡張するにはかなり無理が生じると思われるが、文献(4)に示す方法により応用は可能であると考えられる。また、本論文では、近似逆システム自身の構成法にはあまり立ち入った議論をしなかった。これは、規範モデルの出力信号は任意であり、周波数の偏りが存在しないという立場からの設計を考えたからである。信号に偏りが存在する場合の最適な近似逆システムの設計に関しては文献(10)を参照されたい。

(平成9年4月14日 受付, 同年12月15日 再受付)

文 献

- (1) 市川邦彦: 制御系の設計理論, 技術書院 (平元)
- (2) K.J. Åström, P. Hagander and J. Sternby: "Zeros of Samples Systems", *Automatica*, **20**, 31~38 (1984-1)
- (3) 宮里義彦: 「周期時変フィードバックによる適応制御」, 計自論, **27**, 1244~1250 (1991)
- (4) K. Tamura, W. Kase and P.N. Nikiforuk: "Discrete-Time Model Following Adaptive Control for Multivariable Non-minimum Phase Systems", *Int. J. Control*, **60**, 283~296 (1994-8)
- (5) J. Lu, M. Shafiq and T. Yahagi: "Model Reference Adaptive Control for MIMO Nonminimum Phase Discrete-Time Systems using Approximate Inverse Systems", *T. IEE Japan*, **C-116**, 570~576 (1996-5)
- (6) 前田肇, 杉江俊治: アドバンスト制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店 (平2)
- (7) W.A. Wolovich and P.L. Falb: "Invariants and Canonical Form under Dynamic Compensation", *SIAM J. Contr. and Optim.*, **14**, 996~1008 (1976)

-
- (8) 児玉慎三, 須田信英: システム制御理論のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (昭 53)
- (9) 加瀬渡, 武藤康彦: 「有界な観測外乱を伴う系に対する多変数 EMM 系の一構成法」, 計測自動制御学会第 17 回適応制御シンポジウム, 135~138 (平 9)
- (10) M.K. Hasan, 清水聡, 谷萩隆嗣: 「近似逆システムの周波数領域での最適設計」, システム制御情報学会論文集, 8, 670~672 (平 7-11)

加瀬 渡

(正員) 平成 2 年 3 月上智大学大学院理工学研究科博士課程修了, 工学博士. 名古屋大学工学部情報工学科助手, 静岡理工科大学理工学部機械工学科講師を経て, 平成 8 年 4 月大阪工業大学工学部電気工学科講師, 現在助教授. 計測自動制御学会, システム制御情報学会, IEEE 各会員.

北岡 央之

(学生員) 平成 9 年 3 月大阪工業大学工学部電気工学科卒業. 同年 4 月, 同大学大学院工学研究科電気電子工学専攻博士前期課程入学, 現在に至る. システム制御理論に興味をもつ.