複数の制御仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるための1つの方法

学生員 大形 明弘 (奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科)
非会員 山下 裕 (奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科)
正員 西谷 紘一 (奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科)

An Algorithm to Find a Static State Feedback Gain Matrix to Satisfy Multiple Specifications

Ogata Akihiro, Student Member, Yuh Yamashita, Non-member, Hirokazu Nishitani, Member (Nara Institute of Science and Technology)

In this paper, we deal with the problem to find a static feedback gain matrix which satisfies multiple control specifications described in LMIs. This problem is easily solved when the intersection of all the sets of solutions of LMIs is not empty. However, even if it is empty, the gain matrix which satisfies all the specifications can exist. In this case, the problem to find such a matrix is equivalent to finding a linear subspace which intersects all the sets. We propose an algorithm to solve this problem. Some theoretical aspects are considered in a special case. Numerical experiments show the effectiveness of the algorithm.

キーワード：LMI, 複数制御仕様, 凸集合

1. はじめに

ある仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件を行列不等式で記述すると、双線形行列不等式 (Bilinear Matrix Inequality: BMI) になることが多い。しかし、BMIの解集合は一般に非凸であることから、大域的最適解を求めることは困難である⁽¹⁴⁾。BMIの局所的最適解を求めるアルゴリズムはいくつか提案されている⁽³⁾。BMIはLMIへ等価変換できる場合もあるが、いつでもそうであるとは限らない。

複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件については等価なLMIの存在が知られていない⁽¹⁴⁾。この必要十分条件はランク条件をともなったLMIに等価変換可能であることが示されている⁽¹²⁾。次数制約のあるコントローラ的设计問題に現れる特別な形のランク条件つきLMI問題については、局所的最適解を求めるアルゴリズムがいくつか提案されている⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁷⁾が、これらを複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求める問題に直接適用することはできない。一方、BMIの十分条件をLMIであらわし、LMIを解くことによって解を得ることができる。しかしこの場合には、すべての仕様を満たすゲイン行列が存在しても求まらないことがある⁽¹⁰⁾。複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるために、ゲイン行列の

存在をあらわす必要十分条件を直接解くアルゴリズムも提案されている⁽¹³⁾。この方法は複数の仕様に対して共通のゲイン行列を得るために、ランク条件のかわりに幾何的な条件を用いており、特別な場合(本質的には凸計画問題)に解が得られることが示されている。しかし、一般の場合の解への収束性は示されていない。

本論文では、複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めるために、ゲイン行列の存在をあらわす必要十分条件を直接解く新しいアルゴリズムを提案する。この方法は文献⁽¹³⁾と同様に複数の仕様に対して共通のゲイン行列を得るために、ランク条件のかわりに幾何的な条件を用いる。文献⁽¹³⁾の方法に較べてアルゴリズムの構成が単純なので、理論的な解析が容易であり、対象システムの状態数と入力数がともに1の特別な場合についてではあるが、アルゴリズムの収束性と、局所的な解への収束性を示すことができる。

次章以降の構成は次のようになっている。第2章では本論文で用いる記号を定義する。第3章で提案するアルゴリズムを説明し、第4章で特別な場合についてその収束性を考察する。第5章ではアルゴリズムの性質を明らかにする数値例を紹介し、第6章で制御系設計問題へ適用した数値例を示す。

2. 記 号

n 次対称行列 P と $m \times n$ 型の行列 Y の組 (P, Y) の全体を Σ であらわす。さらに、

$$\Sigma^+ \triangleq \{(P, Y) \in \Sigma : P > 0\}$$

とする。任意の $m \times n$ 型の行列 K に対して、 $L(K) \subset \Sigma$ を次のように定義する。

$$L(K) \triangleq \{(P, Y) \in \Sigma : Y = KP\} \quad (1)$$

$L(K)$ 全体の集合を $\mathcal{L}$ であらわす。

$$\mathcal{L} \triangleq \{L(K) : K \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$$

$Z_1 = (P_1, Y_1), Z_2 = (P_2, Y_2) \in \Sigma$ の距離 $d(Z_1, Z_2)$ を次で定義する。

$$d(Z_1, Z_2) \triangleq \left\| \begin{bmatrix} P_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \right\|_F$$

ここで、 $\|\cdot\|_F$ は行列のフロベニウスノルムをあらわす。 Σ の任意の開集合 S_1, S_2 に対して、 S_1 と S_2 の距離 $d(S_1, S_2)$ を次で定義する。

$$d(S_1, S_2) \triangleq \min_{Z_1 \in S_1, Z_2 \in S_2} d(Z_1, Z_2)$$

$n = m = 1$ のとき Σ^+ は $p > 0$ の半平面であり、 $\mathcal{L}$ の元は Σ の原点を通る直線である。このとき、 y 軸の負の部分 Σ の角の基準軸とする。 $L \in \mathcal{L}$ に対して、 $L \cap \Sigma^+$ がこの基準軸となす角を $\Theta(L)$ であらわす。また、 $\theta \in [0, \pi]$ に対して、 $\Theta(L) = \theta$ となる $L \in \mathcal{L}$ を $\Lambda(\theta)$ であらわす。

3. 問題の定式化

システム (2) に対して、 N 個の制御仕様 $S_i (i = 1, \dots, N)$ が与えられているとする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$ は状態変数、 $u \in \mathbb{R}^m$ は入力、 $y \in \mathbb{R}^p$ は出力であり、 A, B, C は定数行列である。さらに、仕様 S_i を実現する定数状態フィードバックのゲイン行列 K_i が次の LMI を満たす $(P_i, Y_i) \in \Sigma^+$ から、 $K_i = Y_i P_i^{-1}$ によって求まるとする。

$$F_i(P_i, Y_i) < 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3)$$

仕様 S_i をあらわす LMI の解集合を C_i とする。

$$C_i \triangleq \{(P, Y) \in \Sigma^+ : F_i(P, Y) < 0\} \quad (i = 1, \dots, N)$$

一般に LMI の解集合は凸集合であるので、 C_i ($i = 1, \dots, N$) は凸集合である。すべての仕様が同一のゲイン行列によって実現されるのは式 (3) を満たす $(P_i, Y_i) \in \Sigma^+$ ($i = 1, \dots, N$) が、さらに次式を満たすときである。

$$Y_1 P_1^{-1} = \dots = Y_N P_N^{-1} \quad (4)$$

すべての仕様を実現する定数状態フィードバックゲイン行列を求めるには、式 (3) を非凸な制約 (4) のもとで解かなければならない。したがって、この問題の大域的な解を求めるのは困難である。

式 (3)(4) に解が存在することは、次式を満たす $m \times n$ 型行列 K が存在することと等価である⁽¹⁰⁾。

$$L(K) \cap C_i \neq \emptyset \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5)$$

次式が成立することは、式 (5) をみたす K が存在するための十分条件になっている。

$$\bigcap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset \quad (6)$$

もし、式 (6) が成立するならば、左辺の任意の要素を (P_0, Y_0) とすると、ゲイン行列は $K = Y_0 P_0^{-1}$ と求まる。 (P_0, Y_0) を求める問題は LMI の実行可能解の一つを求める問題であり、凸計画問題として、容易に求めることができる⁽¹⁾。しかし、一般に式 (6) が成立しない場合でも、複数の制御仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列が存在する可能性がある。本論文では式 (5) を満足する K を直接求める一つのアルゴリズムを提案する。このアルゴリズムを制御系設計に用いることによって、式 (6) にもとづいて、凸最適化法で設計した場合よりも、よりよい制御性能を達成できることを第 6 章で示す。

〈3・1〉 問 題 空間 Σ^+ に 2 つの錐ではない閉凸集合 C_1, C_2 がある。

$$C_1 \cap L(K) \neq \emptyset \text{ かつ } C_2 \cap L(K) \neq \emptyset$$

となるような K が存在するか。存在するならば、そのような K を 1 つ求めよ。

説明を簡単にするために、 $N = 2$ とした。 C_1, C_2 はそれぞれ仕様 S_1, S_2 に対応した LMI の解集合である。 C_1, C_2 が錐ではないこと、および閉集合であること、という条件は C_1, C_2 と $L(K)$ の間の距離の定義を意味のあるものにするために必要である。 C_1 あるいは C_2 が凸錐である場合には、十分に小さな正数 ϵ を用いて、式 (3) を $F_i(P_i, Y_i) + \epsilon I \leq 0$ で置き換えることによって、凸錐ではない凸集合に変換する。 I は単位行列をあらわす。 C_1 あるいは C_2 が開集合である場合も同様に、式 (3) を $F_i(P_i, Y_i) + \epsilon I \leq 0$ で置き換えることによって、閉集合に変換する。

〈3・2〉 アルゴリズム C_2 の任意の点を (P_0, Y_0) とし、 $K_0 = Y_0 P_0^{-1}$ とする。

• Step 1 (初期化) :

$k := 1$ とする。また、 $L_2^{(0)} := L(K_0)$ とする。

• Step 2 (C_1 と交わる $\mathcal{L}$ の元の決定) :

$L_2^{(k-1)}$ に最も近い C_1 の点を $Q_1^{(k)}$ とし、 $Q_1^{(k)}$ を通る $\mathcal{L}$ の元を $L_1^{(k)}$ とする。

• Step 3 (C_2 と交わる $\mathcal{L}$ の元の決定) :

$L_1^{(k)}$ に最も近い C_2 の点を $Q_2^{(k)}$ とし、 $Q_2^{(k)}$ を通る

$\mathcal{L}$ の元を $L_2^{(k)}$ とする。

● Step 4 (停止条件の判定) :

$L_2^{(k)}$ が C_1 と C_2 の両者と交わるようになれば停止する。そうでなければ、 $k := k + 1$ として step 2 へ。

Fig.1はこのアルゴリズムの各ステップで $L_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, k = 1, 2, \dots$) が定まる様子をあらわしている。

このアルゴリズムは凸集合が3つ以上ある場合にも容易に拡張することができる。例えば凸集合が3つある場合には、 C_1 を通る $\mathcal{L}$ の元を C_2 を通る $\mathcal{L}$ の元へ、 C_2 を通る $\mathcal{L}$ の元を C_3 を通る $\mathcal{L}$ の元へ、そして、 C_3 を通る $\mathcal{L}$ の元を C_1 を通る $\mathcal{L}$ の元へ、という順序で更新すればよい。

〈3・3〉 既存のアルゴリズムとの比較 ここで文献⁽¹³⁾のアルゴリズムとの関連について述べておく。本論文では、LMIの解集合が凸錐であるときに、 $L(K)$ との距離を定義するために、その解集合を錐ではない閉凸集合に変換した。文献⁽¹³⁾では逆に、錐ではない凸集合 C をそれを含む最小の凸錐 $\tilde{C}$ に変換する (以後、任意の凸集合 S に対して、 S を含む最小の凸錐を $\tilde{S}$ と表すことにする)。そして、原点を通らない超平面 (χ と呼ぶことにする) と凸錐の共通部分に対して、前節で述べたのと同じアルゴリズムを実行している (文献⁽¹³⁾ のパラメータ $r \rightarrow \infty$ のとき)。一般に、超平面 χ 上で $L(K) \cap \chi$ に最も近い $\tilde{C} \cap \chi$ の点 $\tilde{Z}$ が、 Σ^+ 内で $L(K)$ に最も近い C の点 Z の χ 上への射影 (原点と Z を結ぶ直線と χ の交点) とは一致しないので、両者は異なる結果を与えることになる。

文献⁽¹³⁾ のアルゴリズムは $r = 0$ のとき、3つの凸集合 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \mathcal{L}$ の共有点を求めるという凸計画問題を解くことになる (考慮すべき仕様が2つの場合。2つの仕様に対応したLMIの解集合をそれぞれ C_1, C_2 とする)。この問題を χ 上の凸集合 $\tilde{C}_1 \cap \chi, \tilde{C}_2 \cap \chi$ に対する反復射影法によって解くことになる。したがって $r = 0$ のとき、アルゴリズムの収束性は保証され、凸集合 C_1, C_2 が共有点をもたない場合

図1 アルゴリズムの説明
Fig. 1. Process of algorithm

でも、 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ が共有点をもつならば必ず解を得ることができるという長所がある。しかし $r > 0$ とすると、アルゴリズムの収束性は保証されず、 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ が共有点をもつ場合にも、解を得る保証もなくなってしまう。また文献⁽¹³⁾では、 $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ が χ 上で共有点をもたないとき、 $\tilde{C}_1 \cap \chi, \tilde{C}_2 \cap \chi$ と $L(K) \cap \chi$ が交わるような K を求める問題に対して、解への収束性は示されていない。一方、本論文で提案する方法では、次節に示すように、 $n = m = 1$ という特殊な場合についてではあるが、 C_1 と C_2 が Σ^+ 上で共有点をもたないときに、 C_1 と C_2 が $L(K)$ と交わるような K を求める問題に関して、局所的な解への収束性を示すことができる。これは、本論文で提案する方法が、文献⁽¹³⁾の方法に較べて単純であり、理論的な解析が比較的容易であることが原因であると思われる。

4. アルゴリズムの収束性

$n = m = 1$ の場合について、アルゴリズムの収束性を考察する。

簡単のために C_1, C_2 は有界であるとし、その境界は滑らかであるとする。このとき、任意の $(p_0, y_0) \in C_2$ に対して、 $L_0 = L(y_0 p_0^{-1})$ を初期値として、 $L_2^{(k)}$ は収束する。このことは $\Theta(L_2^{(k)})$ が収束することを示すことによって証明することができる。以下で略証を示す。なお、この証明は C_1 と C_2 の凸性だけにに基づいている。したがって、この証明は C_1, C_2 が LMI の解集合ではない一般の凸集合の場合にも成り立つ。

まず必要な用語と記号を定義する。 θ が次式を満たすとき、 C_1 と C_2 の共有角と呼ぶことにする。

$$\Lambda(\theta) \cap C_1 \neq \emptyset \text{ かつ } \Lambda(\theta) \cap C_2 \neq \emptyset$$

C に接する $\mathcal{L}$ の元を L_1, L_2 とする (Fig.2参照)。ただし、 $\Theta(L_1) = \underline{\theta} < \bar{\theta} = \Theta(L_2)$ とし、 $I = [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ とする。また、 L_1, L_2 と C との接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする。 C の境界のうち、 Q_1 から Q_2 までの区間を A と呼ぶことにする。ただし、原点に近い側の区間をとるものとする。また、 $\bar{J}, \underline{J}$ を次のように定義する。

$$\underline{J} = [0, \underline{\theta}]$$

$$\bar{J} = [\bar{\theta}, \pi]$$

C_1, C_2 について、ここで定義した $I, \underline{J}, \bar{J}$ に相当する集合をそれぞれ、 $I_1, \underline{J}_1, \bar{J}_1$ および $I_2, \underline{J}_2, \bar{J}_2$ とする。

ここで、次のことが成り立つと仮定する。

$$\begin{cases} I_2 \cap \bar{J}_1 \neq \emptyset \text{ ならば } I_2 \cap \underline{J}_1 = \emptyset \\ I_2 \cap \underline{J}_1 \neq \emptyset \text{ ならば } I_2 \cap \bar{J}_1 = \emptyset \end{cases}$$

このことが成立しないときには、アルゴリズムの第1段階 ($k = 1$) で解が得られることがわかる。以後の説明では、 $I_2 \cap \bar{J}_1 \neq \emptyset$ と仮定する。 $I_2 \cap \underline{J}_1 \neq \emptyset$ の場合も同様である。

(定義：写像 π_C)

写像 $\pi_C : [0, \pi] \rightarrow I$ を次のように定義する。

$$\pi_C(\theta) := \begin{cases} \theta & (\theta \in I) \\ \theta' & (\theta \notin I) \end{cases}$$

ただし、 θ' は次のように定める (Fig. 2 参照)。 $Q \in A$ で、 Q における C の接線が $L = \Lambda(\theta)$ と平行であるものがただ 1 つ存在する。 Q を通る L の元を L' とし、 $\theta' = \Theta(L')$ とする。

C が凸集合であることから、ここで定義した π_C は $\underline{J}$ および $\bar{J}$ で、それぞれ θ に関して単調減少することを示すことができる。

(定義：写像 Π)

写像 $\Pi: I_2 \rightarrow I_2$ を次で定義する。

$$\Pi := \pi_{C_2} \circ \pi_{C_1}$$

上式の $\circ$ は写像の合成をあらわす。ここで定義した Π は、 π_{C_1} の $\bar{J}_1$ における単調減少性と π_{C_2} の $\underline{J}_2$ における単調減少性から、次の性質をもつことがわかる。

$$\left. \frac{\Pi(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\theta} > 0 \quad (\theta \in I_2, \pi_{C_1}(\theta) \notin I_2)$$

なぜなら、 $\theta \notin I_1$ より $\theta \in \bar{J}_1$ であり、 $\left. \frac{d\pi_{C_1}(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\theta} < 0$ であることがわかる。また、 $\pi_{C_1}(\theta) \notin I_2$ より $\pi_{C_1}(\theta) \in \underline{J}_2$ であり、 $\left. \frac{d\pi_{C_2}(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\pi_{C_1}(\theta)} < 0$ であることがわかるからである。

この性質から、任意の $\theta^{(0)} \in I_2$ に対して、 $\theta^{(k)} \triangleq \Pi^k(\theta^{(0)})$ ($k = 1, 2, \dots$) は $D \triangleq \{\theta : \theta \in I_2, \pi_{C_1}(\theta) \notin I_2\}$ において単調列であることがわかる。したがって、 $\theta^{(k)}$ はある $k = k^*$ で $\pi_{C_1}(\theta^{(k^*)}) \in I_2$ を満たし共有角へ収束するか、そうではない場合でも、 $\theta^{(k)} \in D$ ($k = 1, 2, \dots$) を満たし、有界であることから、 D において収束することがわかる。後者の場合の収束先を I_2 の「平行点」と定義する。

(定義：平行点) Fig. 3 参照

$\theta_2 \in I_2$ が Π の平行点であるとは、次の場合である。 $\theta_1 = \pi_{C_1}(\theta_2)$ とし、 $L_1 = \Lambda(\theta_1)$, $L_2 = \Lambda(\theta_2)$ とする。また、 L_1 と C_1 との交点を Q_1 、 L_2 と C_2 との交点を Q_2 とする。このとき、 L_1 と Q_2 における C_2 の接線が平行であり、 L_2 と Q_1 における C_1 の接線が平行である。

図2 写像 π_C
Fig. 2. Mapping π_C

以上をまとめると、 $n = m = 1$ のとき、任意の $\theta^{(0)} \in I_2$ に対して、 $\theta^{(k)}$ は写像 $\Pi(\theta)$ の不動点の一つに収束する、となる。 $\Pi(\theta)$ の不動点には 2 種類ある。ひとつは C_1 と C_2 の共有角であり、もうひとつが「平行点」である。したがって、「平行点」が存在しなければ、必ず共有角へ収束する。また、いい方をかえると、本論文で提案するアルゴリズムは方程式

$$\Pi(\theta) = \theta \quad (7)$$

を逐次代入法で解いていることに相当する、ともいえる。方程式 (7) の解のうち、平行点を除いたものが、式 (5) を満たす K を与える。

5. 簡単な例

$n = m = 1$ のときのいくつかの簡単な例について、 Π の具体的な形を求めた。

〈5・1〉 例1:凸集合が2つの場合 (Fig.4)

2つの凸集合 $C_1, C_2 \subset \Sigma$ を次のように定めた。

$$\begin{aligned} C_1 &: 1.89p^2 - 2.74pv + 3.11v^2 - 13.03p + 17.93v + 26.96 \leq 0 \\ C_2 &: 6.25p^2 + v^2 - 25p - 4v + 22.75 \leq 0 \end{aligned}$$

関数 π_{C_1}, π_{C_2} のグラフを Fig.5, Fig.6 にそれぞれ示す。これらの図から、 π_{C_i} は $\underline{J}_i, \bar{J}_i$ でそれぞれ単調減少していることが確認できる ($i = 1, 2$)。また、関数 $\Pi = \pi_{C_2} \circ \pi_{C_1}$ のグラフを Fig.7 に示す。図中で網がけをした範囲が C_1 と C_2 の共有角である。

平行点は存在しないので、アルゴリズムは必ず C_1, C_2 の共有角のひとつへ収束する。

Fig.4 は $\theta^{(0)} = 2.8120$ のときの、アルゴリズムの実行例である。図中の点線は $L_i^{(k)}$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) と平行な C_j ($j = 1, 2; j \neq i$) の接線である。 $L_2^{(3)}$ が求まった解であり、 $\theta^{(3)} = 1.3205$ である。

〈5・2〉 例2:凸集合が3つの場合 (Fig. 8)

この例は $p > 0$ の範囲に限定されていない。凸集合が 3 つある場合のアルゴリズムの性質を調べる。

図3 写像 Π の平行点
Fig. 3. Parallel point of Π

$$\begin{aligned} C_1 &: 1.50p^2 + 2.24pv + 3.50v^2 - 11.94p - 30.24v + 62.45 \leq 0 \\ C_2 &: p^2 + 6.25v^2 + 4p - 25v + 22.75 \leq 0 \\ C_3 &: 1.88p^2 - 1.14pv + 1.37v^2 - 7.92p + 7.19v + 10.88 \leq 0 \end{aligned}$$

関数 $\Pi = \pi_{C_2} \circ \pi_{C_3} \circ \pi_{C_1}$ のグラフを Fig.9 に示す。ただし、 C_2 の接線（角度の小さい方）を角度の基準軸としている。図中の網がけした範囲が C_1, C_2, C_3 の共有角である。平行点は存在しないので、アルゴリズムは必ず共有角へ収束する。

図 4 例 1
Fig. 4. Example 1

図 5 $\theta' = \pi_{C_1}(\theta)$ のグラフ
Fig. 5. Graph of $\theta' = \pi_{C_1}(\theta)$

図 6 $\theta' = \pi_{C_2}(\theta)$ のグラフ
Fig. 6. Graph of $\theta' = \pi_{C_2}(\theta)$

6. 制御系設計への適用

提案したアルゴリズムを制御系設計に適用する。
〈6・1〉 対象システム 対象とするシステムは文献⁽¹⁵⁾で取り上げられている倒立振り子である。このシステムの動的挙動は次の微分方程式で記述されている。

図 7 $\theta' = \Pi(\theta)$ のグラフ
Fig. 7. Graph of $\theta' = \Pi(\theta)$

図 8 例 2
Fig. 8. Example 2

図 9 $\theta' = \Pi(\theta)$ のグラフ
Fig. 9. Graph of $\theta' = \Pi(\theta)$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \dots\dots\dots (8)$$

$$y = Cx \dots\dots\dots (9)$$

ここで $u[V]$ はモータドライバへの入力電圧、 x は次のような 4 次元状態ベクトルである。

$$x = \left[\theta \quad \frac{d\theta}{dt} \quad r \quad \frac{dr}{dt} \right]^T$$

$r[m]$ は台車の位置、 $\theta[rad]$ は垂直線からの振り子の角度をあらわす。 y は出力であり、 $y(t) = r(t)$ であるとする。

係数行列 A, B, C は次のようになっている。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)mg}{D} & -\frac{(M+m)c}{D} & 0 & \frac{Fml}{D} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2l^2g}{D} & \frac{m lc}{D} & 0 & -\frac{F(J+ml^2)}{D} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{mla}{D} \\ 0 \\ \frac{\alpha(J+ml^2)}{D} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、 $D = (M + m)J + Mml^2$ である。パラメータ値は Table 1 のように与えられている。

〈6・2〉 制御仕様 システム (8)(9) に対して、次の 3 つの仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求める。

〈6・2・1〉 仕様 1: 減衰率 「閉ループ系の減衰率は α 以上であること」。

ここでの減衰率とは、次式を満たす最大の α として定義される。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0$$

ノルムはユークリッドノルムである。これはシステムの固有値の実部の最大値に一致する。

仕様 1 を実現する定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための必要十分条件は次式を満たす $(P_1, Y_1) \in \Sigma^+$ が存在することである⁽¹⁾。

$$AP_1 + P_1A^T + BY_1 + Y_1^TB^T + 2\alpha P_1 < 0 \dots\dots\dots (10)$$

式 (10) の解集合を $C_1 \subset \Sigma^+$ とする。

〈6・2・2〉 仕様 2: 入力に対する制限 「初期値 $x(0) = x_0$ であるとき、ある正の数 μ に対して、 $|u(t)| \leq \mu$ ($t \geq 0$) であること」。

仕様 2 を実現する定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための一つの十分条件は、次式を満たす $(P_2, Y_2) \in \Sigma^+$ が存在することである⁽¹⁾。

$$\left\{ \begin{array}{l} AP_2 + P_2A^T + BY_2 + Y_2^TB^T < 0 \\ \begin{bmatrix} P_2 & Y_2^T \\ Y_2 & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P_2 \end{bmatrix} \geq 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) の解集合を $C_2 \subset \Sigma^+$ とする。

〈6・2・3〉 仕様 3: 出力に対する制限 「初期値 $x(0) = x_0$ であるとき、ある正の数 δ に対して、 $|y(t)| \leq \delta$ ($t \geq 0$) であること」。

仕様 3 を実現する定数状態フィードバックゲイン行列が存在するための一つの十分条件は、次式を満たす $(P_3, Y_3) \in \Sigma^+$ が存在することである⁽⁶⁾。

$$\left\{ \begin{array}{l} AP_3 + P_3A^T + BY_3 + Y_3^TB^T < 0 \\ \begin{bmatrix} P_3 & P_3C^T \\ CP_3 & \delta^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} 1 & x_0^T \\ x_0 & P_3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

式 (12) の解集合を $C_3 \subset \Sigma^+$ とする。

〈6・3〉 設計 1 設計 1 では仕様 1 と仕様 2 をともに満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めた。状態変数の初期値は台車位置 $r(t)$ 以外はすべて 0 とする。台車位置の初期値を $r(0) = 1$ として設計することによって、 $|r(0)| \leq 1$ の任意の初期台車位置に対して仕様を満足することを保証できる。仕様 2 における入力の絶対値の最大値は $\mu = 1$ とした。以上の条件の下で、減衰率 α が最大になるゲイン行列を求めた。

まず、式 (6) にもとづいて、凸最適化法により設計し、最も大きな減衰率を達成するゲイン行列 $K^{[1]}$ を求めた。このときの減衰率の最大値を $\alpha_{max}^{[1]}$ とする。この設計問題は一般化固有値問題に帰着され、大域的最適解を得ることができる。結果は次のようになった。

$$\alpha_{max}^{[1]} = 0.4620$$

$$K^{[1]} = \begin{bmatrix} 3.4984 & 0.1308 & 0.0489 & 1.0767 \end{bmatrix}$$

$\alpha_{max}^{[1]}$ は大域的最適解であるから、 $\alpha > \alpha_{max}^{[1]}$ では、 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ である。すなわち、式 (6) は成立しない。

次に式 (5) に基づいて、提案したアルゴリズムで設計した。減衰率 α をステップ幅 0.01 で更新し、最も大きな α の値を達成するゲイン行列 $K^{[2]}$ を求めた。このときの α の最大値を $\alpha_{max}^{[2]}$ とする。初期値 $L_2^{(0)}$ は次のように選んだ。 C_1 と C_2 の互いに最も近い点を求め、その C_2 側の点を通る $\mathcal{L}$ の元を $L_2^{(0)}$ とした。結果は次のようになった。

$$\alpha_{max}^{[2]} = 0.90$$

$$K^{[2]} = \begin{bmatrix} 5.1611 & 0.7793 & 0.3379 & 1.4024 \end{bmatrix}$$

Fig.10,11 にゲイン行列 $K^{[1]}, K^{[2]}$ を用いたシミュレーション結果を示す。Fig.10 は台車の位置 $r(t)$ の時間変化、Fig.11 は制御入力 $u(t)$ の時間変化のグラフである。ただし、 $r(0) = 1$ とした。それぞれフィードバックゲインとして、 $K^{[1]}$ を用いた場合の結果を破線で、 $K^{[2]}$ を用いた場合の結果を実線で示してある。 $K^{[2]}$ の方が、偏差がすみやかに減衰していることがわかる。

〈6・4〉 設計 2 設計 2 では仕様 1,2,3 をすべて満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求めた。初期値は振り角度 $\theta(t)$ 以外はすべて 0 とする。振り角度の初期値を $\theta(0) = 0.5$ として設計することによって、 $|\theta(0)| \leq 0.5$ の任意の初期振り角度に対して仕様を満足することを保証

表 1 倒立振り子システムのパラメータ

Table 1. Parameters of the system

記号	パラメータの意味	設計値
$M[kg]$	台車の質量	5.383
$F[kg/s]$	台車駆動系の等価粘性摩擦係数	23.73
$a[N/V]$	u から台車に働く力のゲイン	25.0
$l[m]$	軸から振り子の重心までの距離	0.115
$m[kg]$	振り子の重さ	0.1
$J[kgm^2]$	振り子の重心周りのモーメント	1.526×10^{-3}
$c[kgm^2/s]$	軸の粘性摩擦係数	1.761×10^{-3}

できる。仕様2における入力値の絶対値の最大値は $\mu = 3$ とした。また、仕様3における台車位置の絶対値の最大値を $\delta = 0.5[m]$ とした。以上の条件の下で、減衰率 α が最大になるゲイン行列を求めた。

まず、式(6)にもとづいて、凸最適化法で設計を試みた。しかし、 $C_2 \cap C_3 = \emptyset$ となり、この方法では、3つの仕様をすべて満足するゲイン行列を求めることはできないことがわかった。

次に式(5)に基づいて、提案したアルゴリズムで、3つの仕様をすべて考慮して設計をおこなった。減衰率 α をステップ幅 0.01 で更新し、仕様2及び仕様3を満たし、仕様1に関して最も大きな α の値を達成するゲイン行列 $K^{[2]}$ を求めた。このときの α の最大値を $\alpha_{max}^{[2]}$ とする。初期値 $L_3^{(0)}$ の選び方は次の通りである。 C_3 内の点を適当に選び、その点を通る L の元を初期値 $L_3^{(0)}$ とした。結果は次のようになった。

$$\alpha_{max}^{[2]} = 1.37$$

$$K^{[2]} = \begin{bmatrix} 5.9865 & 0.8588 & 1.6909 & 2.2994 \end{bmatrix}$$

シミュレーションの結果、台車の位置 $|r(t)|$ の最大値は $0.4700[m]$ であった。 $\alpha = \alpha_{max}^{[2]}$ のとき、 C_1, C_2 および C_3 の関係は次のようになった。

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset, C_2 \cap C_3 = \emptyset, C_3 \cap C_1 \neq \emptyset \quad (13)$$

図 10 設計 1 : $r(t)$ の変化
Fig. 10. Experiment 1 : $r(t)$

図 11 設計 1 : $u(t)$ の変化
Fig. 11. Experiment 1 : $u(t)$

また、アルゴリズムの解への収束性をみるため、 $L_1^{(k)}$ と C_2 との距離 d_2 の変化を Fig.12($k = 1, \dots, 10$)、Fig.13($k = 11, \dots, 78$) に示した。

〈6・5〉 評 価 提案したアルゴリズムによって、式(5)を満たす解を直接見つけることができることを示した。設計1では、式(6)にもとづいて、凸最適化法で設計した場合に較べて、2倍近い減衰率を達成することができた。設計2の結果は、凸集合が3つの場合にも提案したアルゴリズムが有効であることを示している。ただし、式(13)から分かるように、 C_1 と C_3 は共通点をもっている。凸集合が3つ以上あり、そのすべてが互いに共通点をもたない場合にも、提案したアルゴリズムが有効であることも確認している。この例は次節(6・6)で示す。

ここで、アルゴリズムを実装する上で問題になる計算量などの点について述べておく。

まず、アルゴリズム中で用いられる計算について説明する。必要な計算は次の2種類である。1つは初期値を求めるための計算である。これは、ある LMI の解集合の中の1点を見出す問題であるので、LMI の可解性問題である。もう1つは、 $L(K)$ に最も近い凸集合 C の点を求める計算である。これは、LMI を制約として線形関数を最小化する

図 12 設計 2 : $d_2^{(k)}$ の変化 ($k = 1, \dots, 10$)
Fig. 12. Experiment 2 : $d_2^{(k)}(t)$ ($k = 1, \dots, 10$)

図 13 設計 2 : $d_2^{(k)}$ の変化 ($k = 11, \dots, 78$)
Fig. 13. Experiment 2 : $d_2^{(k)}(t)$ ($k = 11, \dots, 78$)

問題となる。いずれも凸計画問題に帰着され、内点法などによって高速に解くことができる。

次に計算量について述べる。以下に述べる計算時間は、次の条件のもとでのものである。まず、計算に用いたのはCPUがAlpha21064(300MHz)の計算機である。また、LMIはMATLABのLMI Toolboxで解いた。

設計1では、 $\alpha_{\max}^{[1]}$ を求めるのに要した時間は0.79[sec]であり、提案アルゴリズムによって $\alpha_{\max}^{[2]}$ を求めるのに要した時間は4.48[sec]である。このときの反復は $k=2$ で終了している。設計2では、提案アルゴリズムによって $\alpha_{\max}^{[2]}$ を求めるのに要した時間は263.10[sec]である。このときの反復は $k=79$ で終了している。

〈6・6〉 その他の設計例 提案するアルゴリズムの有用性を示すために、他の設計例についても結果⁽⁹⁾を示す。

制御対象は〈6・1〉に示した倒立振り子である。ただし、軸の粘性摩擦係数 c を時間的には変化しない不確かなパラメータと考える。この不確かさのもとで、閉ループ系の固有値の実部が -0.5 から -5.0 の間にあることを保証する定数状態フィードバックゲイン行列を求めることが問題である。 c の下限はノミナル値 $\underline{c} = 1.761 \times 10^{-3}$ であるとし、固有値の範囲条件を満たし得る c の上限 $\bar{c}$ の最大値で、ロバスト性を評価する。はじめに、 c の変域の全体で固有値の範囲条件を満たす状態フィードバックが存在する条件をあらわしたLMIを解いた。このときの $\bar{c}$ の最大値は $\bar{c}^{[1]} = 14.0 \times 10^{-3}$ であった。次に c の変域を2等分し、それぞれの区間で固有値の範囲条件を満たす状態フィードバックが存在する条件をあらわしたLMIの解集合を C_1, C_2 として、提案したアルゴリズムでゲイン行列を求めた。このときの $\bar{c}$ の最大値は $\bar{c}^{[2]} = 22.9 \times 10^{-3}$ であり、そのロバスト性は大きく向上している。

さらに、台車駆動系の等価摩擦粘性係数 F も時間的には変化しない不確かなパラメータと考える。 F の下限はノミナル値 $\underline{F} = 23.73$ であるとし、固有値の範囲条件を満たし得る F の上限 $\bar{F}$ の最大値で、ロバスト性を評価する。ただし、 c の上下限は固定する($\underline{c} = 1.761 \times 10^{-3}$, $\bar{c} = 7.8 \times 10^{-3}$)。はじめに、 c と F の変域の全体で固有値の範囲条件を満たす状態フィードバックが存在する条件をあらわしたLMIを解いた。このときの $\bar{F}$ の最大値は $\bar{F}^{[1]} = 33.1$ であった。次に c の変域と F の変域をともに2等分してできる4つの区画で、それぞれ固有値の範囲条件を満たす状態フィードバックが存在する条件をあらわしたLMIの解集合を C_1, C_2, C_3, C_4 として、提案したアルゴリズムでゲイン行列を求めた。このときの $\bar{F}$ の最大値は $\bar{F}^{[2]} = 51.6$ であり、そのロバスト性はやはり大きく向上している。なお、このとき、 C_1, C_2, C_3, C_4 はどの2つも共有点をもたないことを確認している。

この実験の詳細については文献⁽⁹⁾を参照されたい。

7. 結 論

複数の仕様を満たす定数状態フィードバックゲイン行列を求める新しいアルゴリズムを提案した。このアルゴリ

ズムをもちいると、1つのゲイン行列が、与えられた仕様をすべて満たすための必要十分条件を直接解くことができるので、その十分条件のもとづいて、凸最適化法で設計した場合に較べて、よりよい制御性能を達成することができる。このことを数値実験によって確認した。また、 $n = m = 1$ の場合について、アルゴリズムが必ず収束することを示した。また $n = m = 1$ の場合、初期値を十分解の近くに選べば、必ず解に収束することも示した。一般の場合に収束性を考察するのが今後の課題である。

(平成10年8月10日受付, 同10年11月20日再受付)

文 献

- (1) S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)
- (2) J. David and B. D. Moor: Designing Reduced Order Output Feedback Controllers using a Potential Reduction Method, Proc. ACC94, pp. 845-849 (1994)
- (3) K. C. Goh, L. Turan and M. G. Safonov: Baffine Matrix Inequality Properties and Computational Methods, Proc. ACC94, pp. 850-855 (1994)
- (4) L. E. Ghaoui, F. Oustry and M. AitRami: A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176 (1997)
- (5) K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton: Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods; Automatica, Vol. 32, No. 8, pp. 1117-1125 (1996)
- (6) M. V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari: Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities; Automatica, Vol. 32, No. 10, pp. 1361-1379 (1996)
- (7) T. Iwasaki and R. E. Skelton: The XY-centering Algorithm for The Dual LMI problem: A New Approach to Fixed-order Control Design; Int. J. Control, Vol. 62, No. 6, pp. 1257-1272 (1995)
- (8) 岩崎徹也: LMIと制御, 昭晃堂, 東京 (1997)
- (9) 大形明弘, 山下裕, 西谷紘一: 複数のLMI条件を満たす状態フィードバックゲイン行列の設計法; 電気学会平成10年度電子・情報・システム部門大会講演論文集, pp. 465-468 (1998)
- (10) 小原敦美, 杉江俊治: 凸最適化を用いた制御系設計; システム/制御/情報, Vol.38, No.3, pp. 139-146(1994)
- (11) 小原敦美: 数値的最適化を用いた制御系設計法; システム制御情報チュートリアル講座'94 テキスト (1994)
- (12) 小原敦美, 増淵泉: 行列不等式と制御系設計法の展開; システム/制御/情報, Vol.41, No.1, pp. 28-34 (1997)
- (13) 金田聡, 小原敦美, 須田信英: LMIの解集合の性質を考慮した状態フィードバックゲインの設計; 第39回システム制御情報学会研究発表講演会資料, pp. 291-292 (1995).
- (14) 藤岡久也, 岩崎徹也: BMI:非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦; 計測と制御, Vol.36, No.11, pp. 762-767 (1997)
- (15) 佐伯正美: システム制御情報ライブラリー 10 制御系設計 第8章; 朝倉書店, 東京 (1994).

大形明弘 (学生員) 1961年8月8日生。1985年3月慶応義塾大学理工学部計測工学科卒業。1996年3月奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士前期課程終了。同年奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程入学、現在に至る。主として数値的最適化による制御系設計に関する研究に従事。システム制御情報学会などの会員

山下 裕（非会員） 1986年3月北海道大学大学院工学研

究科修士課程終了。1988年3月同博士課程退学。同年4月より北海道大学工学部助手。1996年4月より奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授、現在に至る。非線形制御理論、ニューラルネットワークによる制御、学習制御などの研究に従事。博士（工学）。システム情報制御学会、電子情報通信学会、化学工学会などの会員。

西谷 紘一（正員） 1945年7月29日生。1974年京都大学大

学院工学研究科博士課程化学工学専攻単位取得退学。同年大阪大学基礎工学部助手、講師、助教授、教授を経て1993年から奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科教授、現在に至る。その間、プロセス制御、プラントオペレーション、プロセスシミュレーションに関する研究に従事。工学博士。化学工学会、AIChE、計測自動制御学会、日本プラントヒューマンファクター学会などの会員