非最小位相系に対する最適レギュレータの極限形を用いた 近似非干渉制御

非会員 鈴木 亮 一 (北陸先端科学技術大学院大学)

非会員 小林 伸 明 (金 沢 工 業 大 学)

正 員 藤 田 政 之 (金 沢 大 学)

Decoupling Control with Limiting Form of Linear Optimal Regulators for Non-minimum Phase System

Suzuki Ryoichi, Non-member (JAIST), Kobayashi Nobuaki, Non-member (Kanazawa Institute of Technology), Fujita Masayuki, Member (Kanazawa University)

In this paper, a decoupling control for a non-minimum phase system is considered from a limiting form of linear optimal regulator problems point of view, and an explicit relationship between the limiting properties and a decoupling control is shown. Moreover, using an appropriate performance index, this paper deals with the new method on the decoupling control to keep out the effect of the natural poles by pole-zero cancellation. The properties of stability and sensitivity are improved by this method. This paper also gives numerical examples to illustrate effectiveness on decoupling control with a limiting form.

キーワード：最適レギュレータ，多変数システム，非最小位相系，非干渉制御，極配置

1. はじめに

最適レギュレータの研究において，2次形式評価関数の出力や入力に関する重み行列の極限を考える研究が，連続時間系⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾や離散時間系⁽⁴⁾⁽⁵⁾に対して数多くなされてきている。

一方，非干渉制御は，多変数システムの制御に対するよく知られた制御理論のひとつである⁽⁶⁾。しかし，一般に安定な非干渉系を得るためには，いろいろな条件を確認しなければならず導出手順がたいへん面倒であった。また，非干渉化特性が最適レギュレータの性質のひとつにあることは知られていたが，それを直接明らかにしようとした研究はあまり知られていない。

これに対して筆者らは，非干渉化条件を満足する最小位相系に対して評価関数の重み行列を直接操作して得られる極限フィードバックゲインと，それから構成されるフィードフォワードゲインによる制御則によって非干渉化が達成できることを，極限形のもつ出力零化特性⁽⁷⁾や，外乱分離特性⁽⁸⁾を利用して明らかにしてきた⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。また，類似研究としては，最適レギュレータの漸近特性と非干渉制御の間接的な関係を明らかにしたILQ設計法がある⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。しかし，最適レギュレータの極限的性質を用いる利点には，評価関数の重み行列を直接操作するだけで非干渉化が達成で

き，しかも安定な最大のブロック分けが先験的な条件の確認なしにできることがあげられる。

しかしながら，これまでに明らかにした極限形と非干渉制御の直接的関係は，制御対象を最小位相系に限定した議論であり，非最小位相系に対しては明らかにされていなかった。そこで，本論文では，与えられたシステムを最小位相系と限定せずに，どのような非最小位相系に対して極限的性質を用いた非干渉制御が可能であるかを考える(ここでは，系のすべての不変零点が複素左半平面に存在するものを最小位相系と呼び，それ以外の系を非最小位相系と呼ぶことにする)。ただし，この手法においては，複素右半平面の不変零点を安定域に写像した固定極が生じる。この固定極が原点近くに存在する場合，非干渉系の安定性や感度を悪化させる原因になることがある。そこで，新たな評価関数を選ぶことにより，固定極の影響を少なくした形で最適レギュレータの極限形を用いて非干渉化する方法を提案する。この方法により，もとの非干渉化特性を変えずに，非干渉系のロバスト安定性や感度を調節できる自由度が広がることになる。これは，非最小位相系に限らず最小位相系においても固定極の存在する非干渉系に対して適用できる結果である。

本論文の構成はつぎのとおりである。2章で，本論文で明らかにする問題を設定する。3章では，すでに知られて

いる最適レギュレータの極限的性質や、最小位相系の非干渉化特性についてまとめる。4章では、最小位相系に対する非干渉化特性を、どのようなクラスの非最小位相系にまで拡張できるかを述べる。5章では、新たな評価関数を選ぶことにより、固定極の影響を少なくした形で非干渉化する方法を示し、この方法によりロバスト安定性を向上させ、感度が低下することを明らかにする。

2. 問題設定

本論文をとおりて、つぎの連続時間システムの最適レギュレータ問題を考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $x \in R^n$, $y \in R^m$, $u \in R^m$ である。また、システム (A, B, C) は可制御、可観測で可逆とする。このシステムに対し、標準的2次評価関数

$$J = \int_0^\infty (y^T Q y + u^T R u) dt, \quad Q > 0, \quad R > 0 \quad (2)$$

を最小とする制御入力 u は、重み行列を $R = I$, $Q \rightarrow \frac{1}{\epsilon^2} I$ ($\epsilon \rightarrow 0$) とすれば、

$$u = F_\epsilon x = -B^T N_\epsilon x \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$A^T N_\epsilon + N_\epsilon A - N_\epsilon B B^T N_\epsilon + \frac{1}{\epsilon^2} C^T C = 0 \quad \dots\dots (4)$$

与えられる。このとき、フィードバックゲイン F_ϵ による閉ループ系について、 $\epsilon \rightarrow 0$ としたときの極限における非干渉化特性について議論する。理論的には $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において完全な非干渉化を考えることができるが、実際の制御系設計では、評価関数の重み Q を無限大にすることは不可能であるため ϵ を微小な値として近似的な非干渉系を構成することになる。そこで、このように評価関数の重みを有限として非干渉系を構成することを、近似非干渉制御と呼ぶことにする。なお、簡単のため $CB = 0$, $\text{rank } CAB = \text{rank } C$ の条件を仮定して説明をするが、一般的な可逆システムにまで拡張できることを注意しておく。

これまでの研究では、最小位相系に対する最適レギュレータの極限形と近似非干渉制御の関係がすでに明らかにされている⁽¹⁰⁾。そこで、本論文ではつぎの問題を考えることを目的とする。

- (1) 最小位相系に対する最適レギュレータの極限的性質を用いた非干渉化の手法を、どのようなクラスの非最小位相系に拡張できるのかを考える。
- (2) 非最小位相系に対する外乱分離特性を用いる場合、不安定零点を安定域に写像する固定極が非干渉系に現れる。これが原点近くに存在する場合、非干渉系の安定性や感度を悪化させる原因になることがある。そこで、この問題を解消するために、固定極の影響を少なくする非干渉化手法を考える。

3. 準備

本章では、2章で述べた問題を解決するために、これまで明らかにされている最適レギュレータの極限的性質や、最小位相系に対してすでに明らかになっていることをまとめる。これらの結果は、Friedlandの手法⁽¹⁾に基づき文献(7)(8)(10)で導出したものである。また、最大不可観測空間や外乱分離条件などの用語については、文献(6)に準拠している。

(3・1) 最適レギュレータの極限的性質

(3・1・1) 最小位相系の極限形と外乱除去特性 (3)式のゲイン F_ϵ に対して、Friedlandの手法⁽¹⁾に基づき(4)式のリカッチ方程式の解 N_ϵ に対して、 N_ϵ^{-1} の級数展開

$$N_\epsilon^{-1} = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \dots\dots\dots (5)$$

が存在するとすれば、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において、最適レギュレータの極限形が得られる⁽⁷⁾。ただし、 $P_0, P_1, P_2, \dots$ は対称行列である。

さらに、(1)のシステムに加法的に外乱を印加したシステム

$$\dot{x} = Ax + Bu + D\xi, \quad y = Cx \quad \dots\dots\dots (6)$$

を考える。このとき、(3)式の F_ϵ を施したとき、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において、つぎの外乱除去特性が知られている。

〔補題 3.1〕⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾ (A, B, C) が最小位相系で可逆とする。このとき、 F_ϵ を用いた閉ループ系は $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において、最大不可観測なシステムとなり、外乱分離条件を満足すれば、 $\text{Im } D$ は不可観測空間に含まれる。また、 $CB = 0$, $\text{rank } CAB = \text{rank } C$ のもとでは、 i 番目の出力からの可観測部分空間は、 $\text{Im}(C_i^T (C_i A)^T)$ となる。

(3・1・2) 非最小位相系の極限形式と外乱除去特性 つぎに、非最小位相系 (A, B, C) の極限的性質について、これまでに知られていることを要約しておく。いま、(1)式のシステム (A, B, C) が虚軸上に不変零点を持たないとする

$$\begin{aligned} & B^T(-sI - A^T)^{-1} C^T C(sI - A)^{-1} B \\ &= B^T(-sI - A^T)^{-1} H^T H(sI - A)^{-1} B \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

を満足し、システム (A, B, H) の不変零点がシステム (A, B, C) の安定零点および不安定零点の鏡像位置の零点となる H が存在する。この H を利用することで、非最小位相系に対しても N_ϵ が定義でき、 $z = N_\epsilon x$ の変換により非最小位相系の極限形式がつぎの補題 3.2 のように得られる。

〔補題 3.2〕⁽⁶⁾ システム (A, B, C) が非最小位相系で、 (A, B, H) が最小位相系となる H が存在する。いま $Hx(0) = 0$, $HAx(0) = 0$ が成り立つとき、閉ループ系の極限形式は

$$\dot{z} = -(I - H^T H_\alpha^\dagger A^T) A^T z \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$H_\alpha^\dagger = (H_\alpha B B^T H_\alpha^T)^{-1} H_\alpha (B B^T - A P_0) \quad \dots\dots (9)$$

となり、リカッチ方程式の極限形は

$$\begin{aligned} & P_0 A^T (I - H_\alpha^+ H_\alpha)^T + (I - H_\alpha^+ H_\alpha) A P_0 \\ & - (I - H_\alpha^+ H_\alpha) B B^T \\ & + P_0 A^T H_\alpha^T (H_\alpha B B^T H_\alpha^T)^{-1} H_\alpha A P_0 = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

である。ここで

$$H_\alpha = H A \dots\dots\dots (11)$$

$$H_\alpha^+ = B B^T H_\alpha^T (H_\alpha B B^T H_\alpha^T)^{-1} \dots\dots\dots (12)$$

とする。

この補題 3.2 の非最小位相系についても、最小位相系の場合と同様に外乱除去特性が知られている。(6) 式の外乱印加系に対して、 (A, B, C, D) が外乱分離条件を満足するとき、つぎの補題が成立する。

〔補題 3.3〕⁽⁸⁾ システム (A, B, C, D) が外乱分離条件を満足し、システム (A, B, C) の不変零点からつぎの z_0^*

$$z_0^* = \{z \mid \text{rank} \begin{pmatrix} -zI + A & B & D \\ C & 0 & 0 \end{pmatrix} < n+m\} \quad (13)$$

を除いた z_0^- の実部がすべて負であるとする。このとき、フィードバックゲイン F^* がシステム (A, B, H) の閉ループ系 $(A + B F^*, B, H)$ を安定で、最大不可観測とするならば、システム $(A + B F^*, B, C)$ の不可観測空間に $\text{Im } D$ を含む。さらに、システム (A, B, H, D) は外乱分離条件を満足する。

〈3.2〉 最小位相系に対する非干渉化特性 最小位相系に対して、最適レギュレータの極限的性質を用いて、つぎのようなブロック非干渉化を達成することがわかっている。

〔補題 3.4〕⁽¹⁰⁾ システム (A, B, C) が最小位相系で、つぎのブロック型対角インタラクタが存在すると仮定する。

$$\xi_T(s) = \begin{pmatrix} \xi_{T_1}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_{T_p}(s) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} & \text{rank } D_\alpha = m, \quad T_0(s) = C(sI - A)^{-1} B \\ & \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_T(s) T_0(s) = D_\alpha \quad (p \leq m) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

制御則

$$u = F_\epsilon x + G_\epsilon w \dots\dots\dots (16)$$

$$G_\epsilon = (C(-A - B F_\epsilon)^{-1} B)^{-1} \dots\dots\dots (17)$$

は、 $\epsilon \rightarrow 0$ の閉ループ系の極限において

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C(sI - A - B F_\epsilon)^{-1} B G_\epsilon \\ & = \text{diag}(\Phi_1(s) \dots \Phi_p(s)), \quad \Phi_i(0) = I \dots (18) \end{aligned}$$

なるブロック非干渉化を達成する。

補題 3.4 は、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で与えられる結果であるが、評価関数の重みを無限大にすることは不可能であるため、実際には ϵ を微小な値として近似非干渉化を達成することになる。

補題 3.4 の特別な場合として、インタラクタ $\xi_T(s)$ が対角であるときには、スカラー非干渉化条件(後述する系 4.1 の条件 A2') が成立し、制御則 (16), (17) により、 $\epsilon \rightarrow 0$ としたときの閉ループ系の極限において、スカラー非干渉化を達成する⁽¹⁰⁾。

4. 非最小位相系の非干渉化特性

本章では、3 章でまとめた準備をもとに、非最小位相系に対する最適レギュレータの非干渉化特性について明らかにする。

〈4.1〉 非干渉化可能な非最小位相系のクラス (1) 式のシステムに対して、非最小位相系における最適レギュレータの極限形を用いた非干渉化条件と制御則を考える。さて、(6) 式の外乱印加系に対する非最小位相系の外乱除去特性は、補題 3.3 で与えられた。この補題 3.3 より補題 3.4 の結果は、非最小位相系について定理 4.1 の条件を満足するシステムのクラスまで拡張できる。

〔定理 4.1〕 システム (A, B, C) がつぎの条件

- A1 システム (A, B, C) は原点に不変零点を持たない
- A2 ブロック型対角インタラクタをもつ
- A3 (A, B, C) の不変零点から

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -\lambda^+ I + A & B \\ C_i & 0 \end{pmatrix} < n + p_i \dots (19)$$

を満たす λ^+ を除いたものが安定。ここで、 C_i は C の i 番目の行ブロックを表す。

を満足するとき、制御則 (16), (17) 式を用いたときの閉ループ系は、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において、

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C(sI - A - B F_\epsilon)^{-1} B G_\epsilon \\ & = \text{diag}(\Phi_1(s) \dots \Phi_p(s)), \quad \Phi_i(0) = I \dots (20) \end{aligned}$$

なるブロック非干渉化を達成する。

(証明) : システム (A, B, C) が原点に不変零点を持たないので、(7) 式を満足し、 (A, B, H) が最小位相系となる H が存在する。この (A, B, H) について、(14) 式のブロック型対角インタラクタに対して、 $\bar{T}_0 = H(sI - A)^{-1} B$ とすれば (A, B, H) は最小位相系であるため補題 3.4 の (14), (15) 式より $\bar{D}_\alpha^{-1}$ が存在する。

(A, B, H) の i 番目と j 番目の入力に着目し、 i 番目の出力に対するサブシステム $(H_i, A, ((B \bar{D}_\alpha^{-1})_i (B \bar{D}_\alpha^{-1})_j))$ を考える。このサブシステムに対して、 $\bar{D}_\alpha \bar{D}_\alpha^{-1} = I$ であるから

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow \infty} \bar{\xi}_{T_i} H_i (sI - A)^{-1} ((B \bar{D}_\alpha^{-1})_i (B \bar{D}_\alpha^{-1})_j) \\ & = (0 \dots 0 I_{p_i} 0 \dots 0) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $i \neq j$ で $i, j = 1, 2, \dots, p$ であり、 H_i は H の i 番目の行ブロックを表し、 $(B\bar{D}_\alpha^{-1})_i$ は $B\bar{D}_\alpha^{-1}$ の i, j 番目の列ブロックを示す。つまり、 i 番目の出力ブロック端 y_i に対し、 i 番目の入力端の係数 $(B\bar{D}_\alpha^{-1})_i$ 、 j 番目の入力端を外乱とみなして、 $(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j$ ($i \neq j$) を外乱の係数とすると、外乱分離条件を満足していることになる。

そこで、制御則を $u = F_\epsilon x + \bar{D}_\alpha^{-1}v$ とすれば、補題 3.1 より F_ϵ は $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において、 i 番目の出力端から最大不可観測なシステムとするフィードバックゲインで、 i 番目の出力ブロックの不可観測空間に $\text{Im}((B\bar{D}_\alpha^{-1})_j)$ が含まれるので、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_i(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j = 0 \quad \dots (22)$$

が成立する。

ところで、 i 番目の入出力に着目して、サブシステム ($H_i, A + (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_i + (B\bar{D}_\alpha^{-1})_j(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_j, (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i$) を考え、 $(B\bar{D}_\alpha^{-1})_j$ を外乱項の係数とみなす。(A, B, C) の不安定零点が定理 4.1 の条件 A3 を満足していることは、補題 3.3 の条件を満足していることになるため、サブシステムのフィードバックゲイン $F_{\epsilon i}$ は $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において、補題 3.3 のフィードバックゲインと同様のはたらしめをする ($(C_i, A + B\bar{D}_\alpha^{-1}\bar{D}_\alpha F_\epsilon, (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i)$ と ($H_i, A + B\bar{D}_\alpha^{-1}\bar{D}_\alpha F_\epsilon, (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i$) の共通の安定零点を不可観測とする) ことから、補題 3.3 を適用すると

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_i(A + (B\bar{D}_\alpha^{-1})_i(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_i \\ + (B\bar{D}_\alpha^{-1})_j(\bar{D}_\alpha F_\epsilon)_j)^k (B\bar{D}_\alpha^{-1})_j = 0 \end{aligned} \quad \dots (23)$$

となる。ここで、 $i \neq j, k = 0, 1, \dots$ である。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}B\bar{D}_\alpha^{-1} \\ = \text{block diag} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\Phi}_p(s) \end{pmatrix} \quad \dots (24) \end{aligned}$$

が成立する。

つぎに、フィードフォワード項の決め方を考える。システム (A, B, C) は原点に不変零点を持たないので

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \dots (25)$$

であり、つぎの行列 E_ϵ が定義できる。

$$E_\epsilon = \{C(-A - BF_\epsilon)^{-1}B\bar{D}_\alpha^{-1}\}^{-1} \quad \dots (26)$$

このとき、システム ($A, B\bar{D}_\alpha^{-1}, C$) に対し、制御則

$$u = F_\epsilon x + E_\epsilon v \quad \dots (27)$$

としたシステムは

$$\text{rank } (C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}B\bar{D}_\alpha^{-1}E_\epsilon) = m \quad \dots (28)$$

となる。よって、 $\bar{\Phi}_i(s)$ はフルランクである。

さらに、

$$\begin{aligned} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}B\bar{D}_\alpha^{-1}E_\epsilon \\ = C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}B\bar{D}_\alpha^{-1} \\ \cdot \{C(-A - BF_\epsilon)^{-1}B\bar{D}_\alpha^{-1}\}^{-1} \\ = C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BG_\epsilon \quad \dots (29) \\ G_\epsilon = (C(-A - BF_\epsilon)^{-1}B)^{-1} \end{aligned}$$

であるから、制御則を (16), (17) 式と選んだときの閉ループ系に対して、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C(sI - A - BF_\epsilon)^{-1}BG_\epsilon \\ = \text{block diag} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_1(s)\bar{\Phi}_1^{-1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\Phi}_p(s)\bar{\Phi}_p^{-1}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \dots (30)$$

が成立し、ブロック非干渉化を達成する。□

定理 4.1 を実際の制御系設計に適用する場合も、補題 3.4 の最小位相系の場合と同様、 ϵ を微小な値として近似非干渉化を達成することになる。

この定理 4.1 の特別な場合として、つぎの系 4.1 が成立しスカラー非干渉化を達成する。

〔系 4.1〕 システム (A, B, C) がつぎの条件

- A1' システム (A, B, C) が原点に不変零点を持たない
- A2' スカラー非干渉化条件

$$\begin{aligned} \text{rank } B^* = m, \quad B^* = \begin{pmatrix} c_1 A^{d_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m-1} B \end{pmatrix} \\ d_i = \min \{k_i \mid c_i A^{k_i-1} B \neq 0\} \end{aligned}$$

を満足する。ここで $i = 1, \dots, m$ で c_i は C の i 番目の行ベクトルである。

A3' (A, B, C) の不変零点 z_0 から

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -\lambda_i I + A & B \\ c_i & 0 \end{pmatrix} < n + 1 \quad \dots (31)$$

を満たす λ_i を除いたものが安定

を満足するとき、制御則 (16), (17) 式を用いたときの閉ループ系は、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において、スカラー非干渉化を達成する。

〔注意 4.1〕 定理 4.1 で導出した、最適レギュレータの極限形を用いた非干渉化は、評価関数の重み行列を直接操作した結果得られたものであり、非干渉化の先験的条件の確認をせずに、安定な最大ブロック分けが可能となるという特徴をもつ。ただし、不安定零点を安定域に写像した固定極ができることを注意する。

〔注意 4.2〕 固定極の影響を考えずに非干渉化を達成することだけを考えるならば、定理 4.1 の条件を満足するシステムに対して、 H を導出することなく最小位相系の場合と全く同様の手順により、最適レギュレータの極限的性質を用いて非干渉系を得ることが可能である。また、インタラクタの計算も必要としない。

〔注意 4.3〕 このように (A, B, C) が非最小位相系の場合、最小位相系 (A, B, H) については文献 (10) と同様の手法により証明ができるが、システム (A, B, C) については、非干渉化の際に生じる固定極についての条件 A3' を詳細に検討することにより、定理 4.1 のように証明できることに注意されたい。

〔4.2〕 数 値 例 つぎの 2 入力 2 出力システムを考える。

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

システム (A, B, C) は非最小位相系で可制御、可観測かつ可逆で、非干渉化の条件を満足することが容易にわかる。また、このシステムは +1 に不変零点をもつものの、定理 4.1 の条件を満足する。そこで、評価関数の重みを $Q = 100I$ 、 $Q = 10^4 I$ として得られるフィードバックゲインとフィードフォワードゲインを用いて、シミュレーションを行なう。制御則は $u = F_\epsilon x + G_\epsilon [v_1 \ v_2]^T$ とし、時刻 1 秒目から入力 v_1 に単位ステップ入力、入力 v_2 に零を入力したときの応答を図 1 に示す。それぞれ、破線が $Q = 100I$ 、実線が $Q = 10^4 I$ としたときの閉ループ系の応答を表している。図から明らかなように、 $Q \rightarrow \infty I$ としていくにつれてそれぞれの入力に対する変数の相互干渉がなくなり、非干渉化が達成されていくことがわかる。非最小位相系のため応答にはアンダーシュートが現れているものの、定理 4.1 の条件を満たしていれば、最小位相系の場合と同様の手順で非干渉系を構成できることが確認できる。

5. 固定極の影響と非干渉系の安定性と感度

〔5.1〕 固定極の影響を少なくする非干渉化 システムの伝達特性が変化するとき、原点近くに固定極が存在すると非干渉系の安定性や感度が極端に悪くなる可能性がある。そこで、固定極をできるだけ消去した形で最適レギュレータの極限形を用いた非干渉化を実現するために、新しい評価関数の選び方を考える。

簡単のため、スカラタイプの非干渉系について考える。まず、つぎの補題 5.1 が成立する。

〔補題 5.1〕 システム (A, B, C) が系 4.1 の A2', A3' の

図 1 Step response for closed-loop system
(---: $Q = 100I$, —: $Q = 10^4 I$)

条件を満足するとき、つぎの条件 B1, B2 を満たす P が存在する。

B1 (A, B, P) がスカラ非干渉化条件を満足する

B2 (A, B, P) の不変零点から

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -\bar{\lambda}_i I + A & B \\ p_i & 0 \end{pmatrix} < n + 1 \quad \cdots (32)$$

を満たす $\bar{\lambda}_i$ を除いたものが、条件 A3' の $z_0 - \{\lambda_i\}$ に一致する。ここで、 p_i は P の i 番目のベクトルである。

(証明): 条件 B1, B2 を満たす P の存在は、つぎのように具体的に求める手順を示すことにより証明する。

システム (A, B, C) が非干渉化条件を満足しているから、積分型非干渉系 (A_{F_d}, B_{G_d}, C) を構成する F_d, G_d が存在する。ただし、 $A_{F_d} = A + BF_d$ 、 $B_{G_d} = BG_d$ である。積分型非干渉系は、標準非干渉系⁽¹³⁾に変換でき

$$A_{F_d} \sim \begin{pmatrix} \tilde{A}_{F_{d_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{A}_{F_{d_m}} & 0 \\ \tilde{A}_{F_{d_1}}^C & \cdots & \tilde{A}_{F_{d_m}}^C & \tilde{A}_{F_{d_{m+1}}}^C \end{pmatrix},$$

$$B_{G_d} \sim \begin{pmatrix} \tilde{B}_{G_{d_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{B}_{G_{d_m}} \\ \tilde{B}_{G_{d_1}}^C & \cdots & \tilde{B}_{G_{d_m}}^C \end{pmatrix},$$

$$C \sim \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \tilde{C}_m & 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (33)$$

と表すことができる。このサブシステム $(\tilde{A}_{F_{d_i}}, \tilde{B}_{G_{d_i}}, \tilde{C}_i)$ を可制御正準形に変換しておけば、

$$\tilde{A}_{F_{d_i}} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ * & \cdots & & * \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{G_{d_i}} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}_i \sim (* \quad \cdots \quad *) \cdots \cdots \cdots (34)$$

とできる。(34) 式から明らかなように、サブシステムの不変零点は $\tilde{C}_i$ の値に依存している。そこで $\tilde{p}_i$ を $\tilde{p}_i = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$

と選定すると、サブシステム $(\tilde{A}_{F_d}, \tilde{B}_{G_d}, \tilde{p}_i)$ に不変零点は存在しない。この $\tilde{p}_i$ を逆変換して p_i を決定することができる。 (A_{F_d}, B_{G_d}, P) は非干渉系であるから、システム (A, B, P) は非干渉化条件 B1 を満足する。また、 (A, B, P) の不変零点は条件 A3' の $z_0 - \{\lambda_i\}$ に一致しており、(32) 式を満たすものは存在しないから、条件 B2 を満足することもわかる。□

さて、補題 5.1 の P によって、(1) 式のシステムに対して、最適レギュレータの極限的性質を利用した方法によって固定極の影響を少なくできる非干渉系の構成が、もとの非干渉化特性を変えることなく可能になる。

〔定理 5.1〕 システム (A, B, C) が系 4.1 の条件を満足するとき、つぎの評価関数

$$\tilde{J} = \int_0^\infty (x^T P^T Q P x + u^T u) dt \quad \dots\dots\dots (35)$$

を最小とする最適レギュレータの解で、フィードバックゲインを $\tilde{F}_\epsilon$ とすると、制御則

$$u = \tilde{F}_\epsilon x + \tilde{G}_\epsilon w \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$\tilde{G}_\epsilon = (C(-A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1}B)^{-1} \quad \dots\dots\dots (37)$$

を用いた閉ループ系は、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において非干渉化を構成し、固定極の一部は (32) 式を満たす。

(証明) : システム (A, B, P) に $\tilde{F}_\epsilon$ 、 $\tilde{G}_\epsilon$ を用いて、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると、この場合補題 3.4 よりスカラ系 (A, B, P) に対しても (18) 式が成り立つので⁽¹⁰⁾ (または定理 4.1 の証明を参照されたい)。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1}B\hat{G} \cdot \{P(-A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1}B\hat{G}\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (38)$$

は非干渉系である。ただし、 $\hat{G}$ は

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 A^{\tilde{d}_1} B \\ \vdots \\ p_m A^{\tilde{d}_m} B \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (39)$$

である。 (A, B, P) は補題 5.1 の選定法により最小位相系であり、補題 3.1 を満足する。また、補題 5.1 の条件のもとで、補題 3.4 によりつぎの式が成り立つ。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_i(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1}B\hat{G} = (0 \dots 0 \tilde{\phi}_i(s) 0 \dots 0) \quad \dots\dots\dots (40)$$

さらに、 $\text{Im} c_i^T \subset \text{Im}(p_i^T \dots (p_i A^{\tilde{d}_i})^T)$ であるから

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c_i(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1}B\hat{G} = (0 \dots 0 \tilde{\phi}_i(s) 0 \dots 0) \quad \dots\dots\dots (41)$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C(sI - A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1}B\hat{G} \\ & \cdot \{C(-A - B\tilde{F}_\epsilon)^{-1}B\hat{G}\}^{-1} \\ & = \text{diag}(\phi_1^*(s)\phi_1^{*-1}(0), \dots, \phi_m^*(s)\phi_m^{*-1}(0)) \quad (42) \end{aligned}$$

を得ることができ、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において非干渉化を達成する。□

p_i の選び方について、補題 5.1 の証明ではサブシステムに不変零点が現れないように決定したが、 $\tilde{p}_i$ の選び方によっては、サブシステムの零点 (固定極) の一部を指定できることがわかる。したがって、これを指定することで $Q \rightarrow \infty I$ の極限での閉ループ系の極を指定した形の非干渉系をつくることも可能である。

〈5.2〉 システムの特性変動に対する安定性と感度 最適レギュレータの極限形を用いた非干渉系の安定性と感度が、固定極の影響により、どのように変化するかを文献 (14) の手法をもとに解析する。

いま、もとのシステムの伝達関数を $T_0(s)$ 、その微小変動を $\Delta T_0(s)$ 、そして、閉ループ系の伝達関数を $T(s)$ 、その微小変動を $\Delta T(s)$ とする。また、非干渉系を構成する制御則のフィードフォワード項を G_0 と表す。プロパーで安定なシステムの微小変動 $\Delta T_0(s)$ に対する非干渉系の安定性は、すべての $\omega \geq 0$ でつぎのように与えられる。

$$\bar{\sigma}(\Delta T_0(j\omega)) < \frac{1}{1 + \bar{\sigma}(T_0^{-1}(j\omega)T(j\omega)G_0^{-1})} \quad \dots\dots\dots (43)$$

さらに、システムの微小変動 $\Delta T_0(s)$ に対する非干渉系の微小変動の割合 $\Delta T(s)$ を感度とすれば、つぎのように与えられる。

$$\frac{\bar{\sigma}(\Delta T(j\omega))}{\bar{\sigma}(\Delta T_0(j\omega))} \leq \bar{\sigma}(G_0)\bar{\sigma}(T_0^{-1}(j\omega)T(j\omega)) \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここで、 $\bar{\sigma}(\cdot)$ は最大特異値を表す。よって、システムの特異変動に対する安定性と感度は、それぞれ (43) 式と (44) 式の右辺で量ることができる。

そこで、先に示した数値例により極限形を用いた近似非干渉制御において、固定極を残した場合と適当な極配置をしたときのロバスト安定性と感度の違いを比較する。ここでは補題 5.1 を満たす P は、簡単な計算によりつぎのようになる。

$$P = \begin{pmatrix} -s+2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -s+1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

つまり、ある極 s を決めれば定理 5.1 により極限において閉ループ系の極を s に配置できる。ここでは、極を $s = -20$ 、 $s = -50$ とし、評価関数の出力の重みを $Q = 10^5 I$ とした場合について考える。安定性を比較したものを図 2、感度を比較したものを図 3 に示す。それぞれの縦軸は、(43) 式と (44) 式の右辺を計算した大きさを表している。図 2 と図 3 の実線は、固定極 -1 を残した定理 4.1 に基づく非干渉系の特性を、点線と一点鎖線は、それぞれ極を -20 と -50 に配置するような補題 5.1 を満たす P を選び、定理 5.1 に

図2 Stability margin (—:Pole=-1,:Pole=-20, - · -:Pole=-50)

図3 Sensitivity margin (—:Pole=-1,:Pole=-20, - · -:Pole=-50)

よって達成される非干渉系の特性を示している。図2, 3から明らかなように、原点から極を遠ざけていくことにより、安定性を保証する領域が広がり、感度が低下していることがわかる。このことは、非干渉系が原点近くに固定極もち安定性や感度が極端に悪化する場合、新しい評価関数を選ぶことにより、ロバスト安定性や感度を調節できる自由度が広がることを意味する。

6. おわりに

本論文では、連続時間最適レギュレータの極限形を用いた最小位相系に対する非干渉化特性を、非最小位相系にまで拡張できる条件を示した。このことにより、最小位相系に限らず非最小位相系に対しても、評価関数の重み行列を直接操作するだけで安定な非干渉化が達成でき、先験的条件の確認をせずに安定な最大ブロック分けが可能になることを明らかにした。さらに、具体的な数値例によりその有効性を確認した。

また、最小位相系の非干渉制御をそのまま非最小位相系に拡張すると、不安定零点を安定域に写像した固定極が生じる。そこで、新しい2次評価関数を選ぶことにより、最適レギュレータの極限形を用いて固定極の影響を少なくする非干渉化を、もとの非干渉化特性を変えことなく達成できることを示し、ロバスト安定性が向上し感度が低下することを確認した。この方法は、非最小位相系のみならず、最小位相系で固定極の存在する非干渉系においても適用可能である。

補題5.1の P の選定について、ここではこの存在の証明とともに選定法のひとつを示したが、この P の簡単な選定法の検討が今後の問題として残された。

(平成9年12月25日受付, 同10年8月24日再受付)

- (1) B. Friedland: Limiting Forms of Optimal Stochastic Linear Regulators, *ASME Transactions*, Series G, 10-2, 134/141 (1971)
- (2) B. A. Francis: The optimal linear quadratic time invariant regulator with cheap control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24-4, 616/621 (1979)
- (3) 千田, 美多, 三平, E: 有界実条件を使った H^∞ 状態フィードバック則の直接的導出法, システム制御情報学会論文集, 2-12, 422/430 (1989)
- (4) U. Shaked: Explicit Solution to the Singular Discrete-Time Stationary Linear Filtering Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30-1, 34/47 (1985)
- (5) Y. Peng and M. Kinnaert: Explicit Solution to the Singular LQ Regulation Problem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-37-5, 633/636 (1992)
- (6) W. M. Wonham: *Linear Multivariable Control*, 3rd ed., Springer-Verlag (1985)
- (7) 小林, 中溝: レギュレータの極限形式と出力零化問題, 計測自動制御学会論文集, 20-12, 1089/1094 (1984)
- (8) 小林, 櫻井, 矢野: 最適レギュレータの極限形式と外乱分離問題, 計測自動制御学会論文集, 34-6, 563/570 (1998)
- (9) 小林, 櫻井, 加藤, 中溝: 離散時間最適レギュレータの極限形と非干渉制御, 計測自動制御学会論文集, 29-10, 1156/1162 (1993)
- (10) 小林, 川崎, 櫻井, 神崎: 連続時間最適レギュレータによる非干渉化と指南車への応用, システム制御情報学会論文集, 11-11, 608/615 (1998)
- (11) 藤井, 下村: ILQ最適サーボ設計法の一般化, システム制御情報学会論文集, 1-6, 194/203 (1988)
- (12) 下村, 藤井: ILQ最適サーボ設計法の非最小位相系への拡張, システム制御情報学会論文集, 6-11, 498/507 (1993)
- (13) E. G. Gilbert: The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback, *SIAM J. Control*, 7-1, 50/63 (1969)
- (14) 正田, 渡辺: システムの特性変動に対する非干渉系の安定性と感度, 計測自動制御学会論文集, 22-5, 497/502 (1986)

鈴木 亮 (非会員) 1993年 金沢工業大学工学部機械システム工学科3年次中退。1995年 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程修了。現在、同博士後期課程に在籍。多変数制御、ロバスト制御の応用に関する研究に関心をもつ。1995～1997年 ドイツウルム大学計測制御マイクロ技術研究所研究生。IEEE, 計測自動制御学会などの会員。

小林 伸明 (非会員) 1976年 熊本大学大学院修士課程(機械工学)修了。防衛大学校研究生、東京工業大学研究生、防衛庁技術研究本部勤務などを経て、現在、金沢工業大学教授。多変数制御理論に関する研究に従事(工学博士)。計測自動制御学会、システム制御情報学会などの会員。

藤田 政之 (正員) 1984年 早稲田大学大学院理工学研究科博士前期課程修了(電気工学専攻)。1985年 同博士後期課程中退。同年金沢大学工学部電気・情報工学科助手。同講師、助教授。1992年～1998年 北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授を経て、現在、金沢大学工学部電気・情報工学科助教授。1994年～1995年 ミュンヘン工科大学客員研究員。ロバスト制御とその応用に関する研究に従事(工学博士)。計測自動制御学会、システム制御情報学会、日本ロボット学会、IEEE、SIAMなどの会員。

(本論文は既に平成11年2月号C部門誌に掲載されたものですが、印刷の際に大きな間違いがありましたので再掲載いたしました。関係各位にご迷惑をおかけいたしましたことを深くお詫び申し上げます。: 会誌編集課)