2 次形式評価関数の荷重行列と最適有限整定制御系の設計

学生員 松島優一 (広島工業大学)

学生員 若宮真一郎 (広島工業大学)

正 員 村田弘志 (広島工業大学)

Weighting Matrix of Quadratic Performance Index and Design Method of Optimal Deadbeat Control System.

Yuichi Matsushima, Student Member

Shinichiro Wakamiya, Student Member

Hiroshi Murata, Member

(Hiroshima Institute of Technology)

In this paper, are discussed a determination method of weighting matrix of quadratic performance index and a design method of optimal deadbeat control system. First, the relationship between weighting matrix of quadratic performance index and extra pole of over-parameterized pulse transfer function model is indicated. Next, a design method of optimal deadbeat control system is explained. Lastly, to demonstrate the effectiveness of the proposed method, some numerical examples are also presented.

キーワード：2 次形式評価関数, 荷重行列, 最適有限整定制御, デッドビート制御, デジタル制御

1. まえがき

応答波形の改善や操作量制限への対応が可能な最適有限整定制御系の設計については、主ループ内の緩和フィルタと状態局部フィードバックを用いる西村ら^{1,2)}の方法や、制御対象に前置補償器を加え状態フィードバックにより局部補償を行う瓜倉ら^{3,4)}の方法がよく知られている。いずれも制御対象の次数を n とするとき最適制御段数 N を $N=n+k(k>0)$ として自由度を増し、操作量と偏差に関する 2 次形式評価関数を最小化する状態フィードバック制御系の設計法であり、設計にあたっては制御段数 N と評価関数における操作量と偏差に対する荷重行列 Q, R を任意に選んでフィードバックゲインと補償器のパラメータを決定し、その後閉ループ系の入・出力特性を求めて制御仕様を満たすよう試行を重ねている。

筆者らも同様な制御構成と評価関数を用いた最適有限整定制御系の設計について、制御対象のステップ応答を用いた簡単な行列演算から最適有限整定操作量 u_k を求め、この操作量に対する制御対象の応答を閉ループ系の規範応答とする最適有限整定サーボ系の設計法を提案している。この設計手法であれば、規範モデル応答が制御仕様を満たしているかを最適有限整定操作量 u_k が求まった段階で事前に確認してから制御系を設計すればよく、これまでの手法^{1~4)}のように制御装置を設計後に閉ループ系の応答を求めて試

行を繰返す必要がなく、設計手法が簡単である。

ところで、いずれの場合においても 2 次形式評価関数の荷重行列 Q, R の値をいかに取るかは試行を行う以外ない。しかし、筆者らの手法により u_k から得られるオーバパラメータパルス伝達関数 (モデル) を $\bar{G}(z)$ と定めれば、 $\bar{G}(z)$ の分母子に含まれる追加多項式 $\lambda(z)=0$ の根 $\psi_i (i=1\sim k)$ (以後、"追加極"と称する) と $Q=qI, R=rI (I: \text{単位行列})$ の関係を導出したところ、追加極を z 平面の単位円上に配置するとき、制御対象のゲイン K に対して $qK^2=r$ なる条件式を満足すればよいことが証明できる。この条件を満たすように q, r を選んで追加極を単位円の近傍に配置した規範モデルを作れば、良好な制御応答が得られ制御対象のパラメータ変動に対しても比較的頑健なサーボ系の設計ができることが確認できた。

最適有限整定サーボ系の設計において、最適制御段数 N と荷重行列 Q, R の選択をいかにとるかは大きな課題であるが、本論文の結果は設計における一つの目安を与えるものと思われる。また本手法は、これまで提案されている最適有限整定サーボ系における種々の制御構成に対しても適用できる。文献 1) で提案されている制御構成による最適有限整定サーボ系の本手法による設計例を定位性と無定位性の系について示し、ステップ状目標値に対する応答をデジタルシミュレーションによって求め検討を加えた。

2. 最適有限整定操作量とオーバパラメータモデル

入力を $u(t)$, 出力を $y(t)$, 制御対象の伝達関数を $G(s)$ とする単一入出力系を考え, $G(s)$ の次数を n , ゲインを K , ステップ応答を $h(t)$, サンプル周期を θ とし, 例えば出力 $y(t)$ について離散値を $y_i = y(i\theta)$ なる表現を用いる。

一方, 系の状態方程式と出力方程式が可制御正準形として $\mathbf{x}_{i+1} = \Phi \mathbf{x}_i + \Gamma u_i$, $y_i = \Psi \mathbf{x}_i$ で表されているとし, 対応するパルス伝達関数を次のように定める。

$$\left. \begin{aligned} G(z) &= \frac{b(z)}{1+a(z)} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i z^{-i} \\ a(z) &= a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n} \\ b(z) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n} \\ (g_i &= \Psi \Phi^{i-1} \Gamma = h_i - h_{i-1}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

このとき, パルス伝達関数のパラメータ $a_i, b_i (i=1 \sim n)$ とマルコフパラメータ $g_i (i=1, 2, \dots)$ の間には次式が成立している。

$$g_i = \begin{cases} b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_j g_{i-j} & (i=1 \sim n, g_0=0) \\ -\sum_{j=1}^n a_j g_{i-j} & (i \geq n+1) \end{cases} \quad (2)$$

なお, 1 形サーボ系の構成を想定し制御対象が $z=1$ に零点を持たない条件として

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ \Psi & 0 \end{bmatrix} = n+1 \quad (3)$$

を満たしているものとする。

ここで, 制御段数を N とし, $N=n+k (k \geq 0)$ なる任意な値に対して, 入力ベクトルを $\mathbf{u}_k$, 伝達マトリクスを G とすれば, $(N+1)$ 段にわたる出力応答ベクトル $\mathbf{y}$ は

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{N+1}]^T = G \mathbf{u}_k \quad (4)$$

と表される。ただし

$$\mathbf{u}_k = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T \quad (5)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{N+1} & g_N & \cdots & g_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

である。この出力応答 $\mathbf{y}$ と目標値ベクトル $\mathbf{i}_r = [1, \dots, 1]^T ((N+1) \times 1)$ との偏差ベクトルを $\mathbf{e}$ とすれば

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}_r - G \mathbf{u}_k = [e_1, e_2, \dots, e_{N+1}]^T \quad (7)$$

と表されるので, 正定対称な $(N+1) \times (N+1)$ 荷重行列を Q , R として, 次式の評価関数 P を定める。

$$P = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \mathbf{u}_k^T R \mathbf{u}_k) \quad (8)$$

ここで, ステップ状目標値に対し, 制御段数を $N=n+k$ ($k \geq 0$) とし $\mathbf{u}_j (j=0 \sim N-1)$ なる操作量で制御対象の出力応答 y_i を N 段以降目標値に有限整定させたとすれば, $y_i = 1.0$ ($i \geq N$), $u_N = u_{N+\beta} (\beta \geq 1)$ なる一定値をとることから, (4) 式の $y_i (i=N \sim N+n)$ についてこれらの条件を代入して整理すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= J_k \mathbf{u}_k = J_k [u_0, u_1, \dots, u_N]^T \\ &= [1, 1, \dots, 1]^T \end{aligned} \quad (9)$$

ただし

$$J_k = \begin{bmatrix} g_N & g_{N-1} & \cdots & g_{n+1} & g_n & \cdots & g_1 & 0 \\ g_{N+1} & g_N & \cdots & g_{n+2} & g_{n+1} & \cdots & g_2 & h_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{N+n} & g_{N+n-1} & \cdots & g_{2n+1} & g_{2n} & \cdots & g_{n+1} & h_n \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{k} \qquad \qquad \qquad \xleftarrow{n+1}$

$(n+1) \times (N+1) \quad (10)$

である。

ここで, $k=0$ の場合 $J_k (= J_0)$ は $(n+1) \times (n+1)$ 行列となり $|J_0| \neq 0$ が成立するので (9) 式より最短時間有限整定操作量 $\mathbf{u}_0$ は次式から得られる。

$$\mathbf{u}_0 = J_0^{-1} \mathbf{i} = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T \quad (11)$$

(11) 式で得られる最短時間有限整定操作量 $u_i (i=0 \sim n)$ と (1) 式の $G(z)$ のパラメータ $a_i, b_i (i=1 \sim n)$ の間には次式が成立している。

$$\left. \begin{aligned} a_i &= (u_i - u_{i-1}) / u_0 \\ b_i &= (y_i - y_{i-1}) / u_0 \end{aligned} \right\} \quad (u_0 = 1 / \sum_{j=1}^n b_j) \quad (12)$$

ただし, y_i は u_i に対する系の有限整定応答である。

また, $k \geq 1$ の場合には J_k が (10) 式のように $(n+1) \times (N+1)$ 行列で, $\text{rank} J_k = n+1$ となり $\mathbf{u}_k$ は一意に定まらない。そこで, (9) 式から $\mathbf{i} - J_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ を拘束条件として (8) 式の評価関数 P を最小化する操作量をラグランジェの未定係数法を用いて求めれば, 最適有限整定操作量 $\mathbf{u}_k$ が次式から得られる。^{5, 6, 7)}

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= M^{-1} [G^T Q \mathbf{i}_r - J_k^T [J_k M^{-1} J_k^T]^{-1} [J_k M^{-1} G^T Q \mathbf{i}_r - \mathbf{i}]] \\ &= [\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N]^T \end{aligned} \quad (13)$$

$$M = [R + G^T Q G] \quad (14)$$

$$\mathbf{i}_r = [1, 1, \dots, 1]^T \quad (N+1) \times 1 \quad (15)$$

同様に, (13) 式で得られる最適有限整定操作量 $\bar{u}_i (i=0 \sim N)$ に対する系の出力応答を $\bar{y}_i$ とすれば, (12) 式と同様にし

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_i &= (\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}) / \bar{u}_0 \\ \bar{b}_i &= (\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}) / \bar{u}_0 \end{aligned} \right\} \quad (\bar{u}_0 = 1 / \sum_{j=1}^N \bar{b}_j) \quad (16)$$

が得られ、 $\bar{a}(z) = \sum_{i=1}^k \bar{a}_i z^{-i}$ 、 $\bar{b}(z) = \sum_{i=1}^N \bar{b}_i z^{-i}$ として $\bar{G}(z) = \bar{b}(z) / (1 + \bar{a}(z))$ なるオーバーパラメータモデルが実現できる。この N 次のモデルは分母分子に z^{-1} について k 次の追加多項式 $\lambda(z)$ を含み次式のように表される。

$$\bar{G}(z) = \frac{\bar{b}(z)}{1 + \bar{a}(z)} = \frac{b(z)\lambda(z)}{[1 + a(z)]\lambda(z)} \quad (17)$$

ここに、 $\lambda(z)$ は

$$\lambda(z) = 1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{-i} \quad (18)$$

であり、 $\lambda(z) = 0$ の根を”追加極”と称することとする。また、(18)式における $\lambda(z)$ のパラメータ λ_i は(17)式の右辺の分母どうしについて z^{-1} のべき乗の係数を比較すれば、パルス伝達関数のパラメータとの関係について次式が得られる。

$$\lambda_i = \bar{a}_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{i-j} \bar{a}_j \quad (i=1 \sim k, \lambda_0 = 1, \lambda_p = 0 \ (p < 0)) \quad (19)$$

なお、(13)式より得られる最適有限整定操作量 $\bar{u}_i (i=0 \sim N)$ の系列を z 領域で表せば $\bar{u}(z) = [1 + \bar{a}(z)] \bar{u}_0 / (1 - z^{-1})$ となることから、この入力系列に対する制御対象の出力応答の系列を z 領域で表せば

$$\bar{y}(z) = \bar{u}_0 \bar{b}(z) / (1 - z^{-1}) \quad (20)$$

となり、この $\bar{y}(z)$ を閉ループ系の規範モデル応答とする 1 形サーボ系が 5 章で設計される。

3. 最短有限整定操作量と最適有限整定操作量の関係

本章では、(11)式から得られる最短有限整定操作量 u_0 と (13)式から得られる最適有限整定操作量 u_k の間に成立する関係式を誘導する。また、 u_k より得られる(17)式のオーバーパラメータモデルにおける追加多項式 $\lambda(z)$ のパラメータ $\lambda_i (i=1 \sim k)$ との関係を示す。

まず、(10)式で定めた $(n+1) \times (N+1)$ 行列 J_k の次元を拡大し、 $(N+1) \times (N+1)$ 行列 J_s を次式のように定義する。

$$J_s \triangleq \begin{bmatrix} \overleftarrow{k} & \overleftarrow{n+1} & \overrightarrow{} \\ g_N & \cdots & g_n & \cdots & g_1 & 0 \\ g_{N+1} & \cdots & g_{n+1} & \cdots & g_2 & h_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & g_{2n} & \cdots & g_{n+1} & h_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{2N} & \cdots & \cdots & \cdots & g_{N+1} & h_N \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{matrix} \quad (21)$$

(N+1) × (N+1)
rank $J_s = n+1$

ここで、(11)式から得られる最短時間有限整定操作量 $u_0 = [u_0, u_1, \dots, u_n]^T$ に対応した制御対象の出力応答 y_i は、 $n\theta$ 時点以降は一定値 $y_i = 1.0 (i \geq n)$ に整定するから、 $i = N \sim 2N$ なる y_i について入出力関係を行列表示すれば

$$J_s \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ k \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

が得られる。同様に、(13)式から得られる最適有限整定操作量 $u_k = [\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N]^T$ に対応した出力応答 $\bar{y}_i$ は $N\theta$ 時点以降は一定値 $\bar{y}_i = 1.0 (i \geq N)$ に整定するから $i = N \sim 2N$ について整理し行列表示すれば次式を得る。

$$J_s \begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

一方、マルコフパラメータ g_i とパルス伝達関数のパラメータ a_i の関係は(2)式から求まり、 $g_i (i=n+1 \sim 2n+1)$ について整理すれば

$$\begin{bmatrix} g_{n+1} & \cdots & g_1 \\ g_{n+2} & \cdots & g_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ g_{2n+1} & \cdots & g_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

となり、(21)式の J_s を用いて表示すれば

$$J_s \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow J_s [1, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{0} \quad (25)$$

となり、同様に

$$\begin{aligned} J_s [0, 1, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0]^T &= \mathbf{0} \\ J_s [0, \dots, 0, 1, a_1, \dots, a_n, 0]^T &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (26)$$

も成立しており、 $[1, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0]^T, \dots, [0, \dots, 0, 1, a_1, \dots, a_n, 0]^T$ 一次独立である。

ここで(23)式の非同次連立方程式を考えると、(22)式における $[0, \dots, 0, u_0, \dots, u_n]^T$ が(23)式の特殊解である。また、 $\text{rank } J_s = n+1$ であるから $J_s u_k = \mathbf{0}$ の解空間の次元は $(N+1) - (n+1) = k$ となる。よって任意係数を $\alpha_j (j=1 \sim k)$ として(23)式の一般解は次式のように表せ、 u_k と u_0 の関係が定まる。

(27)

$$\lambda_i = \begin{cases} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) / \alpha_1 & (i = 1 \sim k-1) \\ (u_0 - \alpha_i) / \alpha_1 & (i = k) \end{cases} \quad (28)$$

以下で簡単化のため, $n=2, N=4$ ($k=2$) の場合を例にとつて λ_i と α_i の関係を示す。このとき $\mathbf{u}_0=[u_0, u_1, u_2]^T, \mathbf{u}_2=[\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4]^T$ となるから (27) 式は

(29)

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_0}{\bar{u}_0} = \frac{(a_1 - 1)\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} \\ \bar{a}_2 &= \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{\bar{u}_0} = \frac{u_0 + (a_2 - a_1)\alpha_1 + (a_1 - 1)\alpha_2}{\alpha_1} \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots\end{aligned}\tag{30}$$
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \bar{a}_1 - a_1 \\ \lambda_2 &= \bar{a}_2 - \lambda_1 a_1 - a_2\end{aligned}\quad (31)$$
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (\alpha_2 - \alpha_1)/\alpha_1 \\ \lambda_2 &= (u_0 - \alpha_2)/\alpha_1\end{aligned}\quad (32)$$

以上から、最適有限整定操作量 u_k は (8) 式の評価関数 P を最小化するように (13) 式から求められるが、(11) 式の一意に定まる最短有限整定操作量 u_0 と任意係数 α_i の関数として得られ、この α_i がオーバーパラメータモデルにおける追加多項式 $\lambda(z)$ のパラメータ λ_i を (28) 式のように定めることがわかる。よって、 $\lambda(z)=0$ の根である”追加極 $\psi_i (i=1 \sim k)$ ”をある一定値内に配置する α_i が存在し、そのような α_i を与える評価関数の荷重行列 Q, R が定まる。次章では、追加極を z 平面の単位円周上に配置する Q, R の関係式を求める。

まず，最適有限整定操作量 u_k は(27)式で与えられており，この u_k を(4)式の $y = Gu_k$ に代入し(2)式の $g_i = b_i - \sum_{j=1}^{\ell} a_j g_{i-j}$ を用いて整理すると，出力応答 $y = [\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{N+1}]^T$ は

(33)

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 - u_0 b_1 \\ 1 - u_0 (b_1 + b_2) \\ \vdots \\ 1 - u_0 (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overleftarrow{k} & \overrightarrow{k} \\ b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & b_1 \\ b_n & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_n \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ k-1 \\ \downarrow \\ \left[\begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{matrix} \right] \\ \updownarrow 2 \end{matrix} \quad (34)$$

を得る。また、(8)式の評価関数 $P = (1/2)[e^T Q e + u_k^T R u_k]$ の荷重行列 Q, R を $Q = qI_N, R = rI_N$ (I_N : 単位行列) とし、(27)式の $u_k = u_k^* + A_k a_k$ と(34)式の $e = i_k^* - B_k a_k$ を代入すれば評価関数 P は次式のように表せる。

$$P = \frac{1}{2} [r(u_k^* + A_k a_k)^T (u_k^* + A_k a_k) + q(i_k^* - B_k a_k)^T (i_k^* - B_k a_k)] \quad (35)$$

したがって、(35)式を a_k で偏微分した結果を 0 とおくことにより評価関数 P を最小化する a_k は

$$(rA_k^T A_k + qB_k^T B_k) a_k = (qB_k^T i_k^* - rA_k^T u_k^*) \quad (36)$$

を解くことにより求められる。

説明の簡略化のため前例の $n=2, N=4$ ($k=2$) の場合を考えれば、最適有限整定操作量 $u_2 = [\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4]^T$ は(29)式から $u_2 = u_2^* + A_2 a_2$ が得られている。一方、偏差 $e = [e_1, e_2, \dots, e_{N+1}]^T$ は(34)式から

$$e = i_r - Gu_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - u_0 b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_1 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

が得られる。よって、 $u_2^*, i_2^*, A_2, B_2, a_2$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u_2^* &= [0, 0, u_0, u_1, u_2]^T \\ i_2^* &= [1, 1, 1 - u_0 b_1, 0, 0]^T \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & 0 \end{bmatrix}^T \\ B_2 &= \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ a_2 &= [\alpha_1, \alpha_2]^T \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

と表せる。したがって、荷重行列を対角行列にとり、 $Q = \text{diag}[q, q], R = \text{diag}[r, r]$ とすれば、評価関数 P は次式となる。

$$P = \frac{1}{2} [r(u_2^* + A_2 a_2)^T (u_2^* + A_2 a_2) + q(i_2^* - B_2 a_2)^T (i_2^* - B_2 a_2)] \quad (39)$$

上式を a_2 で偏微分し、 P を最小化する a_2 を求めれば(36), (38)式から次式が得られる。

$$a_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{tr(1+a_1^2+a_2^2)+q(b_1^2+b_2^2)\} \{q(b_1+b_2(1-b_1+b_2))-ra_2u_0\} - \{r(a_1+a_2a_2)+qb_1b_2\} \{q(b_1+b_2(1-b_1u_0))-r(a_1u_0-a_2u_1)\}/\Delta \\ \{tr(1+a_1^2+a_2^2)+q(b_1^2+b_2^2)\} \{q(b_1+b_2(1-b_1u_0))-r(a_1u_0-a_2u_1)\} - \{r(a_1+a_2a_2)+qb_1b_2\} \{q(b_1+b_2)-ra_2u_0\}/\Delta \end{bmatrix} \quad (40)$$

ただし、

$$\Delta = [r(1+a_1^2+a_2^2)+q(b_1^2+b_2^2)-\{r(a_1+a_2a_2)+qb_1b_2\}]^2 \quad (41)$$

である。

ここで、追加極 ψ_i が評価関数の荷重行列 Q, R の値によって z 平面上に配置されるが、単位円内、単位円上、単位円外の3領域について考える。まず、追加多項式 $\lambda(z)$ のパラメータ λ_i と追加極 ψ_i ($i=1 \sim k$) の関係を求め、この関係と追加極を z 平面の単位円周上に配置する条件を用いて評価関数の荷重行列 Q, R と追加極の関係を導出する。追加多項式 $\lambda(z)$ は、(18)式から $\lambda(z) = 1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{-i}$ であり z について $\lambda(z) = z^k + \lambda_k z^{k-1} + \dots + \lambda_1 z + \lambda_0$ と表せる。 $k=1$ の場合、 $\lambda(z) = z + \lambda_1$ となるから $\lambda(z)=0$ の根を z 平面の単位円上に配置するには明らかに $\lambda_1=1$ とおけばよい。また、 $k=2$ の場合は追加極を一般的に複素数と仮定し $\psi_1 = \eta + j\delta, \psi_2 = \eta - j\delta$ とすれば $\lambda(z)$ は

$$\lambda(z) = z^2 + \lambda_1 z + \lambda_2 = (z - \eta - j\delta)(z - \eta + j\delta) = z^2 - 2\eta z + \eta^2 + \delta^2 \quad (42)$$

と表すことができ、(42)式の両辺を比較することにより $\lambda_1 = -2\eta, \lambda_2 = \eta^2 + \delta^2$ を得る。ここで $\lambda_2 = \eta^2 + \delta^2 = 1$ とおけば

$$|\psi_1| = |\psi_2| = \sqrt{\eta^2 + \delta^2} = 1 \quad (43)$$

となり $\lambda_2=1$ とおくことは追加極を単位円周上に配置したこととなる。同様に、任意の k に対して $\lambda_k=1$ とすれば k 個の追加極の大きさは $|\psi_1| = |\psi_2| = \dots = |\psi_k| = 1$ となり、全ての追加極は単位円周上に存在する。なお、 k が奇数ならば $\lambda_k = -1$ の場合も考えられるが、以下のように誘導される条件式において q または r に負の値が生じる。(8)式において仮定した正定対称な荷重行列の定義に反することから $\lambda_k = -1$ は考えなくてよい。そこで、例題の $k=2$ の場合(28)式から

$$\lambda_2 = (u_0 - \alpha_2)/\alpha_1 \quad (44)$$

となり、(40)式から得られる α_1, α_2 を代入し $\lambda_2=1$ において整理すれば、追加極を単位円周上に配置した場合の q と r の関係式が次式のように求まる。

$$q \left(\frac{b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right)^2 = qK^2 = r \quad (45)$$

ここに、 K は制御対象のゲインである。(45)式は z 平面の単位円周上に追加極を配置する条件式であり $n=2, k=2$ の場合について導出したが、この関係式 $qK^2 = r$ は $N=n+k$ ($k \geq 1$) とした一般的な場合にも成立する。したがって、一般的な q と r の関係を単位円を基準とした追加極の位置について分けて表せば次式のようになる。

$$\begin{aligned} qK^2 &> r && \text{(単位円内)} \\ qK^2 &= r && \text{(単位円周上)} \\ qK^2 &< r && \text{(単位円外)} \end{aligned} \quad (46)$$

無定位性の場合は、 K が無限大と考えられることから全ての追加極は単位円周内に存在し

$$qK^2 > r \quad (\text{単位円内}) \quad (47)$$

が常に成り立ち、荷重行列 q を固定した場合荷重 r を大きくする程追加極は単位円に近づく。なお、追加極の位置と有限整定応答の関係を検討するため、5章で最適有限整定サーボ系の設計を行い、6章で荷重行列を変化させた数値例を示す。

5. 最適有限整定サーボ系の設計

図1 最適有限整定サーボ系の構成

Fig. 1. Configuration of optimal deadbeat servosystem.

本章では、2章で求めたオーバーパラメータモデルのパラメータ $\bar{a}(z)$, $\bar{b}(z)$ を用いて、(20)式の規範モデル応答 $\bar{y}(z) = \bar{u}_0 \bar{b}(z)/(1-z^{-1})$ と閉ループ応答が一致する1形サーボ系を設計する。最適有限整定サーボ系の制御構成は、文献1)で提案されている図1の制御構成を用いることとする。主ループに積分要素をもった緩和フィルタ $D_f(z)$ を加え、状態フィードバックによって局部補償される閉ループ系を考える。ここに r は目標値、 e は偏差、 y は制御量であり、 $d(z)$ および $f(z)$ は次式で与えられるものとする。

$$d(z) = \sum_{i=0}^l d_i z^{-i} \quad (l = N - n) \quad (48)$$

$$f(z) = \sum_{i=1}^m f_i z^{-i} \quad (m = \max(n, n + l - 1)) \quad (49)$$

なお、フィードバックゲイン $f(z)$ の次数 m は最適制御段数 N より定まり、過去の状態値もフィードバックしている。一方、図1の閉ループ系の伝達関数 $G_y(z)$ は次式のように表される。

$$G_y(z) = \frac{b(z)d(z)}{(1-z^{-1})\{1+a(z)+f(z)\}+b(z)d(z)} = \frac{b(z)d(z)}{R(z)} \quad (50)$$

ここで、閉ループ系が $N=n+k$ 段で有限整定するためには、 $G_y(z)$ のすべての極を零に配置することから $G_y(z)$ の分母である $R(z)=1$ が成立すればよい。このとき、閉ループ系の単位ステップ入力に対する応答は(50)式から

$$\bar{y}(z) = b(z)d(z)/(1-z^{-1}) \quad (51)$$

と表され、(20)式の有限整定応答 $\bar{y}(z) = \bar{u}_0 \bar{b}(z)/(1-z^{-1})$ と一致すればよいので、両式を比較すれば $d(z) = \bar{u}_0 \lambda(z)$ が得られる。ここで、 $\lambda(z)$ のパラメータ λ_i は、(19)式で与えられるから、 $d(z)$ のパラメータ $d_i (i=0 \sim k)$ は

$$d_i = \bar{u}_0 \lambda_i = \bar{u}_0 (\bar{a}_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{i-j} a_j) \quad (52)$$

と定まる。また、(50)式の $R(z)=1$ とおき、(52)式の d_i を代入して z^{-1} のべき乗の係数をすべて零とおけば、フィードバックゲイン $f(z)$ のパラメータ $f_i (i=1 \sim m)$ は次式のように得られる。

$$f_i = -a_i + \bar{u}_0 \sum_{j=i+1}^m \bar{b}_j \quad (53)$$

なお、 $N=n$ とおけば(48)、(49)式の $l=0$ で $d(z)=u_0$ とおくことになり、図1の制御系は最短時間有限整定制御系となる。

以上のように設計された $d(z)$, $f(z)$ を用いて図1の制御系を構成すれば、最適有限整定1形サーボ系が状態フィードバックによって実現できる。

また、 $d(z)$, $f(z)$ はステップ状目標値に注目して最適有限整定制御系を設計したが、ステップ状の外乱に対しても有限整定応答が得られる制御系となっている。図1において制御対象の入力端に加わる外乱を d_s' 、出力応答を y' とすれば、 d_s' と y' の間の閉ループ伝達関数は

$$G'(z) = \frac{y'(z)}{d_s'(z)} = \frac{b(z)}{(1-z^{-1})\{1+a(z)+f(z)\}+b(z)d(z)} \quad (54)$$

となる。よって、ステップ状の外乱 d_s' に対する応答は整定条件 $R(z)=1$ を代入すれば $y'(z)=b(z)$ となり、 $b(z)$ の次数は n であるから、図1のサーボ系は入力端に加わるステップ状外乱に対し、 n 段で有限整定する。

6. 数値例

2つの例題について前章で説明したサーボ系の設計例を示し、パラメータ変動がおこった場合に(46)、(47)式の条件が出力応答にどのように影響するかをディジタルシミュレーションによって検討する。

まず、伝達関数が $G(s)=1/(1+0.4s+s^2)$ で表される定位性の制御対象を考え、サンプル周期を $\theta=1.0\text{sec}$ とし、(8)式の評価関数の荷重行列を $Q=I$ (I : 単位行列) に固定し、 $R=0.01I, I, 100I$ の場合についてサーボ系を設計する。

$G(s)$ の最短制御段数は $N=n=2$ であり、対応する最短有限整定操作量は(11)式から得られ

$$u_0 = [1.319, 0.115, 1.000]^T \quad (55)$$

となる。この操作量に対する $G(s)$ の応答 y_i は(4)式から得られるので、(12)式から a_i, b_i を求めれば対応するパルス伝達関数 $G(z)$ は次式のように求まる。

表 1 数値例
Table 1. Numerical examples.

(A)								
$G(s) = \frac{1}{1 + 0.4s + s^2} \quad \theta = 1.0sec, Q = I$								
N	R	i	0	1	2	3	4	$f(z), \lambda(z), \psi$
2		u_i	1.319	0.115	1.000			$f(z) = 1.377z^{-1} - 0.670z^{-2}$
		a_i		-0.912	0.670			$\lambda(z) = 1$
		b_i		0.405	0.352			
4	0.01I	$\bar{u}_i$	1.972	-0.744	1.678	0.823	1.000	$f(z) = 1.113z^{-1} - 0.794z^{-2} + 0.093z^{-3}$
		$\bar{a}_i$		-1.377	1.228	-0.433	0.089	$\lambda(z) = 1 - 0.464z^{-1} + 0.133z^{-2}$
		$\bar{b}_i$		0.405	0.164	-0.109	0.047	$\psi = 0.232 \pm 0.282i$
	I	$\bar{u}_i$	0.429	0.498	0.794	0.712	1.000	$f'(z) = 1.738z^{-1} - 0.182z^{-2} + 0.151z^{-3}$
		$\bar{a}_i$		0.162	0.689	-0.192	0.670	$\lambda'(z) = 1 + 1.074z^{-1} + z^{-2}$
		$\bar{b}_i$		0.405	0.788	0.784	0.352	$\psi' = -0.537 \pm 0.843i$
	100I	$\bar{u}_i$	-0.096	0.519	0.861	0.404	1.000	$f''(z) = 1.951z^{-1} + 0.189z^{-2} + 0.313z^{-3}$
		$\bar{a}_i$		-6.384	-3.548	4.736	-6.174	$\lambda''(z) = 1 - 5.472z^{-1} - 9.211z^{-2}$
		$\bar{b}_i$		0.405	-1.863	-5.662	-3.250	$\psi'' = 6.822, -1.350$

(B)								
$G(s) = \frac{1}{s(1 + 0.4s + s^2)} \quad \theta = 1.5sec, Q = I$								
N	R	i	0	1	2	3	4	$f(z), \lambda(z), \psi$
2		u_i	0.476	-0.071	0.261	0.000		$f(z) = 2.722z^{-1} - 1.427z^{-2} + 0.670z^{-2}$
		a_i		-1.149	0.698	-0.548		$\lambda(z) = 1$
		b_i		0.437	1.340	0.320		
4	0.01I	$\bar{u}_i$	0.732	-0.365	0.440	-0.140	0.000	$f(z) = 1.828z^{-1} - 0.889z^{-2} + 0.466z^{-3}$
		$\bar{a}_i$		-1.499	1.100	-0.793	0.191	$\lambda(z) = 1 - 0.349z^{-1}$
		$\bar{b}_i$		0.437	1.187	-0.148	-0.112	$\psi = 0.349$
	I	$\bar{u}_i$	0.439	-0.029	0.236	0.020	0.000	$f'(z) = 1.956z^{-1} - 0.496z^{-2} + 0.560z^{-3}$
		$\bar{a}_i$		-1.066	0.603	-0.490	-0.045	$\lambda'(z) = 1 + 0.082z^{-1}$
		$\bar{b}_i$		0.437	1.376	0.431	0.026	$\psi' = -0.082$
	100I	$\bar{u}_i$	0.241	0.198	0.097	0.128	0.000	$f''(z) = 2.043z^{-1} - 0.230z^{-2} + 0.624z^{-3}$
		$\bar{a}_i$		-0.177	-0.419	0.130	-0.533	$\lambda''(z) = 1 + 0.972z^{-1}$
		$\bar{b}_i$		0.437	1.765	1.623	0.311	$\psi'' = -0.972$

$$G(z) = \frac{0.405z^{-1} + 0.352z^{-2}}{1 - 0.912z^{-1} + 0.670z^{-2}} \tag{56}$$

また、制御段数を $N=4$ ($k=2$) とすれば、最適有限整定操作量 u_2 は(13)式から

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= [1.972, -0.744, 1.678, 0.823, 1.000]^T & (Q = I, R = 0.01I) \\ u'_2 &= [0.429, 0.498, 0.794, 0.712, 1.000]^T & (Q = I, R = I) \\ u''_2 &= [-0.096, 0.519, 0.861, 0.404, 1.000]^T & (Q = I, R = 100I) \end{aligned} \right\} \tag{57}$$

が得られる。ここで(57)式の操作量に対応する応答 $\bar{y}_i$ は(4)式から得られるので $\bar{a}_i, \bar{b}_i$ を(16)式から求めれば、対応するオーバーパラメータモデル $\bar{G}(z)$ は次式のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}(z) &= \frac{0.405z^{-1} + 0.164z^{-2} - 0.109z^{-3} + 0.047z^{-4}}{1 - 1.377z^{-1} + 1.228z^{-2} - 0.433z^{-3} + 0.089z^{-4}} \\ \bar{G}'(z) &= \frac{0.405z^{-1} + 0.788z^{-2} + 0.784z^{-3} + 0.352z^{-4}}{1 + 0.162z^{-1} + 0.689z^{-2} - 0.192z^{-3} + 0.670z^{-4}} \\ \bar{G}''(z) &= \frac{0.405z^{-1} - 1.863z^{-2} - 5.662z^{-3} - 3.250z^{-4}}{1 - 6.384z^{-1} - 3.548z^{-2} + 4.736z^{-3} - 6.174z^{-4}} \end{aligned} \right\} \tag{58}$$

さらに、(56)、(58)式のパラメータ $a_i, \bar{a}_i$ と(19)式から

$$\left. \begin{aligned} \lambda(z) &= 1 - 0.464z^{-1} + 0.133z^{-2} \\ \lambda'(z) &= 1 + 1.074z^{-1} + z^{-2} \\ \lambda''(z) &= 1 - 5.472z^{-1} - 9.211z^{-2} \end{aligned} \right\} \tag{59}$$

を得る。この $\lambda(z)$ と(57)式の最適有限整定操作量の初段の値 $\bar{u}_0$ を用いれば、(52)式より主ループ緩和フィルタ $D_i(z)$ の分子 $d(z)$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} d(z) &= 1.972 - 0.917z^{-1} + 0.263z^{-2} \\ d'(z) &= 0.429 + 0.461z^{-1} + 0.429z^{-2} \\ d''(z) &= -0.096 + 0.527z^{-1} + 0.888z^{-2} \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

また、フィードバックゲイン $f(z)$ については(53)式より

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= 1.113z^{-1} - 0.794z^{-2} + 0.093z^{-3} \\ f'(z) &= 1.738z^{-1} - 0.182z^{-2} + 0.151z^{-3} \\ f''(z) &= 1.951z^{-1} + 0.189z^{-2} + 0.313z^{-3} \end{aligned} \right\} \tag{61}$$

を得る。

図2 最適有限整定制御の比較

$$G(s)=1/(1+0.4s+s^2)$$

Fig. 2. Comparison of the optimal deadbeat responses.

図3 追加極の位置 $G(s)=1/(1+0.4s+s^2)$

Fig. 3. Position of extra pole.

図4 最適有限整定制御の比較

$$G(s)=1/\{s(1+0.4s+s^2)\}$$

Fig. 4. Comparison of the optimal deadbeat responses.

図5 追加極の位置 $G(s)=1/\{s(1+0.4s+s^2)\}$

Fig. 5. Position of extra pole.

以上のように設計された最適有限整定操作量，制御装置および $\lambda(z)$ を表1(A)に整理して示した。

次に，制御対象の伝達関数が $G(s)=1/\{s(1+0.4s+s^2)\}$ で表される無定位性の系を考え，サンプル周期を $\theta=1.5\text{sec}$ ，評価関数の荷重行列を $Q=I$ に固定し $R=0.01I, I, 100I$ とし，制御段数を $N=4$ と選んだ場合についても同様に設計を行い表1(B)に整理して示した。

ここで， $G(s)=1/(1+0.4s+s^2)$ に対し表1(A)のように設計された制御装置を用いて，図1のサーボ系を構成した場合におけるステップ状目標値に対する出力応答のデジタルシミュレーション結果を図2の(a)，(b)，(c)に示した。なお，制御対象はゲイン $K=1$ ，減衰定数 $\zeta=0.2$ なる2次振動系であるが，ゲイン K に $\pm 5\%$ ，減衰定数 ζ に $\pm 2.5\%$ のパラメータ変動を与えた場合の応答を”点線”と”一点鎖線”で示している。また，同図における(a)は $(Q=I, R=0.01I)$ ，(b)は $(Q=I, R=I)$ ，(c)は $(Q=I, R=100I)$ の場合であり，このときの追加極の移動の様子を図3に示している。ここで(a)，(b)，(c)を比較すれば，荷重行列を $(Q=I, R=I)$ と選び追加極を単位円周上に配置した(b)図がパラメータ変動に対し過渡応答波形の誤差が比較的小さく整定時間が他の応答と比べ短くなっている。

次に， $G(s)=1/\{s(1+0.4s+s^2)\}$ に対し表1(B)のように設計された制御装置を用いて，図1のサーボ系を構成した場合のステップ状目標値に対する出力応答のデジタルシミュレーション結果と伝達関数にパラメータ変動を与えた場合の応答を図4に示した。また，このときの追加極を図5に示した。ここで，図4(a)，(b)，(c)を比較すると，荷重行列 $(Q=I, R=100I)$ と選び追加極をもっとも単位円周近傍に配置した(c)図がパラメータ変動に対して図2(b)と同様な結果となっている。

制御仕様における速応性の面からも検討を要するため，制御段数 N と評価関数の荷重行列 Q, R をいかに選ぶかは課題の一つであるが，上記の結果から単位円の近傍に追加極を配置すればパラメータ変動に対してより良好な応答が得られ，(46)式の $qK^2=r$ なる条件は一つの目安となることがわかる。

7. まとめ

制御対象のステップ応答を用いた簡単な行列演算から，偏差 e と操作量 u_k に関する2次形式評価を最小化する最適有限整定操作量 u_k を求め，この u_k に対する制御対象の出力応答を閉ループ系の規範モデル応答とする最適有限整定サーボ系の設計法を示し，従来の手法よりも実用的なことをこれまで指摘してきた。しかし， e, u_k に対する荷重行列 Q, R をいかに選ぶかは試行を繰り返す必要があった。そこで，筆者らの手法により u_k を求め， u_k に対応したオーバパラメータモデル $\bar{G}(z)$ の分母子に含まれる追加多項式 $\lambda(z)=0$ の根 ψ_i (追加極)と $Q=qI, R=rI$ (I :単位行列)の関係について $qK^2=r$ なる条件を満足すれば，追加極 ψ_i を z 平面的単位円上に配置できることを明らかにした。この条件

を満たすように q, r を選んで，追加極を単位円の近傍に配置した規範モデルを作れば，良好な制御応答が得られ制御対象のパラメータ変動に対しても比較的頑健なサーボ系が設計できた。なお，単位円の近傍への追加極の配置とパラメータ変動に関する証明は今後の課題である。また，有限整定サーボ系の設計における整定段数 N と Q, R の選択は制御系設計における大きな課題であるが，ここで得られた結果は一つの指標を与えるものと思われる。なお，最適有限整定サーボ系については文献1)の制御構成を用いたが，他の制御構成に対しても同様に設計できる。

(平成10年2月26日受付，平成10年10月21日再受付)

文 献

- (1) 西村・米沢：「緩和フィルタを用いる有限時間整定制御系の設計」，システム制御情報学会論文誌Vol. 4-10, 399/406, 1991
- (2) 西村・米沢・櫛田：「操作量飽和のある系に対する有限時間整定制御装置の設計」，計測自動制御学会論文集Vol. 22-11, 1134/1141, 1986
- (3) 瓜倉・長田：「過渡応答を考慮した離散時間システムに対するデッドビート制御」，計測自動制御学会論文集Vol. 23-4, 353/357, 1987
- (4) 瓜倉：「連続時間過渡応答を考慮に入れたデッドビート制御」，システム制御情報学会論文集Vol. 5-6, 229/234, 1992
- (5) 村田・相良：「インパルス応答を用いた最適有限整定応答制御装置の設計」，計測自動制御学会論文集 Vol. 20-12, 1073/1080, 1984
- (6) 村田・相良：「状態フィードバックによる最適有限整定制御系の設計」，電気学会論文誌 C, 109-6, 432/438, 1989
- (7) 村田・中野・松本：「最適有限整定応答制御系の一設計法」，電気学会論文誌 C, 116-10, 1141/1148, 1989

松島 優一 (学生員) 1974年8月20日生。1997年3月広島工業大学電子工学科卒業。同年広島工業大学大学院工学研究科博士前期課程電子工学専攻入学，現在に至る。主として最適有限整定制御に関する研究に従事。

若宮 真一郎 (学生員) 1974年12月16日生。1997年3月広島工業大学電子工学科卒業。同年広島工業大学大学院工学研究科博士前期課程電子工学専攻入学，現在に至る。主として最適有限整定制御に関する研究に従事。

村田 弘志 (正員) 電気学会論文誌 Vol. 119-C, No. 2 1999 参照