ランダムな媒質よりなるX線導波路における
ナノメートル波電磁界特性

正 員 宮 崎 保 光 (豊橋技術科学大学)

Propagation and Radiation Fields Characteristics of Nano-meter Electromagnetic Wave in X Ray
Dielectric Waveguides with Random Media

Yasumitsu Miyazaki, Member (Toyohashi University of Technology)

X-ray in the nanometer electromagnetic region is very useful for nanospace fabrication, information and high-energy transmission and control techniques of Å-size structures in biomedical sciences and technology. In this paper, the electromagnetic fields in X-ray gradient fiber with random refractive index media are studied. Statistical mode conversion of beam propagation, beam broadening and beam center are investigated by stochastic process theory of electromagnetic field.

キーワード : X 線導波路、ランダム導波路、ビーム伝搬、モード変換、電磁界理論

1. まえがき

X線機能素子、X線ファイバはナノメートル波電磁波技術の中心課題であり、数Åから数百Åの波長のナノメートルの電磁波であるX線は、極微細構造のÅオーダーのマイクロ構造の機能素子、生体機能の計測、制御、作成に重要である。最近では、コヒーレントのX線源の開発研究が始められているが、有効な機能素子が欠けている。また、波長ナノメートルのX線領域における、X線導波路、導波路型機能素子の検討は、殆どなされていない。⁽¹⁾⁽²⁾

著者らは、これまで、多層膜によるX線反射鏡、X線ファイバを中心に、ナノスペース構造のマイクロサイズにおけるX線の多重散乱について検討を行ってきた。⁽³⁾ また、屈折率分布型の集束性X線導波路のビームモードの固有電磁界、集束性X線導波路の曲り部における伝搬、放射、散乱について、電磁境界値問題として等角写像法を用いて厳密に論じた。⁽⁴⁾⁽⁵⁾ 特に、X線ビームの曲がりにおける放射損失特性を示してきた。⁽⁶⁾ ここでは、ランダムな媒質によるX線ビーム導波路の統計的電磁界理論を示している。

2. 集束性X線導波路の固有電磁界特性

導波路のコア、クラッド部媒質は原子の集合によって構成されている。3次元空間中の原子集合の原子 (i, j, k) を考える。原子核の中心を $\mathbf{r}_{N(i, j, k)}$ 、電子雲の座標を $\mathbf{r}_{NSl(i, j, k)}$ 、X線領域における電子分極の寄与を $f_{NSl}\mathbf{E}$ とすると、X線電磁界における媒質の分極は空間分布関数を g として(1)、(2)式で定義される。⁽⁷⁾⁽⁸⁾

$$\mathbf{P} = \sum_{i, j, k} f_{NSl}(\mathbf{r}) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{NSl(i, j, k)}) \mathbf{E} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、対応する誘電率は、

$$\epsilon = \epsilon_0 + \sum_{i, j, k} f_{NSl}(\mathbf{r}) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{NSl(i, j, k)}) \dots\dots\dots (2)$$

屈折率 n は(3)式で与えられる。実部を n_γ 、虚部を η として、

$$n = 1 - \delta - j\eta \dots\dots\dots (3) \\ \triangleq n_\gamma - j\eta$$

ここで、 m は質量、 N_s は密度、 f_s は電子の固有周波数、 γ_s は緩和定数として、

$$\delta = \frac{N_s r_0 \lambda^2}{2\pi} f_1, \quad \eta = \frac{N_s r_0 \lambda^2}{2\pi} f_2,$$

r_0 は古典的原子半径、 λ はX線の波長、 f_1 および f_2 は散乱因子であり、 m 、 f_s 、 γ_s の関数である。

X線領域では真空の誘電率は1であり、物質中においては誘電率の実部は1より小さい。⁽⁹⁾ もし、波長が $10\text{\AA}(=1\text{nm})$ より長いならば、誘電率の実部は1より比較的小さく、軟X線領域においては、誘電率は $0.83 \sim 0.99$ である。この場合、導波構造は比較的簡単に作製できる。しかしながら、軟X線領域では損失因子に相当する誘電率の虚部が比較的大きい。したがって、X線導波路を低損失にするためには、X線電磁界の導波エネルギーはコア領域、すなわち真空領域に集中さ

図1 屈折率分布
 $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon'(1 - (l_t r)^2)$, $l_t = |l_t| e^{j\phi_t}$
 Fig. 1. Refractive index distribution

せなければならない。

X線領域において、長波長領域においては吸収性が無視できない伝搬特性である。X線波長領域における屈折率分布型の集束性X線導波路の屈折率分布 $\varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$ において、 $\varepsilon^{(1)}$ を理想的集束性屈折率分布、 $\varepsilon^{(2)}$ をそれからのずれとして、放物型屈折率分布 $\varepsilon^{(1)}$ は、

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon'(1 - (l_t r)^2) = \varepsilon_r^{(1)} - j\varepsilon_i^{(1)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、複素パラメータが $l_t = |l_t| e^{j\phi_t} = l_t^{(r)} + j l_t^{(i)}$ のとき、

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon'(1 - (|l_t| r)^2 \cos 2\phi_t) - j\varepsilon'(|l_t| r)^2 \sin 2\phi_t \quad (5)$$

となる。図1に放物型屈折率分布 $\varepsilon^{(1)}$ の実部および虚部の分布を示す。

また、誘電率 $\varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$ が

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}_t) &= \varepsilon^{(r)}(\mathbf{r}_t) - j\varepsilon^{(i)}(\mathbf{r}_t) \\ &= \varepsilon'[1 - (l_t r)^2 + D_{IV}(l_t r)^4 + D_{VI}(l_t r)^6] \quad \dots\dots\dots (6) \\ \mathbf{r}_t &= x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y \end{aligned}$$

で与えられるとして、集束複素係数 D_{IV} 、 D_{VI} を

$$D_{VI} = D_{VI}^{(r)} + D_{VI}^{(i)}$$

とすれば、より一般的になる。

Maxwellの方程式より、電磁界は、X線導波路において直角座標 (x, y, z) 表示の次のベクトル波動方程式を満足する。 $\varepsilon(\mathbf{r}_t) = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}$ として、

$$\nabla_{xyz} \times \nabla_{xyz} \times \mathbf{E} - \omega^2(\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)})\mu\mathbf{E} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、時間因子は $e^{j\omega t}$ とした^(10,11)。

不均質屈折率分布をもつ集束性ファイバ内の電磁界に関して、 $\varepsilon^{(1)}(\mathbf{r}_t)$ の屈折率分布についてのスカラー波動方程式

$$\left[\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon^{(1)} \mu \right] \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

を満足し、その固有関数 $\Phi_{mn} = \Psi_{mn}(\mathbf{r}_t) e^{-j\beta_{mn} z}$ が完全直交性を満たす場合を考える。

Ψ の完全直交系 $\{\Psi_{mn}\}$ を考えれば、 $\mathbf{E}$ は、係数 a_{mn} を用いて、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_t, \gamma) = \sum a_{mn}(\gamma) \Psi_{mn}(\mathbf{r}_t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

と展開できる。(7)、(9)式より、固有モードの複素伝搬定数 γ_{mn} が求められる。

x, y 偏波についての固有モードの伝搬定数 γ_{mn} は、

$$\gamma_{mnx} = \beta_{mnx} - j\alpha_{mnx} \quad \dots\dots\dots (10)$$

として、伝搬定数 β_{mnx} は、

$$\beta_{mnx} = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \left[1 - (2n + 2m + 2) \frac{l_{t(1c)}}{\beta_1} - \frac{l_{t(2c)}^2}{\beta_1^2} \right.$$

$$\begin{aligned} &- \frac{l_{t(3c)}^3 (1 - 2D_{IV}^{(r)})}{\beta_1^3} \left\{ 3 \binom{m}{n} + \binom{n}{m} + 2 \right\} \\ &+ \frac{D_{IV}^{(r)}}{4} \frac{l_{t(2c)}^2}{\beta_1^2} A_{mn} + \frac{D_{VI}^{(r)}}{8} \frac{l_{t(3c)}^3}{\beta_1^3} B_{mn} + D_{IV}^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{l_{t(2s)}^2}{\beta_1^2} \frac{A_{mn}}{4} + \frac{l_{t(3s)}^3}{\beta_1^3} \left(3 \binom{m}{n} + \binom{n}{m} + 2 \right) \right\} \\ &+ \frac{D_{VI}^{(i)}}{8} \frac{l_{t(3s)}^3}{\beta_1^3} B_{mn} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

減衰定数 α_{mnx} は、

$$\alpha_{mnx} = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \left[(2n + 2m + 2) \frac{l_{t(1s)}}{\beta_1} + \frac{l_{t(2s)}^2}{\beta_1^2} \right.$$

$$\begin{aligned} &- \frac{l_{t(3s)}^3 (1 - 2D_{IV}^{(r)})}{\beta_1^3} \left\{ 3 \binom{m}{n} + \binom{n}{m} + 2 \right\} \\ &- \frac{D_{IV}^{(r)}}{4} \frac{l_{t(2s)}^2}{\beta_1^2} A_{mn} - \frac{D_{VI}^{(r)}}{8} \frac{l_{t(3s)}^3}{\beta_1^3} B_{mn} + D_{IV}^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{l_{t(2c)}^2}{\beta_1^2} \frac{A_{mn}}{4} + \frac{l_{t(3c)}^3}{\beta_1^3} \left(3 \binom{m}{n} + \binom{n}{m} + 2 \right) \right\} \\ &+ \frac{D_{VI}^{(i)}}{8} \frac{l_{t(3c)}^3}{\beta_1^3} B_{mn} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで、 A_{mn} 、 B_{mn} は m, n について、それぞれ2次、3次の代数式で

$$\begin{aligned} A_{mn} &= 3(m+1)^2 + 3m^2 + 3(n+1)^2 + 3n^2 \\ &+ 2(2n+1)(2m+1) \end{aligned}$$

図2 波数とスポットサイズ $l_x = l_t^{(r)}$

Fig. 2. Wavenumber and mode spot size $l_x = l_t^{(r)}$

図3 ランダムの媒質の集束性 X 線導波路

Fig. 3. X-ray gradient waveguide with random media

$$\begin{aligned}
 B_{mn} = & 6[(m+1)^2 + m^2](3n+m+2)^2 \\
 & + 6[(n+1)^2 + n^2](3m+n+2)(m+1)(4m+6) \\
 & + m(m-1)(4m-2) + (n+1)(4n+6) \\
 & + n(n-1)(4n-2) \dots \dots \dots (13)
 \end{aligned}$$

また、 $l_{t(k)}^k = |l_t|^k \frac{\cos k\phi_t}{\sin k\phi_t}$, $k = 1, 2, 3$. また、X 線

領域の導波路では、 $\epsilon' \cong \epsilon_0$ と考えられる。ビームモードのスポットサイズを図2に示す。

3. ランダム媒質による集束性光導波路の電磁界

図3に示される透磁率が μ 、ランダムな誘電率 ϵ が次式(14)で与えられる集束性光導波路を考える。また、 $\epsilon^{(1)}$ は、理想的集束屈折率分布とし、式(4)により与えられるものとする。

$$\epsilon = \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)} = \epsilon' \{1 - (l_x x)^2 - (l_y y)^2\} + \epsilon^{(2)}(r) \quad (14)$$

ここで、 l_x 、 l_y は x、y 方向についてのビーム集束係数で、 $\epsilon^{(2)}$ はランダムな屈折率ゆらぎを与える誘電関数と

する。電磁界は直角座標 (x、y、z) 表示の次のベクトル波動方程式を満足する^(5,12,13)。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2(\epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)})\mu\mathbf{E} = 0 \quad \dots \dots \dots (15)$$

ここで、時間因子は $e^{j\omega t}$ とした。

$$\nabla_{xyz} \times \nabla_{xyz} \times \mathbf{E} - \omega^2 \epsilon^{(1)} \mu \mathbf{E} = \omega^2 \epsilon^{(2)} \mu \mathbf{E} \quad (16)$$

式(16)の右辺は屈折率ゆらぎにより生じる不均質を示す。これらの不均質項に注目して、真直なゆらぎのない集束性導波路に関するグリーンダイアディックを用いてグリーン関数を適用することを考える。 l_x/β の小さい通常の集束性ファイバのグリーンダイアディック $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は、先のベクトル界の検討により⁽⁶⁾

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & - \sum_{m,n} \left(\mathbf{I} - \nabla' \frac{1}{\omega^2 \epsilon(\mathbf{r}') \mu} \nabla' \right) \\
 & \cdot \frac{j}{2\sqrt{\beta^2 - (2n+1)l_y\beta - (2m+1)l_x\beta}} \\
 & \cdot e^{-j\sqrt{\beta^2 - (2n+1)l_y\beta - (2m+1)l_x\beta - g_x l_x^2 - g_y l_y^2} |z - z'|} \\
 & \cdot \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \left(\frac{\beta^2 l_x l_y}{\pi^2} \right)^{1/2} \varphi_m((\beta l_x)^{1/2} x) \\
 & \cdot \varphi_m((\beta l_x)^{1/2} x') \varphi_n((\beta l_y)^{1/2} y) \\
 & \cdot \varphi_n((\beta l_y)^{1/2} y') \left[1 + O\left(\left(\frac{l_x}{\beta}\right)\right) + O\left(\left(\frac{l_y}{\beta}\right)\right) \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\varphi_m(a\xi\xi) = e^{-\frac{a^2 \xi^2}{2}} H_m(a\xi\xi)$, $a_\xi^2 = l_\xi \beta$, $\xi = x, y$. 又、位相項の g_x は、ダイアディック $i_x i_x$ 成分に対して1、その他の成分に対しは零であり、 g_y は $i_y i_y$ 成分に対して1、その他の成分については零である。これは、伝送モードが、 $l_x \neq l_y$ のとき、偏波方向により位相速度の異なる固有モード系であることを示している。もし、入射ビームが⁸次式

$$\nabla_{xyz} \times \nabla_{xyz} \times \mathbf{E}_{(inc)} - \omega^2 \epsilon^{(inc)} \mu \mathbf{E}_{(inc)} = 0 \quad (18)$$

を満足し、入射面 $S_1(z=0)$ より z の正方向に入射するものとすれば、グリーン関数の公式より、全電界面 $\mathbf{E}_{tot1} = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{scatt}$ は、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{tot1} = & \mathbf{E}_{inc} + \int [\omega^2(\epsilon^{(1)} - \epsilon^{(inc)})\mu\mathbf{E}_{inc} \\
 & + (\omega^2 \epsilon^{(2)} \mu \mathbf{E}_{tot1})] \cdot \mathbf{G} dv - \int_{S_1, S_2} \mathbf{n} \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}_{scatt}) \\
 & \times \mathbf{G} + \mathbf{E}_{scatt} \times (\nabla \times \mathbf{G})] ds \quad \dots \dots \dots (19)
 \end{aligned}$$

以下の章では、導波路の入射端面 S_1 及び出射端面 S_2 において界が整合しているものと仮定する。この場合に

は、式 (19) の右辺の第 3 項の面積分は消える。作用子 Γ 及び積分作用子 T をグリーンダイアディック G 及び体積分 $\int dv$ を表し、作用子 H が被積分項のベクトルを示し、 E 、 E_0 が全電界、入射界を示すものとすれば、関数空間における作用子表示として、式 (19) は次のように書かれる。

$$E = E_0 + TH\Gamma E \dots\dots\dots (20)$$

4. 電磁界の統計的性質

積分方程式 (19), (20) は、共鳴散乱のような特異現象ではない場合には、逆作用子 $(I - TH\Gamma)^{-1}$ の展開を用いることができ、 $|TH\Gamma E| < |\gamma E|$ で、 $0 < \gamma < 1$ なる定数が存在するとすれば、次のように解かれる。⁽¹³⁾

$$E = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [TH\Gamma]^n E_0 \dots\dots\dots (21)$$

本論文では、 γ はモード変換係数で評価され、5 で示されるように、ほぼ 0.5 以下である。作用子 H は、ゆらぎの統計関数であることに注意して、電界 E の統計平均を $\langle E \rangle$ とすれば、

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= E_0 + \langle TH\Gamma E_0 \rangle \\ &+ \langle (TH\Gamma)(TH\Gamma)E_0 \rangle + \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

電界の相関関数 $\langle E(r_1)E^*(r_2) \rangle = \langle E_1 E_2^* \rangle$ は、「*」を複素共役を示すとして、

$$\begin{aligned} \langle E_1 E_2^* \rangle &= E_{01} E_{02}^* + \langle TH\Gamma E_0 \rangle_1 E_{01}^* \\ &+ E_{02} \langle (TH\Gamma)^* E_0^* \rangle_2 + \langle (TH\Gamma)(TH\Gamma)E_0 \rangle_1 E_{02}^* \\ &+ E_{01} \langle (TH\Gamma)^*(TH\Gamma)^* E_0^* \rangle_2 \\ &+ \langle [(TH\Gamma)E_0]_1 [(TH\Gamma)^* E_0^*]_2 \rangle + \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

光電磁界および光強度の分散に関する統計量は、式 (21) より、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \langle EE^* \rangle &- \langle E \rangle \langle E^* \rangle \cong \langle (TH\Gamma E_0)(TH\Gamma E_0)^* \rangle \\ \langle \{EE^* \rangle - \langle EE^* \rangle^2 \rangle &= \langle (EE^*)^2 \rangle - \langle EE^* \rangle^2 \end{aligned}$$

電界 E の高次モーメント $\langle E_1 \dots E_m E_{m+1}^* \dots E_{m+n}^* \rangle$ も同様に求められる。分散値および高次モーメントは高次評価に重要である。

〈4・1〉 電界の第 1 次モーメント $\langle E \rangle$ 入射波が次式で与えられる、軸に沿って入射する τ 方向偏波のビーム $(\underline{m}, \underline{n})$ モードについて考える。

$$\begin{aligned} E_{inc} &= i_r E_0 e^{-j\sqrt{\beta^2 - (2n+1)l_y \beta - (2m+1)l_x \beta - l_r^2} z} \\ &\cdot \varphi_m((\beta l_x)^{1/2} x) \varphi_n((\beta l_y)^{1/2} y) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここで、 l_r^2 は $g_x l_x^2 + g_y l_y^2$ で与えられる。
電界の統計平均は、縦横方向の屈折率ゆらぎが統計的に独立で

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^{(2)}(r) \varepsilon^{(2)}(r') \rangle &= \varepsilon'^{(2)} \langle \varepsilon^{(2)}(x, y) \varepsilon^{(2)}(x', y') \rangle \\ &\cdot \langle \varepsilon^{(2)}(z) \varepsilon^{(2)}(z') \rangle \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

とし、縦方向の屈折率ゆらぎの相関が、相関長 γ_{zr} 、周期長 γ_{zi} を用いて、指数関数的で

$$\langle \varepsilon^{(2)}(z) \varepsilon^{(2)}(z') \rangle = \langle \delta \varepsilon_z \rangle e^{-\frac{|z-z'|^2}{\gamma_{zr}}} \cos \frac{|z-z'|}{\gamma_{zi}} \quad (26)$$

であるとし、ゆらぎの平均値が $\langle \varepsilon \rangle$ であれば、導波路の長さを l として、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle E_{totl} \rangle &= E_{inc} + \sum_{m,n} i_r E_0 e^{-j\sqrt{\dots} z} \\ &\phi_m((\beta l_x)^{1/2}) \phi_n((\beta l_y)^{1/2} y) \\ &\cdot \sum_{\underline{m}, \underline{n}} \frac{j^2}{4\sqrt{\dots}\sqrt{\dots}} \left(\frac{\beta^2 l_x l_y}{\pi^2} \right) \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \\ &\frac{1}{2^{\underline{n}+\underline{m}} \underline{n}! \underline{m}!} \left[\beta^4 \langle \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \rangle \langle \delta \varepsilon_z \rangle G_z \right] \cdot \quad (27) \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{r_z} = \frac{1}{r_{zr}} + j \frac{1}{r_{zi}}$ 、又、 $G_z = \{G_z(\gamma_z) + G_z(\gamma_z^*)\} \frac{1}{2}$ で、

$$\begin{aligned} G'_z(\gamma_z) &= \left(j\Delta\beta'' - \frac{1}{\gamma_z} \right)^{-1} \left(j\Delta\beta' - \frac{1}{\gamma_z} \right)^{-1} \\ &\cdot \left[e^{j\Delta\beta' l - \frac{l}{\gamma_z}} + \frac{1}{j\Delta\beta} \left\{ \left(j\sqrt{\dots} - j\sqrt{\dots} e^{j\Delta\beta l} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(j\sqrt{\dots} + \frac{1}{\gamma_z} \right) (e^{j\Delta\beta l} - 1) \right\} \right] \end{aligned}$$

又、

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} \\ \Delta\beta' &= \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} \\ \Delta\beta'' &= \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} \end{aligned}$$

ここに

$$\sqrt{\frac{(-)}{(\dots)}} = \sqrt{\beta^2 - (2\underline{n}+1)\beta l_y - (2\underline{m}+1)\beta l_x - l_r^2}$$

変換係数

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \int \langle \varepsilon^{(2)}(x'_r, y') \varepsilon^{(2)}(x''_r, y'') \rangle \\ &\cdot \bigcap_{\xi = x' \cup y' \cup x'' \cup y''} \varphi_{\eta}(a_{\xi} \xi) \varphi_{\eta'}(a_{\xi} \xi) dx' dy' dx'' dy'' \\ (\eta, \eta') &= (\underline{m}, \underline{m}) \cup (\underline{n}, \underline{n}) \cup (\underline{m}, \underline{m}) \cup (\underline{n}, \underline{n}) \end{aligned}$$

式 (27) の第 2 項は、屈折率ゆらぎによる、入射 $(\underline{m}, \underline{n})$ モードから $(\underline{m}, \underline{n})$ モードへ、更に $(\underline{m}, \underline{n})$ モードから $(\underline{m}, \underline{n})$ モードに変換する多重散乱を示している。もし、横方向に関する屈折率ゆらぎの相関がガウスので

$$\langle \varepsilon^{(2)}(x', y') \varepsilon^{(2)}(x'', y'') \rangle = \langle \delta \varepsilon_{xy} \rangle e^{-\frac{(x'-x'')^2}{r_x^2} - \frac{(y'-y'')^2}{r_y^2}} \quad (28)$$

で与えられるならば、変換係数 $\langle \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \rangle$ は⁽¹⁶⁾

$$\langle \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \rangle$$

$$= \langle \delta \varepsilon_{xy} \rangle \cap \pi(a_t^2 + \frac{1}{\gamma_t^2})^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\min[u,v]} k! \binom{u}{k} \binom{v}{k}$$

$\begin{matrix} (t = x, y) \\ (u, v, w) = (m, \underline{m}, \underline{m}) \\ \cup (n, \underline{n}, \underline{n}) \end{matrix}$

$$\cdot 2^k \left\{ \gamma_t^2 \left(a_t^2 + \frac{1}{\gamma_t^2} \right) \right\}^{-\left(\frac{m+n}{2} - k \right)} \sum_{k'=0}^{[w/2]} \frac{(-1)^{k'} w!}{k'!(w-2k')!} 2^{w-2k'}$$

$$\cdot \sum_{n'} C(w-2k'; n', v) \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\left[1 + (-1)^{\frac{n'-(v+u-2k)}{2}} 2^{n'+(v+u-2k)} \right]$$

$$\cdot \frac{\alpha}{a_t} \Gamma \left(\frac{n' + (v+u-2k) + 1}{2} \right) \alpha^{v+u-2k} \beta^{n'} \Big] \dots \quad (29)$$

ここで、 $\alpha^2 = \frac{1 + \gamma_t^2 a_t^2}{2 + \gamma_t^2 a_t^2}$, $\beta^2 = \frac{1}{2 + \gamma_t^2 a_t^2}$. 係数 $C(i; n', n)$

は、級数 $2x^i H_n(x) = \sum_{n'} C(i; n', n) H_{n'}(x)$ の展開係数であり、漸近式より、 $C(0; n', v) = \delta_{n'v}$, $C(1; n', v) = \delta_{n',v+1} + 2v\delta_{n',v-1}$ で与えられる⁽¹⁷⁾.

式 (27) の関数 G_z は導波路の進行方向の屈折率ゆらぎにより生ずる高次モードと入射モード間のビート干渉を示している。

〈4・2〉 電界の相関関数、第 2 次モーメント $\langle E_1 E_2^* \rangle$
電界 E の相関関数 $\langle E(r_1) \cdot E^*(r_2) \rangle = \langle E_1 \cdot E_2^* \rangle$ は式 (23) より求められる。以下、ここでは、ランダム性による摂動分については、集束パラメータ l_t を実数であるものとして、評価する。

$$\langle E_1 \cdot E_2^* \rangle = E_0^2 \varphi_{\underline{m}}(a_x x_1) \varphi_{\underline{m}}(a_x x_2) \varphi_{\underline{n}}(a_y y_1)$$

$$\cdot \varphi_{\underline{n}}(a_y y_2) \cdot e^{-j\sqrt{\quad}(z_1 - z_2)}$$

$$+ \sum_{\underline{m}, \underline{n}} E_0^2 \varphi_{\underline{m}}(a_x x_1) \varphi_{\underline{m}}(a_x x_2) \varphi_{\underline{n}}(a_y y_1)$$

$$\cdot \varphi_{\underline{n}}(a_y y_2) e^{-j\sqrt{\quad}z_1 + j\sqrt{\quad}z_2}$$

$$\cdot \sum_{\underline{mn}} \frac{(-1)}{4\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}} \left(\frac{\beta^2 l_x l_y}{\pi^2} \right)$$

$$\frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{1}{2^{\underline{n}+\underline{m}} \underline{n}! \underline{m}!} \left[\beta^4 \langle \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \rangle \cdot \langle \delta \varepsilon_z \rangle G_z \right]$$

$$+ c.c + \sum_{\underline{m}, \underline{n}} \sum_{\underline{m}, \underline{n}} \frac{E_0^2}{4} e^{-j\sqrt{\quad}z_1 + j\sqrt{\quad}z_2}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}} \left(\frac{\beta^2 l_x l_y}{\pi^2} \right) \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \frac{1}{2^{\underline{n}+\underline{m}} \underline{n}! \underline{m}!}$$

$$\cdot \varphi_{\underline{m}}(a_x x_1) \varphi_{\underline{m}}(a_x x_2) \varphi_{\underline{n}}(a_y y_1) \varphi_{\underline{n}}(a_y y_2)$$

$$\cdot \left[\beta^4 \langle \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \rangle \langle \delta \varepsilon_z^{(2)} \rangle Q_z \right] \dots \quad (30)$$

ここで、式 (30) の第 3 項の $c.c$ は、第 2 項の複素共役で、添字 [1] と [2] を入れ換えたものである。又、進行方向のゆらぎに関する係数 Q_z は、 $Q_z = \frac{1}{2} [Q'_z(\gamma_z) + Q'_z(\gamma_z^*)]$ として、

$$Q'_z(\gamma_z) = \frac{e^{-j\Delta\beta l - \frac{1}{\gamma_z}} - 1}{\left\{ (-j\Delta\beta) - \frac{1}{\gamma_z} \right\} (j\Delta\beta')}$$

$$\cdot \left[e^{j\Delta\beta' l} - \frac{(-j\Delta\beta) - \frac{1}{\gamma_z} e^{j\Delta\beta'' l - \frac{1}{\gamma_z}} - 1}{(j\Delta\beta'') - \frac{1}{\gamma_z} e^{-j\Delta\beta l - \frac{1}{\gamma_z}} - 1} \right]$$

$$+ \frac{e^{j\Delta\beta'' l} - \frac{1}{\gamma_z} - 1}{\left\{ (-j\Delta\beta'') - \frac{1}{\gamma_z} \right\} (j\Delta\beta')}$$

$$\cdot \left[e^{j\Delta\beta' l} - \frac{j\Delta\beta - \frac{1}{\gamma_z} e^{j\Delta\beta l - \frac{1}{\gamma_z}} - 1}{(-j\Delta\beta) - \frac{1}{\gamma_z} e^{-j\Delta\beta'' l - \frac{1}{\gamma_z}} - 1} \right] \dots \quad (31)$$

5. X 線強度の統計平均と散乱

式 (30) は異なった 2 点における電界 $E(r_1)$, $E^*(r_2)$ の相関関数である。同じ点における電界の 2 次モーメントは、式 (30) で $r_1 = r_2 = r$ として、 $\langle E \cdot E^* \rangle$ で与えられるが、更に導波路の横断面において面積分すれば X 線強度 $\langle J \rangle = \int \langle E \cdot E^* \rangle dS$ は、モード関数の直交性を用いて、式 (30) の第 1, 2 項より、 $(\underline{m}, \underline{n})$ モードの強度 $\langle J_{\underline{mn}} \rangle$ が、第 3 項より $\sum \langle J_{\underline{mn}} \rangle$ が求められて、次のように示される。

$$\langle J \rangle = \langle J_{\underline{mn}} \rangle + \sum_{\substack{\underline{m} \neq \underline{m} \\ \underline{n} \neq \underline{n}}} \langle J_{\underline{mn}} \rangle \dots \quad (32)$$

ここで、 $\langle J_{\underline{mn}} \rangle$ は、

$$\langle J_{\underline{mn}} \rangle = 2^{\underline{m}+\underline{n}} \underline{m}! \underline{n}! \left(\frac{\pi^2}{\beta^2 l_x l_y} \right)^{1/2} E_0^2$$

$$- \sum_{\substack{\underline{m} \neq \underline{m} \\ \underline{n} \neq \underline{n}}} \frac{E_0^2}{2^{\underline{n}+\underline{m}} \underline{n}! \underline{m}!} \left(\frac{\beta^2 l_x l_y}{\pi^2} \right)^{1/2}$$

$$\cdot \frac{1}{4\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}} \left[\beta^4 \langle \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \gamma_{\underline{mn}; \underline{mn}} \rangle \cdot \langle \delta \varepsilon_z \rangle Q_z^0 \right]$$

又、 $\langle J_{\underline{mn}} \rangle$ ($\underline{m} \neq \underline{m}, \underline{n} \neq \underline{n}$) は、

$$\langle J_{\underline{m}, \underline{n}} \rangle = \frac{E_0^2}{2^{\underline{m}+\underline{n}} \underline{m}! \underline{n}!} \left(\frac{\beta^2 l_x l_y}{\pi^2} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{4 \sqrt{=}} \left[\beta^4 \langle \gamma_{\underline{m}, \underline{n}} \gamma_{\underline{m}, \underline{n}} \rangle \cdot \langle \delta \epsilon_z \rangle Q_z^0 \right]$$

$$\text{ここに、} \\ Q_z^0 = l \left[\frac{\gamma_{zr}}{(\Delta\beta'' - 1/\gamma_{zi})^2 \gamma_{zr}^2 + 1} + \frac{\gamma_{zr}}{(\Delta\beta'' + 1/\gamma_{zi})^2 \gamma_{zr}^2 + 1} \right]$$

出力端における、入射の $(\underline{m}, \underline{n})$ モードの強度 $\langle J_{\underline{m}, \underline{n}} \rangle$ の第2項はモード変換、散乱による $(\underline{m}, \underline{n})$ モードの強度減少を示している。 $\langle J_{\underline{m}, \underline{n}} \rangle$ は、モード変換、散乱による生ずる派生 $(\underline{m}, \underline{n})$ モードの強度を与える。通常の集束性導波路においては、 $l_x, l_y \ll \beta$ であるので、X線強度 $\langle J \rangle$ についての電力式 (32) は、エネルギー保存則を満足することを示している。有限半径の集束性導波路の場合には、カットオフ以下の導波モードに関するエネルギーは、伝送エネルギーを、カットオフ以上の高次モードに関するエネルギーは、散乱損 $\langle L_{loss} \rangle$ を与える。すなわち、 M, N を、導波モードの z 方向の位相定数 β_x の分散条件より決まるカットオフモードの限界次数とすれば、

$$\langle L_{loss} \rangle = \sum_{\substack{\underline{m}, \underline{n} > M, N}} \langle J_{\underline{m}, \underline{n}} \rangle$$

電界振幅 E_0 を、 $E_0^2 = \left(\frac{\pi^2}{\beta^2 l_x l_y} \right)^{-1/2} \frac{1}{2^{\underline{m}+\underline{n}} \underline{m}! \underline{n}!}$ とし、入射ビームが基本モード $(0, 0)$ の場合には、式 (32) より、 $\underline{m} = \underline{n} = 0$ として、X線強度 $\langle J \rangle$ は、

$$\langle J \rangle = \langle J_{00} \rangle + \sum_{m, n \neq 0} \langle J_{mn} \rangle \dots \dots \dots (33)$$

ここで、 $\langle J_{00} \rangle$ は、式 (32) より

$$\begin{aligned} \langle J_{00} \rangle &= 1 - \sum_{m, n \neq 0} \langle J_{mn} \rangle \\ &= 1 - \sum_{m, n \neq 0} [F_{mn}^{(t)} \cdot S_z F_{mn}^{(z)}] \end{aligned}$$

ここに、変換係数 $F_{mn}^{(t)}$ は

$$F_{mn}^{(t)} = \langle \delta \epsilon_{xy} \rangle \frac{1}{2\pi} \frac{(2m-1)!!(2n-1)!! a_x a_y \gamma_x \gamma_y}{m! n! (\gamma_x^2 a_x^2 + 2)^{m+\frac{1}{2}} (\gamma_y^2 a_y^2 + 2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

又、

$$F_{mn}^{(z)} = \frac{\gamma_{zr} \sqrt{l_x l_y}}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \left((ml_x + nl_y) - \frac{1}{\gamma_{zi}} \right)^2 \gamma_{zr}^2} + \frac{1}{1 + \left((ml_x + nl_y) + \frac{1}{\gamma_{zi}} \right)^2 \gamma_{zr}^2} \right\}$$

$$S_z = \frac{\beta^2 l \langle \delta \epsilon_z \rangle}{\sqrt{l_x l_y}}$$

$$\langle L_{loss} \rangle$$

$$\begin{aligned} &\cong \langle \delta \epsilon_{xy} \rangle \langle \delta \epsilon_z \rangle \frac{\beta^2 l \gamma_{zr}}{2\pi} \frac{(\gamma_t a_t)^2}{(\gamma_t^2 a_t^2 + 2)} e^{-(M+N)^2 (l_t \gamma_t)^2} \\ &\frac{2^{M+N}}{(2 + \gamma_t^2 a_t^2)^{M+N}} \frac{1}{2s} \left[1 - \frac{1}{2s^2} + \dots \right] \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

ゆらぎの相関長が短い $s < 1$ の場合には、

$$\begin{aligned} \langle L_{loss} \rangle &\cong \langle \delta \epsilon_{xy} \rangle \langle \delta \epsilon_z \rangle \frac{\beta^2 l}{4\sqrt{\pi} l_t} \frac{(\gamma_t a_t)^2}{(\gamma_t^2 a_t^2 + 2)} \\ &\cdot \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} s + \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^3 + \dots \right] \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

であることが知られている。図4に散乱損 $\langle L_{loss} \rangle$ の数値例が示されている。式 (35) は、集束性パラメータより小さい微小ゆらぎ $l_t \gamma_{zr} \ll 1$ による散乱損を与え、図5に数値例が示されている。もし、半径 a の集束性導波路の屈折率分布 $\sqrt{\epsilon}$ が $\sqrt{\epsilon} = \sqrt{\epsilon'} \{1 - (l_t \gamma)^2\}^{1/2}$ で与えられ、クラッドの屈折率が $\sqrt{\epsilon_2}$ の場合には、カットオフの臨界モード次数 (M, N) は、 $M + N \cong \frac{\beta l_t a^2}{2}$ で与えられる。図4, 5より知られるように、ゆらぎの相関長が集束パラメータより決められるスポットサイズより大きい場合には、ファイバの半径の大きさによって損失が大きく変化するが、ゆらぎの相関長が波長程度以下になると、損失は小さくなるが、あまり半径には依存しなくなることが知られる。

6. 電磁界の統計的分散量

電界の高次モーメント及び統計分散は、高次評価に重要である。4. 及び 5. の結果より、例えば、電界の統計量 $\langle EE^* \rangle - \langle E \rangle \langle E^* \rangle$ は、式 (9), (10) より、横断面の積分値として、 $\int \{ \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle - \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^* \rangle \} dS = \sum_{m, n} \langle J_{mn} \rangle$ であることが導かれる。すなわち、光強度平均の振幅 J と平均電界振幅の差は、モード変換、散乱量の総和に等しい。これらの関係は、伝送の高次評価のために基礎的関係を与える。

本論文では、ランダム媒質による伝送特性を吸収特性を第1次摂動とし、統計評価を行った。本論を基に、第2次摂動として、吸収特性とランダム特性の混合問題を今後検討することができる。

図4 屈折率ゆらぎによる散乱損 $\langle L_{loss} \rangle$.
 $M + N \cong \frac{\beta l_t a^2}{2}$
 Fig. 4. Scattering loss due to index fluctuation $\langle L_{loss} \rangle$.

図5 屈折率ゆらぎによる散乱損 $\langle L_{loss} \rangle$.
 $\gamma_t = \gamma_{zr} = \gamma, \gamma_{zi} = 0, \beta/l_t = 10^4, M + N \cong \frac{\beta l_t a^2}{2}$
 Fig. 5. Scattering loss due to index fluctuation $\langle L_{loss} \rangle$.

7. むすび

グリーンのダイアディックを用いて、ベクトル界として、集束性導波路における屈折率ゆらぎによるモード変換、多重散乱を、電界の統計平均および電界の相関関数、光強度関数について検討した。波長に比べて小さいゆらぎに対応するレイリー散乱領域から大きなゆらぎの Mie 散乱領域まで統一的に示した。X 線ファイバとして X 線伝送系に用いる場合に重要なパラメータである散乱による伝送損を評価し、数値例を与えた。本論文では、半径の比較的大きい集束性導波路のゆらぎについて論じたが、半径の影響が強く現れる径の細いものについては、吸収特性との相互作用をも考慮した詳細な理論として今後検討したい。

(平成 12 年 3 月 27 日受付, 同 12 年 8 月 3 日再受付)

文 献

- (1) 宮崎保光, 信学会全国大会, C-17, 2-439, (1990).
- (2) Y. Miyazaki & R. Ogawa, PIERs, MIT, S5A5, 7, pp.682(1991).
- (3) Y. Tashiro & Y. Miyazaki, Proc. of OFSET'95, Tianjing, pp.a.38-a.43(1995).
- (4) Y. Miyazaki & T. Okuyama, Proc. of ISAP, vol.3, pp.657-660(1996).
- (5) 宮崎保光, 信学会論文誌, 57-C 巻, 8 号, pp.255-262(1974).
- (6) 宮崎保光, 電気学会論文誌, 120-C 巻, 1 号, pp.68-73(2000).
- (7) M. von Laue, Röntgenstrahl-Interferenzen, Akademische Verlag, Frankfurt (1960).
- (8) A. Yariv, Quantum Electronics, John Wiley & Sons, New York (1989).
- (9) B. L. Henke, E. M. Gullikson & J. C. Davis, Atomic Data and Nuclear Data Tables 54, pp.181-342 (1993).
- (10) Y. Miyazaki, Arch. Elekt. Übertragung, Vol.29, pp.205-213 (1975).
- (11) H. G. Unger, Planar Optical Waveguides and Fibers, Clarendon Press, Oxford (1977).
- (12) Y. Miyazaki, Proc. of Topical Meeting on Integrated Optics, Las Vegas, USA, MA6-1 (1972).
- (13) 宮崎保光, 信学会論文誌, 59-C 巻, 1 号, pp.37-44(1976).
- (14) Y. Miyazaki, Proc. of URSI Symposium on Electromagnetic Wave Theory, London, pp.135-139 (1974).
- (15) 宮崎保光, 信学会全国大会, C1-45, p.45, (1998).
- (16) A. Erdélyi : "Tables of integral transforms", vol.2, McGraw-Hill Book Co., New York(1954).
- (17) M. Abramowitz and I. A. Stegun : "Handbook of mathematical functions", AMS55, National Bureau of Standards(1964).

宮崎保光 (正員) 1941 年 2 月 4 日生。1963 年 3 月名古屋大学工学部電子工学科卒。1968 年 3 月名古屋大学大学院工学研究科電子工学専攻博士課程修了。工学博士。1972 年同大学工学部電気工学科講師、1976 年同大学助教授。1981 年豊橋技術科学大学工学部情報工学系教授、現在に至る。この間、1973～1975 年西ドイツ・ブラウンシュバイク工科大学高周波研究所に客員として出張、1996 年ベルリン工科大学の客員教授。1999 年マルチメディアセンター長。主として、ミリ波導波路、光ファイバ、光集積回路、X 線ファイバ、X 線機能素子、電磁波の散乱・回折、EMC、生体電磁工学の研究に従事。1970 年米沢賞。著者「応用ベクトル解析」。応用物理学会、電子情報通信学会、IEEE 会員。