ロトカーボルテラモデルによる消費財需要量の予測

正員 直江秀憲 (日立製作所)

Prediction of Demand of Consumer Goods by Lotka-Volterra Model

Hidenori Naoe, Member (Hitachi Ltd.)

The purpose of this paper is to predict more exactly the demand of consumer goods using the non-linear model, Lotka-Volterra model. The model originally gives a description for the ecological system with mutually related groups. The concerning consumer goods has the relation of proper and auxiliary variables. The variation of demand for consumer goods has the strong non-linearity. The conventional identification and prediction techniques for the time series phenomena are not necessarily appropriate for these consumer goods. So, the demand is identified by the non-linear equations with proper and auxiliary variables. In addition, the demand is qualitatively analyzed by the limit cycle and the variation of the center of limit cycle of non-linear differential equations. The numerical experiment shows that the error ratio compared with the realized demand and the identified one is about 15%. Namely, the demand is widely exhibited by the proposed non-linear model with proper and auxiliary variables.

キーワード：消費財需要量、非線形微分方程式、主変数-補助変数、リミットサイクル、平衡点

1. はじめに

本論文の目的は非定常な時系列現象を同定し、予測するための1つの方法について議論することである。従来、このような方法については自己回帰モデル、GMDHなどが提案されており、近年では誤差逆伝搬法によるニューラルネットが注目されている^{1) 2)}。このうち、自己回帰モデルは現在の時系列データの値を過去の時系列データの値の線形結合によって説明しようとするものである。GMDHとは要因候補群 $\{X_1, \dots, X_n\}$ と被説明変数 y との関数関係を求めるのに次のような手続きを取る方法である。すなわち、 y を説明するのに要因候補の対 $\{X_i, X_j\}$ から作られる2次式が有意かどうかを調べ、有意ならばあらたに要因候補群に加え、そうでなければ棄却するという手続きを繰り返す。さらに、誤差逆伝搬法によるニューラルネットは、評価関数として出力の誤差の大きさをとり、ニューロン特性を定め、入力を与えたときに教師データに近い出力を得るようにシナプス結合を設定する。消費財需要量のような経済データを季節変動、傾向変動、不規則変動に分解してとらえようとする従来例もあるが、これは主に季節調整を行なうものである³⁾。ここで、季節調整は原系列から季節な動きを除去して傾向変動をとらえることに主眼をおいたものである。これら従来方法は、本論文で取り上げるような非線形性が強く複雑な変動をする消費財の需要量の変動を説明するには必ずしも適当ではない。

消費財需要量の変動の同定においては特に非線形性がどのような要因によって生じているかを考察することが重要である。本論文で考察する消費財にはいくつかの銘柄があり、各銘柄の需要量は相互に非線形に作用しながら変動している。そこで、当該消費財においては、ある銘柄の需要量を補助変数とし、他の銘柄の需要量を主変数とし、この主変数の値を非線形微分方程式を解くことによって同定、予測することを考える。このために、新しい数学モデルによって非線形な変動をとらえることにする。

特に、本論文では生態系における個体数の変動を表わす非線形モデルであるロトカーボルテラモデル (Lotka-Volterra model) によって消費財の需要量の変動を記述することを考える^{4) 5)}。生態系におけるロトカーボルテラモデルとは、複数の個体群の個体数の間に相互作用があるとして、個体数の増加率にいくつかの仮定をおき、個体数の変動を非線形微分方程式によって記述しようとするものである。これは、20世紀前半に提案されたものであり、今日までプランクトン、バクテリア、魚等の個体数の変動についての分析が行われている。本論文ではこのロトカーボルテラモデルを一方の変数を補助変数とし、他方の変数を主変数とし、主変数の同定、予測を行なう新しい数学モデルととらえる。

本論文の構成は次のようになっている。すなわち、第2章において従来の予測技術について述べ、第3章にお

いてロトカーボルテラモデルを用いた消費財需要予測モデルの性質について述べる。そして、第4章において導入したモデルに対する数値実験を行ない、提案モデルの予測結果と自己回帰モデルによる予測結果を比較することにより提案モデルの有効性を示す。最後に第5章において本論文の結論を述べる。

2. 時系列分析の従来の技術

本章では時系列分析の従来の技術についてやや詳しく述べる。自己回帰モデルとは時系列データ $\{X(k)\}$ が与えられたとき、

$$X(t) = a_1 X(t-1) + \dots + a_n X(t-n) + \varepsilon_t \quad (1)$$

ε_t : 誤差項

によって将来の時系列の値を求めるといった方法である。次数 n の決定には A I C (Akaike Information Criterion) を用いる¹⁾。

また、GMDHとは要因候補群 $\{X_1, \dots, X_n\}$ と被説明変数 y との関数関係を求めるのに次のような手続きをとる方法である。すなわち、 y を説明するのに要因候補の対 $\{X_i, X_j\}$ から作られる2次式が有意かどうかを調べ、有意ならば新たに要因候補群に加え、そうでなければ棄却するという手続きを繰り返すというものである。

さらに、誤差逆伝搬法とは次のようなものである²⁾。 m 層のネットワークを考え、 k 層の第 i ユニットへの入力 I_k^i 、出力の総和を O_k^i とし、 $k-1$ 層の第 i ユニットから k 層の第 j ユニットへの結合の重みを ω^{k-1}_{ij} とする。各ユニットの入出力関係を与える関数を f

$$O_k^i = f(I_k^i) \quad (2)$$

$$I_k^j = \sum_i \omega^{k-1}_{ij} O_{k-1}^i \quad (3)$$

誤差関数を E とすると、あるパターンの組 (x, y) が与えられたとき、

$$E = \sum_j (O^m_j(\omega, x) - y_j)^2 \quad (4)$$

で与えられる。ニューラルネットの誤差関数 E を最小化するため、各パターンに関する誤差関数の勾配ベクトルを計算し、 ω を改良するために確率的降下法を用いる。

これらの従来技術は、一般の時系列データの挙動の同定や予測に数多く利用されてきた。しかしながら、本論文で対象とするようなある消費財の売れ行きが他の消費財の売れ行きに非常な影響を及ぼすといった特定の因果関係がある場合の時系列データの予測に対しては、上記の時系列データ解析の方法よりも時系列データ間の挙動に因果関係を含むモデルの方が有効である。次章で、このような場合に有効なロトカーボルテラモデルを用いた消費財需要予測モデルを導入する。

3. ロトカーボルテラモデルを用いた消費財需要予測モデル

<3.1> ロトカーボルテラモデルの需要予測への応用の考え方 各銘柄の需要量の変動を一方を補助変数とし、他方を主変数として変数とした銘柄の需要量を予測する。本論文で考察する消費財需要量は相互に関連しながら変動していると想定できる。このため、本論文では次のような非線形モデルであるロトカーボルテラモデルを取り上げる^{4) 5)}。

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{ky}{x+D} \right) x \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{\gamma x} \right) y \quad (6)$$

このとき、 y が増加すれば x は減少し、 x が増加すれば y も増加する、という関係がある。

すなわち、

$$f = r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{ky}{x+D} \right) x \quad (7)$$

$$g = s \left(1 - \frac{y}{\gamma x} \right) y \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0, \frac{\partial g}{\partial x} > 0 \quad (9)$$

である。ロトカーボルテラモデルを用いると、 y を補助変数とし、 x を同定、予測する場合、 x を補助変数とし、 y を同定、予測する場合とがある。従来も自己回帰モデル、GMDH、誤差逆伝搬法等が提案されてきたが本論文で扱うような非線形性が強く、相互作用の大きなデータを取り扱うことは難しかった。

この微分方程式の平衡点は次のごとく与えられる。

$$x^* = \frac{D(1-\alpha-\beta+R)}{2\beta} \quad (10)$$

$$y^* = \gamma x^* \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{k\gamma}{r}, \beta = \frac{D}{K} \quad (12)$$

$$R = \sqrt{(1-\alpha-\beta)^2 + 4\beta} \quad (13)$$

そして、この平衡点が安定であるための条件は、固有方程式

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (14)

$a = s - rx^* \left(-\frac{1}{K} + \frac{\alpha x^*}{x^* + D} \right)$ (15)

$b = rsx^* \left(\frac{1}{K} - \frac{\alpha x^*}{x^* + D} + \frac{\alpha}{x^* + D} \right)$ (16)

において、
 $a > 0, b > 0$ (17)

なることである。いま、 $b > 0$ が満たされているとすると、安定であるための条件は、

$\frac{s}{r} > \frac{2(\alpha - R)}{1 + \alpha + \beta + R}$ (18)

となる。

ここに、 $\alpha = k \gamma / r = 1$ としたときの K/D と r/s の関係を示したものが図1である。 K/D は補助変数または主変数の環境収容能力 (normalized value of the carrying capacity for the variables)、 r/s は補助変数と主変数の固有の成長率 (intrinsic growth rate of the variables)を表わしている。ポアンカレベンディクソンの定理により与えられた方程式は安定な平衡点または極限周期軌道を解にもつ。すなわち、図1において

($K/D, r/s$)が斜線外にあるとき安定な平衡点をもち、斜線内にあるとき平衡点は不安定になり極限周期軌道を生ずる。

図1 非線形システムの安定領域
Fig.1 Stability Domain of Non-linear System

本論文では補助変数または変数の成長率(r/s)が比較的高く、環境収容能力(K/D)が比較的高いとき、極限周期軌道が生ずるようにパラメータを設定し、不安定領域において極限周期軌道によって時系列現象を記述する。とこ

ろで、この微分方程式において r, s は周期を定めており、 K, D は振幅をある程度定めている。本論文では振幅を制御するために、次のように x, y を u, v に変数変換する。

$u = (1 - \mu)\bar{x} + \mu x$ (19)

$v = (1 - \nu)\bar{y} + \nu y$ (20)

$\bar{x}, \bar{y}$: 極限周期軌道の中心、
 μ, ν : パラメータ ($\mu, \nu > 0$)

すると、上記微分方程式は次のように表わせる。

$\frac{du}{dt} = \mu r \left(1 - \frac{x}{K} - \frac{ky}{x + D} \right) x + (1 - \mu) \frac{d\bar{x}}{dt}$ (21)

$\frac{dv}{dt} = \nu s \left(1 - \frac{y}{\gamma x} \right) y + (1 - \nu) \frac{d\bar{y}}{dt}$ (22)

$x = \frac{1}{\mu} [u - (1 - \mu)\bar{x}]$ (23)

$y = \frac{1}{\nu} [v - (1 - \nu)\bar{y}]$ (24)

ロトカーボルテラモデルの需要予測への応用では (5)、(6) 式の未知パラメータ r, s, K, D, k, γ, x の初期値、 y の初期値、さらに、(19)、(20) 式の未知パラメータである極限周期軌道の中心である $\bar{x}, \bar{y}$ および μ, ν をロトカーボルテラモデルの挙動が与えられた銘柄の時系列データの挙動に等しくなるように決定する。決定したモデルを使って将来の時系列データの挙動を予測する。ここで、予測モデルの挙動とロトカーボルテラモデルの特性から考えて、ロトカーボルテラモデルの極限周期軌道の中心点を時系列データの傾向変動に対応させる。時系列データの傾向変動からの乖離をロトカーボルテラモデルの極限周期軌道で同定する。この際、振幅を調節する。こう考えると (5) (6) 式の未知パラメータはロトカーボルテラモデルの平衡点が不安定で極限周期軌道が形成されるように決める必要がある。

<3・2> パラメータ設定の考え方 上記の議論

から、まずロトカーボルテラモデルの平衡点の安定性と極限周期軌道の条件について考える。平衡点が安定であるための条件は (17) 式で表わされている。いま、 $b > 0$ が満たされているとすると安定であるための条件は (18) 式で表わされている。 $\alpha = k \gamma / r$ を一定としたときの K/D と r/s の関係を表わしたものが図1である。図1において、($K/D, r/s$)が斜線外にあるときロトカー

ボルテラモデルは安定な平衡点をもち、斜線内にあるとき平衡点は不安定となり極限周期軌道を生ずる。本論文では、極限周期軌道によって時系列現象を記述する。このため、平衡点が不安定な領域のもとで、ロトカーボルテラモデルから生成される時系列データが実際の時系列データによくあてはまるように以下のあてはまり具合の指標を最小にするようパラメータを設定する。

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i^* - \xi_i}{\xi_i} \right)^2} \tag{25}$$

ξ : 実現値の3ヶ月移動平均値
 ξ^* : モデルによる推定値
 n : データの数。

極限周期軌道の中心である $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ は時系列データに最小2乗法を用いて傾向変動として求める。そして、他の未知パラメータ $\mathbf{X} = (r, s, K, D, k, \gamma, x \text{ の初期値}, y \text{ の初期値}, \mu, \nu)$ の設定にあたっては、 δ の最小化のための非線形最適化処理を以下の手順で行なう。

- step.1: $\mathbf{X}$ を該当の不安定領域の条件を満たすような点に設定する。
 - step.2: 設定したパラメータで、ロトカーボルテラモデルを計算し、あてはまり具合の指標 δ を計算する。
 - step.3: $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}$ が該当の不安定領域の条件を満たすような $\mathbf{X}$ の変分 $\Delta \mathbf{X}$ を生成し、 $\mathbf{X}'$ でロトカーボルテラモデルを計算し、あてはまり具合の指標 δ' を計算する。
 - step.4: $\delta' \leq \delta$ のとき $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$
 $\delta > \delta'$ のとき $\mathbf{X} = \mathbf{X}$ とする。
 - step.5: $\| \delta - \delta' \| \leq \varepsilon$ のとき終了、
 $\| \delta - \delta' \| > \varepsilon$ のとき step.2 に戻って続行する。ただし、 ε は大変小さい正数とする。
- 以上の手順によってパラメータを設定する。

4. 数値実験による提案方法の評価

<4・3> 対象とする時系列データとロトカーボルテラモデル 本論文では複雑で強い非線形性をもつ変動をする消費財の需要量を取りあげる。そして、非線形性の強い変動は各銘柄が一方を補助変数とし、他方を主変数として相互に非線形な作用を及ぼしていることによって生じているとみなすことができると考える。

まず、非線形性をもつ消費財の需要量が銘柄間の補助変数と変数の相互作用によって定まるという仮説を相関という観点からとらえる。本論文では対象とする消費財の銘柄を M_i ($i = 1, \dots, 4$) と表わす。ここに、相関は次式で与えられる。

$$COR_{ij} = \frac{COV_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{26}$$

ここで、
 σ_i : M_i の需要量の標準偏差
 COV_{ij} : M_i の需要量と M_j の需要量との共分散

である。表1は第*i*財と第*j*財との間の相関を示している。これを見ると、 M_1 と M_3 、 M_1 と M_4 はそれぞれ正の相関0.52,0.48を有しており、 M_1 と M_2 とは負の相関-0.31を有している。また、図2は M_1 と M_2 の需要量の実績値の変動を横軸を時間、縦軸を需要量として示したものである。図2を見ると、 M_1 の需要量は季節変動を繰り返しながら増減の傾向を示しており、 M_2 は季節変動とともに増減の傾向を示していることが分かる。これら2つの図表をあわせて考察する M_1 と M_2 の間には非線形な関係(補助変数-主変数関係)があり、 M_1 は M_2 を補助変数とすることによってその需要量を減少させているとみなすことができる。 M_1 と M_3 、 M_4 と M_1 の間にも同様の関係が存在すると考えることができる。

図2 消費財需要量の実績値の変動
 Fig.2 Variation of Demand of Consumer Goods

表1 *i* 番目の財と *j* 番目の財の間の相関
 Table 1 Correlation between *i*-th goods and *j*-th goods

Case	Correlation
1 M1-M2	-0.31
2 M1-M3	0.52
3 M1-M4	0.48

本論文では、対象とする消費財の銘柄は、1987年から1991年までの間の M_i ($i = 1, \dots, 4$)とし

た。消費財の時系列データは3ヶ月移動平均をとったものを用い、とくに1990年8月から1991年9月までの期間について実際に実現された需要量とモデルによって得られた値とを比較した(表2)。 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ は傾向変動、 μ 、 ν は振幅を定めるパラメータである。

ここで、ロトカーボルテラモデルのパラメータは、 $\langle 3 \cdot 2 \rangle$ で述べたパラメータ設定の考え方に従ってロトカーボルテラモデルの平衡点が不安定領域にあり、 δ を最小にするように次のように定めた。

$$r=5.7, s=1.14, D=(1/2.7)x^*$$
$$\gamma=(1/2.7)y^*/D, \quad k=2.7rD/y^*$$
$$K=10.0D \tag{27}$$

このとき、
$$r/s=5.0, \beta=0.1, \alpha=1.0 \tag{28}$$
である。

表2 数値実験のための諸条件
Table 2 Condition for Numerical Experiment

Case	Conditions
(1)	x:M1, y:M2 $\bar{x}=0.8$ $\bar{y}=1.2162-0.09549t+0.002928t^2$ $R^2=0.846$ $\mu=0.85, \nu=0.30$
(2)	x:M1, y:M3 $\bar{x}=0.8$ $\bar{y}=0.9662-0.01755t+0.006736t^2$ $R^2=0.887$ $\mu=1.1, \nu=0.6$
(3)	x:M4, y:M1 $\bar{x}=0.08427-0.04460t+0.003977t^2$ $\bar{y}=1.0$ $R^2=0.870$ $\mu=0.5, \nu=1.3$

$\langle 4 \cdot 2 \rangle$ 数値実験の結果と評価 表3は提案モデルによる数値実験の結果を示している。*は主変数、**は補助変数を表わしている。数値実験の結果xを主変数としyを補助変数とした場合得られたモデルによる推定値と実現された値とを比較すると、誤差はほぼ20%であり、あてはまりの度合いは極めてすぐれているわけではない。誤差6.5%とすぐれているものもあるが(ケース2、M3)、29.3%とあまりよくない値を示しているものもある(ケース3、M1)。一方、xを補助変数とし、yを主変数とすると、誤差はほぼ15%である。誤差6.5%とすぐれているものもあるが(ケース2、M3)、14.4%とあまりよくない値を示しているものもある(ケース3、M1)。しかし、対象消費財の時系列データの変動(図2)と予測結果(図3)の傾向をみると比較的簡単な非線形微分方程式モデルによって複雑な時系列現象の定性的傾向はよくとらえていることが分かる。当該消費財の需要量にはあらかじめかなりの不

規則性、異常性が含まれていると考えられるため、複雑なモデルを構築するよりはロトカーボルテラモデルのように変数間の因果関係を含んだモデルによって定性的な傾向を記述することが有効であることが分かる。さらに、図4はM3の実績値であり、図5はM1とM3の予測例である。この場合、yを予測値とみるとM3の消費財の予測の傾向が、図4の実績値の傾向と非常によく類似している。

表3 提案モデルによる数値実験の結果
Table 3 Result of Numerical Experiment

Case	goods	error (%)
1	x:M1 ** y:M2 *	15.2 11.9
2	x:M1 ** y:M3 *	27.4 6.5
3	x:M4 ** y:M1 *	29.3 14.4

図3 消費財需要量の変動(提案方法による)
Fig.3 Variation of Demand of Consumer Goods

図4 消費財需要量の変動 (M3)
Fig.4 Variation of Demand of Consumer Goods(M3)

図5 消費財需要量の変動 (提案方法による)
Fig.5 Variation of Demand of Consumer Goods

<4.3> 自己回帰モデルとの比較 本提案モデルと旧来のモデルとの性能を比較するために自己回帰モデル (ARモデル) での予測結果と比べてみた。ここに自己回帰モデルとは

$$Z(t)=a_1Z(t-1)+\dots+a_nZ(t-n)+\varepsilon_t \quad (29)$$

で記述されるものである。Z(t)は生データから3ヶ月をとり、回帰分析によりトレンドを取り除いた量である。 ε_t は平均0、分散 σ^2 の正規分布に従う白色雑音である。

次数は4次おくれまでとして分析したところ表4の結果を得た。自己回帰モデルの性能はあまりよくない。誤差23.6%(M2)から62.9%(M3)までの値を得た(表4)。提案モデルの15%にはおよばない。

表4 同定した式と誤差 (自己回帰モデル)

Table 4 Identified Formulae and Error Ratio (AR Model)

goods	identified formulae	error(%)
M2	$Z_t = -0.9701Z_{t-1} - 0.0184Z_{t-2} + 0.5939Z_{t-3} - 0.3321Z_{t-4}$	23.6
M3	$Z_t = -0.8770Z_{t-1} - 0.1656Z_{t-2} + 0.5956Z_{t-3} + 0.0140Z_{t-4}$	62.9
M4	$Z_t = -1.2384Z_{t-1} - 0.0070Z_{t-2} + 0.6057Z_{t-3} - 0.3007Z_{t-4}$	40.7

5. おわりに.

本論文の目的は各銘柄の間に補助変数と主変数の非線形な相互作用が想定できる消費財需要量の変動を表現することにある。このために、生態系における個体群の個体数の変動を個体群の間に相互作用があるとして記述する非線形微分方程式であるロトカーボルテラモデルをとりあげた。このロトカーボルテラモデルを使用して、一方の銘柄を補助変数に、他方の銘柄を主変数とする新しい需要量予測モデルを導入した。ここでとりあげる消費財需要量の変動は強い非線形性を有している。従来の

時系列現象の同定、予測方法には自己回帰モデル、GMDH,あるいは近年においては誤差逆伝搬法がある。しかし、本論文で対象としたように消費財の間に強い因果関係のあるような場合の需要量を同定、予測するためには従来の方法を用いるのはかならずしも適当ではない。

そこで、本論文では、特に、消費財の銘柄の間に非線形の補助変数と変数関係を想定し、非線形微分方程式における極限周期軌道と極限周期軌道の中心の変動とによって変動をとらえた。数値実験で評価した結果、当該消費財の実際の需要量とモデルによって得られた予測需要量との誤差は約15%位であった。また、需要量変動の定性的な動きは、実際の時系列データと予測した時系列データと非常に類似しているという結果を得た。すなわち、非線形性の強い変動をもつ消費財の需要量はロトカーボルテラモデルによって定性的に記述できることから、提案方式が有効であると考えられる。今後、種々の方式との比較検討をさらに進め、有効性の度合いを評価していく。(平成9年9月30日受付、平成10年2月2日再受付)

参考文献

- (1) H.Akaike : A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE transactions on Automatic Control, AC-19, Vol. 6, 716-723 (1974)
- (2) D.E.Rumelhart, J.L.McClelland et al.: Parallel Distributed Processing, MIT Press (1986)
- (3) 刈屋武昭監修、日本銀行調査統計局、計量経済分析の基礎と応用、東洋経済新報社 (1985)
- (4) スメール、ハーシュ; 田村一郎、水谷忠良、新井紀久子訳: 力学系入門、岩波 (1976)
- (5) R.M.May : Stability and Complexity in Model Ecosystems, Princeton University Press (1974)

直江 秀憲

(正員) 1958年生。83年東京大学理学部情報科学科卒業。86年筑波大学大学院修了。同年(株)日立製作所入社。システム開発研究所においてニューラルネットワーク、時系列分析の研究に従事。