外乱除去特性を考慮した非線形系の出力フィードバックによる ロバスト追従制御

非会員 伊藤 和 寿 (上智大学)
正 員 申 鉄 龍 (上智大学)
非会員 田 村 捷 利 (上智大学)

Output Feedback Robust Tracking Control of Nonlinear System with Almost Disturbance Decoupling

Itou Kazuhisa, Non-member, Tielong Shen, Member, Katsutoshi Tamura, Non-member (Sophia University)

This paper presents a design of semiglobal robust tracking output feedback controller with almost disturbance decoupling for a class of nonlinear systems. The system is affected by uncertainty and unknown time-varying dicturbances. The uncertainty is described by gain bounded unknown nonlinear functions of the state variables. If the system is of relative degree one and of minimum phase, the proposed controller ensures input-to-state stability with respect to disturbance inputs, and almost disturbance decoupling properties for any initial condition and for any smooth bounded output reference signal.

キーワード：Robust Control, Nonlinear Control, Output Feedback, Almost Disturbance Decoupling.

1. はじめに

実システムの制御を行う際、外乱の影響は避けられない問題である。状態フィードバックによる外乱除去問題とは外乱に対するシステム出力の応答を零にする問題で、線形系⁽¹⁾⁽²⁾、または非線形系⁽³⁾⁽⁴⁾でこの問題が可解であるための幾何学的な必要十分条件が示されている。それらの条件が成り立たない場合には、出力に対する外乱の影響を任意のレベルに抑えるような補償器の設計問題となる。具体的には、閉ループ系の内部安定性の確保と外乱 w から評価出力 z までの L_p ゲインが所望のレベル γ 以下、すなわち

$$\|z\|_{L_p} \leq \gamma \|w\|_{L_p}, \quad \forall w \dots\dots\dots (1)$$

が零初期条件で成り立つようなフィードバック補償器を設計することである。ここで $\|\cdot\|_{L_p}$ は信号の L_p ノルムである。

実際、このような設計問題は広く研究されている⁽⁵⁾⁻⁽⁹⁾。文献⁽⁵⁾では特異摂動モデルを用いた手法でこの問題に対する解を与えた。また座標変換後の零ダイナミクスが大域的に漸近安定であるという仮定の下で、文献⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾では Lyapunov の繰り返し設計により補償器を設計する手法とその拡張が示された。さらに受動化されたシステムの supply rate を修正することにより、システムが非最小位相である

場合の設計法も提案された⁽⁹⁾。ただし、いずれの場合においても、零初期状態のもとで (1) が成り立つことを設計仕様としている。

しかし線形系とは異なり、非線形系では自由系が漸近安定であっても、入力によって有限時間で状態が発散してしまう finite escape 現象が存在する⁽¹⁰⁾。従って、漸近安定性と零初期状態のもとでの (1) を保証する系において、非零初期状態によっては有界な外乱によって系の状態が有限時間で発散してしまう例が示されている⁽¹¹⁾。これは前述の外乱除去設計の際、閉ループ系の内部安定性だけでなく、外乱入力から状態までの入力-状態安定性 (ISS) も考慮しなければならないことを意味する。また、状態が不可検出の場合は、出力フィードバックによる外乱除去問題が一般的である。文献⁽¹²⁾では出力追従問題を扱い、零ダイナミクスが線形の場合、外乱-状態 ISS を考慮した出力フィードバック補償器の一設計法が示された。実システムにおいては外乱だけでなく、設計に用いた数学モデルの不確かさも考慮しなければならない。本論文ではモデル化誤差等の不確かさを有する相対次数 1 次の非線形システムに対して、外乱-状態 ISS を考慮したロバスト追従問題を考える。ただし、不確かさはマッチング条件を満たすものとし、補償器は出力フィードバックにより構成する。本論文の主要結果では、相対次数 1 次の非線形システムの高周波ゲインが適切な分

解条件を満たし、かつ零ダイナミクスが十分な安定余裕度を持つとき、外乱-状態 ISS を考慮した出力フィードバックによる外乱除去問題が可解であることを示す。また、不確かさが存在せず、かつ零ダイナミクスが線形の場合、本論文の結果は文献⁽¹¹⁾の結果と等価である。

本論文の構成は以下の通りである。第2章ではシステムの記述と仮定を述べ、対象とするシステムのクラスを示す。続く第3章で外乱-状態 ISS を考慮した外乱除去特性を持つ出力フィードバック補償器を構成し、 H_∞ 問題から本設計法がどのような解釈が可能かを考える。第4章で数値例を示し、最後の第5章で結論を述べる。

本論文で用いる記号を述べておく。 $\mathbf{R}^n$ は n 次元の実数空間を表す。class $\mathcal{K}$ 関数 α とは、 $\alpha(0) = 0$ を満たす非減少関数をいい、class $\mathcal{KL}$ 関数 $\beta(s, t)$ とは固定した t に対して s に関して class $\mathcal{K}$ 関数、固定した s に対して t に関して減少関数であるものをいう。また、 $\|\cdot\|$ はベクトルのユークリッドノルムを、 $\sigma(\cdot)$ はマトリクスの最大特異値を表す。

2. 問題の記述

次式で記述される非線形系を考える。

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta) + f_1(\eta, y)y + \Psi_\eta(y)w(t) \\ \dot{y} = a(\eta, y) + b(\eta, y)u + \Psi_e^T(y)w(t) + \delta(\eta, y) \end{cases} \quad (2)$$

ただし $u \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $\eta \in \mathbf{R}^{n-1}$, $w \in \mathbf{R}^p$ はそれぞれ入力、出力、状態ベクトルおよび外乱信号とし、 δ は不確かさとする。また f_0, f_1, Ψ_e, δ は滑らかなベクトル場、 Ψ_η は滑らかな行列関数、 a, b は滑らかなスカラー関数とする。さらに $f_0(0) = 0$, $b(\eta, y) \neq 0 \ \forall \eta, y$ とする。(2)において $w = 0$, $\delta = 0$ とおいたシステムをノミナルシステムとよぶ。

[注1] (2) は、システム

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u + q(x)w(t) + \Delta_f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3)$$

が次の条件を満たすとき、座標変換 $[\eta^T, y]^T = T(x)$ により得られる。

- i) 相対次数が 1, すなわち $L_g h(x) \neq 0 \ \forall x$
- ii) $\text{rank} \{dh, d(L_f h), \dots, d(L_f^{n-1} h)\} = n$
- iii) $[q_i, ad_f^k r] = 0, 1 \leq i \leq p, 0 \leq k \leq n-2$

ただし r は次式を満たすベクトル場である。

$$\left\langle \begin{bmatrix} dh \\ \vdots \\ d(L_f^{n-1} h) \end{bmatrix}, r \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 $x \in \mathbf{R}^n$ は状態ベクトル、 Δ_f はマッチング条件、すなわち $\Delta_f = g(x)\delta$ を満たす不確かさを表す。 $f, g, q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ は滑らかな非線形関数である。□

このシステムに対し、次の出力フィードバックによる出力追従問題を考える。

$$u = c(y) \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $\delta(\eta, y)$ に対して次式を満たす滑らかなゲイン有界関数 $n(\eta, y)$ が存在するとする。

$$\|\delta(\eta, y)\| \leq \|n(\eta, y)\| \ \forall \eta, y \dots\dots\dots (5)$$

[定義1]⁽¹³⁾ 非線形系 $\dot{x} = f(t, x, w)$ を考える。ただし f は t に関して区分的連続かつ x, w に関して局所的 Lipschitz であるとする。このシステムが入力-状態 ISS であるとは、任意の初期条件 $x(t_0)$ と任意の有界外乱 $w(t)$ に対して解 $x(t)$ が存在し、 $t \geq t_0$ において次式を満たす class $\mathcal{KL}$ 関数 β および class $\mathcal{K}$ 関数 ρ が存在することである。

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) + \rho\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|w(\tau)\|\right) \quad (6)$$

さらに、ロバスト安定 (ISS) であるとは、全ての δ に対して入力-状態 ISS であることをいう。□

[定義2] 閉ループ系 (2),(4) がロバスト γ -ISS 外乱除去特性を有するとは、任意の δ に対し以下の仕様を満たすことである。

- (S1) 外乱 w から状態 x がロバスト安定 (ISS) である。
- (S2) 任意の $t \geq t_0$ においてシステムの出力 y 、リファレンス信号 y_r に対して次式が成り立つような class $\mathcal{K}$ 関数 α, β が存在する。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [y(\tau) - y_r(\tau)]^2 d\tau &\leq \gamma \left[\beta(\| [y(t_0), y_r(t_0), \eta(t_0)]^T \|) \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \alpha(\|w(\tau)\|^2) d\tau \right] \quad (7) \end{aligned}$$

□

[注2] 従来の問題⁽¹²⁾においては、入力-状態安定性 (S1) の代わりに $w = 0$ のときの内部安定性のみが考慮された。□

[注3] (S2)において $z = y - y_r, y(0) = y_r(0) = \eta(0) = 0, \alpha(s) = s$ とすると

$$\int_0^t \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma \int_0^t \|w(t)\|^2 dt \dots\dots\dots (8)$$

となり、従来の L_2 外乱低減問題と等価であるが、(8) と内部安定性だけでは、 $[y(0), \eta(0)]^T \neq 0$ のとき w によって有限時間に状態が発散する例が存在することが示されている⁽¹¹⁾。□

システム (2) に対して次の仮定をおく。

[仮定1] ノミナルシステムは最小位相系である。□

仮定1を満たすシステムに対し、出力 y が追従すべき軌道 $y_r(t)$ が与えられているとする。まず、ノミナルシステムにおいて、逆ダイナミクスにより、 η が追従すべき軌道 η_N のダイナミクスは次式で与えられる。

$$\dot{\eta}_N = f_0(\eta_N) + f_1(\eta_N, y_r)y_r \dots\dots\dots (9)$$

誤差を $e = y - y_r$, $\tilde{\eta} = \eta - \eta_N$ とすると

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y} - \dot{y}_r \\ &= a(\eta, y) + b(\eta, y)u + \Psi_e^T(y)w(t) + \delta(\eta, y) - \dot{y}_r \\ \dot{\tilde{\eta}} &= \dot{\eta} - \dot{\eta}_N \\ &= f_0(\eta) + f_1(\eta, y)y + \Psi_\eta(y)w(t) \\ &\quad - f_0(\eta_N) - f_1(\eta_N, y_r)y_r \end{aligned}$$

仮定 1により, (2) のサブシステム η について

$$\dot{\eta} = f_0(\eta) \dots\dots\dots (10)$$

が漸近安定となり, さらに次式を満たす漸近安定マトリクス A_0 および滑らかな関数 $\hat{f}_0$ が存在する.

$$f_0(\eta) = A_0\eta + \hat{f}_0(\eta) \dots\dots\dots (11)$$

これより

$$f_0(\eta) - f_0(\eta_N) = A_0\tilde{\eta} + \hat{f}_0(\eta) - \hat{f}_0(\eta - \tilde{\eta}) \dots (12)$$

さらに次式を満たす滑らかなマトリクス $M_1(\eta, y)$ およびベクトル $M_2(\eta, y)$ が存在する.

$$f_1(\eta, y)y - f_1(\eta_N, y_r)y_r = [M_1(\eta, y), M_2(\eta, y)] \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ e \end{bmatrix} \dots\dots (13)$$

従って, 誤差システムは次のようになる.

$$\begin{cases} \dot{e} = a(\eta, y) + b(\eta, y)u + \Psi_e^T(y)w(t) + \delta(\eta, y) - \dot{y}_r \\ \dot{\tilde{\eta}} = A_0\tilde{\eta} + \hat{f}_0(\eta) - \hat{f}_0(\eta - \tilde{\eta}) + \Psi_\eta(y)w(t) \\ \quad + [M_1(\eta, y), M_2(\eta, y)] \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ e \end{bmatrix} \end{cases} \dots\dots (14)$$

本章では, 導かれた誤差システムに対して γ -ISS を考慮した出力フィードバックによるロバストトラッキングを達成する補償器を構成する.

3. 主要結果と証明

状態空間 $[\tilde{\eta}^T, e^T]^T$ において, 任意のコンパクトな集合 $\chi \subseteq \mathbf{R}^n$ を考える. 与えられた χ において関数 f_0 は実数行列 E と関数ベクトル Λ を用いて

$$\hat{f}_0(\eta) - \hat{f}_0(\eta - \tilde{\eta}) = E\Lambda(\tilde{\eta}, \eta_N, e, y_r) \dots\dots\dots (15)$$

のように表すことができる. さらに一般性を失うことなく, χ において Λ のゲインは有界であるため, 適切な定数行列 F に対して

$$\|\Lambda(\eta_N, y_r, e, \tilde{\eta})\| \leq \|F^T \tilde{\eta}\| \dots\dots\dots (16)$$

が成り立つことに注意する.

以下に本論文の主要定理を示す.

〔定理 1〕 仮定 1のもとで任意のコンパクト集合 χ が与えられたとき, 誤差システム (14) に対して次の条件が満たされたとする.

(C1) 高周波ゲイン $b(\eta, y)$ は $b(\eta, y) = b_0(\eta)b_1(y)$ のように分解でき, かつ $b_0(\eta) > 0 \forall \eta$, $b_1(y) \neq 0 \forall y$ である.

(C2) ある正定数 λ_1, λ_2 が存在し, $\varepsilon > 1 + \frac{3}{2c}$ ($c \geq 1$) に対して次の代数 Riccati 不等式

$$\begin{aligned} A_0^T P + P A_0 + P (\lambda_1^2 E E^T + \lambda_2^2 M M^T) P \\ + \frac{1}{\lambda_1^2} F F^T + \frac{1}{\lambda_2^2} I \leq -\varepsilon I \dots (17) \end{aligned}$$

を満たす正定対称解 P が存在する. ただし M は, χ において以下を満たす定数行列である.

$$M_1(\eta, y)M_1(\eta, y)^T \leq M M^T \quad \forall \eta, y \in \chi \dots (18)$$

このとき, 出力フィードバックによるロバスト外乱除去を考慮したトラッキング問題は可解である. $\square$

(証明) (17) の解 P を用いた正定値関数

$$V(e, \tilde{\eta}, \eta_N) = \frac{1}{2}e^2 b_0^{-1}(\eta) + \frac{1}{2}\tilde{\eta}^T P \tilde{\eta} \dots\dots\dots (19)$$

の (14) の解軌道に沿う時間導関数を評価する.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e b_0^{-1}(\eta) \dot{e} + \frac{e^2}{2} \frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta} (\dot{\eta} + \dot{\eta}_N) + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\eta}}^T P \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T P \dot{\tilde{\eta}} \\ &= e b_0^{-1}(\eta) [a(\eta, y) + b_0(\eta)b_1(y)u + \Psi_e^T(y)w(t) + \delta(\eta, y) - \dot{y}_r] \\ &\quad + \frac{e^2}{2} \frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta} [f_0(\eta) + f_1(\eta, y)y + \Psi_\eta(y)w(t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\eta}}^T P \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T P \dot{\tilde{\eta}} \\ &\leq e [b_1(y)u + b_0^{-1}(\eta) (a(\eta, y) - \dot{y}_r) \\ &\quad + \frac{e}{2} \frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta} (f_0(\eta) + f_1(\eta, y)y + b_0^{-1}(\eta)\Psi_e^T(y)w(t) \\ &\quad + \frac{e}{2} \frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta} \Psi_\eta(y)w(t) + b_0^{-1}(\eta)\delta(\eta, y))] \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T \left[\varepsilon I + P (\lambda_1^2 E E^T + \lambda_2^2 M M^T) P + \frac{1}{\lambda_1^2} F F^T \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_2^2} I \right] \tilde{\eta} + \tilde{\eta} P E \Lambda + \|\tilde{\eta}\| \|P \Psi_\eta(y)\| \|w(t)\| \\ &\quad + \tilde{\eta} P M_1(\eta, y) \tilde{\eta} + \tilde{\eta} P M_2(\eta, y) e \\ &\leq e [b_1(y)u + b_0^{-1}(\eta) (a(\eta, y) - \dot{y}_r) \\ &\quad + \frac{e}{2} \frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta} (f_0(\eta) + f_1(\eta, y)y + b_0^{-1}(\eta)\Psi_e^T(y)w(t) \\ &\quad + \frac{e}{2} \frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta} \Psi_\eta(y)w(t) + b_0^{-1}(\eta)\delta(\eta, y))] \\ &\quad - \frac{\varepsilon - 1}{2} \|\tilde{\eta}\|^2 - \left(\frac{1}{2} \|\tilde{\eta}\| - \|P \Psi_\eta(y)\| \|w(t)\| \right)^2 \\ &\quad + \|P \Psi_\eta(y)\|^2 \|w(t)\|^2 - \frac{1}{2\lambda_1^2} \{ \|F^T \tilde{\eta}\|^2 - \|\Lambda\|^2 \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\lambda_1 E^T P \tilde{\eta} - \frac{1}{\lambda_1} \Lambda \right)^T \left(\lambda_1 E^T P \tilde{\eta} - \frac{1}{\lambda_1} \Lambda \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\left(\lambda_2 PM_1(\eta, y)\tilde{\eta} - \frac{1}{\lambda_2}\tilde{\eta}\right)^T\left(\lambda_2 PM_1(\eta, y)\tilde{\eta} - \frac{1}{\lambda_2}\tilde{\eta}\right) \\
 & +\frac{\lambda_2^2}{2}\tilde{\eta}^T\left(M_1^T(\eta, y)PPM_1(\eta, y) - P M M^T P\right)\tilde{\eta} \\
 & -\left(\frac{1}{2}\tilde{\eta} - PM_2(\eta, y)e\right)^T\left(\frac{1}{2}\tilde{\eta} - PM_2(\eta, y)e\right) \\
 & +M_2^T(\eta, y)PPM_2(\eta, y)e^2 \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 \mu(\eta, y) &= b_0^{-1}(\eta)(a(\eta, y) - \dot{y}_r) \\
 \nu(\eta, y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta}(f_0(\eta) + f_1(\eta, y)y), \\
 \bar{\Psi}_e(\eta, y) &= b_0^{-1}(\eta)\Psi_e(y), \quad \bar{\Psi}_\eta^T(\eta, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial b_0^{-1}(\eta)}{\partial \eta}\Psi_\eta(y), \\
 \bar{\delta}(\eta, y) &= b_0^{-1}(\eta)\delta(\eta, y)
 \end{aligned}$$

とおく. また

$$\|P\Psi_\eta(y)\|^2 = \|P\Psi_\eta(y_r)\|^2 + e\Xi(y, y_r) \dots\dots (21)$$

を満たす滑らかな関数 $\Xi(y, y_r)$ が存在すること, および (16),(18) に注意すると, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq e[b_1(y)u + \mu(\eta, y) + e\nu(\eta, y) + \bar{\Psi}_e^T(\eta, y)w(t) \\
 &\quad + e\bar{\Psi}_\eta^T(\eta, y)w(t) + \bar{\delta}(\eta, y)] - \frac{\varepsilon - 1}{2}\|\tilde{\eta}\|^2 \\
 &\quad + (\|P\Psi_\eta(y_r)\|^2 + e\Xi(y, y_r))\|w(t)\|^2 \\
 &\quad + M_2^T(\eta, y)PPM_2(\eta, y)e^2 \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

このとき, δ のゲイン有界性から, コンパクト集合 χ において次式を満たす $\bar{n}$

$$\bar{\delta}(\eta, y) \leq \bar{n}(\eta, y)$$

が存在することに注意し, v を後に決める補助入力として, u を以下のようにとる.

$$\begin{aligned}
 u &= b_1^{-1}(y)\{-ke - \mu(\eta_N, y) - e\nu(\eta_N, y) \\
 &\quad - \frac{e}{4}\|\bar{\Psi}_e(\eta_N, y)\|^2 - \frac{e^3}{4}\|\bar{\Psi}_\eta(\eta_N, y)\|^2 \\
 &\quad - \frac{e}{4}\|\Xi(y, y_r)\|^2 - \bar{n}(\eta_N, y) + v\} \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -ke^2 - \frac{\varepsilon - 1}{2}\|\tilde{\eta}\|^2 + ev \\
 &\quad + |e|\|\mu(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \mu(\eta_N, y)\| \\
 &\quad + e^2\|\nu(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \nu(\eta_N, y)\| \\
 &\quad + M_2^T(\eta, y)PPM_2(\eta, y)e^2 \\
 &\quad + |e|\|\bar{n}(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \bar{n}(\eta_N, y)\| \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2}|e|\|\Xi(y, y_r)\| - \|w\|^2\right)^2 \\
 &\quad + \|w\|^4 + (\|P\Psi_\eta^T(y_r)\|^2 + 2)\|w\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{4}e^2[\|\bar{\Psi}_e(\tilde{\eta} + \eta_N, y)\|^2 - \|\bar{\Psi}_e(\eta_N, y)\|^2] \\
 & +\frac{1}{4}e^4[\|\bar{\Psi}_\eta(\tilde{\eta} + \eta_N, y)\|^2 - \|\bar{\Psi}_\eta(\eta_N, y)\|^2] \\
 & -\left(\frac{1}{2}e\bar{\Psi}_e(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - w\right)^T\left(\frac{1}{2}e\bar{\Psi}_e(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - w\right) \\
 & -\left(\frac{1}{2}e^2\bar{\Psi}_\eta(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - w\right)^T\left(\frac{1}{2}e^2\bar{\Psi}_\eta(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - w\right) \\
 & \leq -ke^2 - \frac{\varepsilon - 1}{2}\|\tilde{\eta}\|^2 + ev \\
 & \quad + \|w\|^4 + (\|P\Psi_\eta^T(y_r)\|^2 + 2)\|w\|^2 \\
 & \quad + M_2^T(\eta, y)PPM_2(\eta, y)e^2 \\
 & \quad + |e|\left[\|\mu(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \mu(\eta_N, y)\| \right. \\
 & \quad \left. + \|\bar{n}(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \bar{n}(\eta_N, y)\|\right] \\
 & \quad + e^2\left[\|\nu(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \nu(\eta_N, y)\| \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4}(\|\bar{\Psi}_e(\tilde{\eta} + \eta_N, y)\|^2 - \|\bar{\Psi}_e(\eta_N, y)\|^2) \right] \\
 & \quad + \frac{e^2}{4}[\|\bar{\Psi}_\eta(\tilde{\eta} + \eta_N, y)\|^2 - \|\bar{\Psi}_\eta(\eta_N, y)\|^2] \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

このとき, 与えられたコンパクト集合 χ において次式を満たす正定数 m と正定関数 γ_i ($i = 1, 2, 3$) を選ぶことができる.

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}(M_2(\eta, y)M_2(\eta, y)^T) &\leq m\bar{\sigma}^2(P) \\
 |\mu(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \mu(\eta_N, y)| + \|\bar{n}(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \bar{n}(\eta_N, y)\| &\leq \gamma_1(y)\|\tilde{\eta}\| \\
 |\nu(\tilde{\eta} + \eta_N, y) - \nu(\eta_N, y)| & \\
 +\frac{1}{4}(\|\bar{\Psi}_e(\tilde{\eta} + \eta_N, y)\|^2 - \|\bar{\Psi}_e(\eta_N, y)\|^2) &\leq \gamma_2(y)\|\tilde{\eta}\| \\
 \frac{1}{4}[\|\bar{\Psi}_\eta(\tilde{\eta} + \eta_N, y)\|^2 - \|\bar{\Psi}_\eta(\eta_N, y)\|^2] &\leq \gamma_3(y)\|\tilde{\eta}\|
 \end{aligned}$$

よって $c \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -ke^2 - \frac{2c\varepsilon - 2c - 3}{4c}\|\tilde{\eta}\|^2 + e(v + em\bar{\sigma}^2(P)) \\
 &\quad + \|w\|^4 + (\|P\Psi_\eta^T(y_r)\|^2 + 2)\|w\|^2 \\
 &\quad - \left(c\gamma_1(y)e - \frac{\|\tilde{\eta}\|}{2\sqrt{c}}\right)^2 - \left(c\gamma_2(y)e^2 - \frac{\|\tilde{\eta}\|}{2\sqrt{c}}\right)^2 \\
 &\quad - \left(c\gamma_3(y)e^4 - \frac{\|\tilde{\eta}\|}{2\sqrt{c}}\right)^2 \\
 &\quad + c^2(\gamma_1^2(y)e^2 + \gamma_2^2(y)e^4 + \gamma_3^2(y)e^8) \\
 &\leq -ke^2 - \frac{2c\varepsilon - 2c - 3}{4c}\|\tilde{\eta}\|^2 \\
 &\quad + \|w\|^4 + (\|P\Psi_\eta^T(y_r)\|^2 + 2)\|w\|^2 \\
 &\quad + e[v + em\bar{\sigma}^2(P) \\
 &\quad \quad + c^2(\gamma_1^2(y)e + \gamma_2^2(y)e^3 + \gamma_3^2(y)e^7)]
 \end{aligned}$$

従って十分大きな c と

$$v = -em\bar{\sigma}^2(P) - c^2(\gamma_1^2(y)e + \gamma_2^2(y)e^3 + \gamma_3^2(y)e^7) \quad (25)$$

により、次式を得る。

$$\dot{V} \leq -ke^2 - \frac{2c\varepsilon - 2c - 3}{4c} \|\bar{\eta}\|^2 + \|w\|^4 + (\|P\Psi_\eta^T(y_r)\|^2 + 2) \|w\|^2 \dots \quad (26)$$

よって外乱信号 $w(t)$ を入力と考えた場合の入力-状態安定性 (ISS) が保証される。

また、(26) の両辺を区間 $[t_0, t]$ で積分すると

$$k \int_{t_0}^t e^2(\tau) d\tau \leq \int_{t_0}^t [(2 + k_0) \|w\|^2 + \|w\|^4] d\tau + V(t_0) \quad (27)$$

ただし $k_0 = \sup_{t \geq t_0} \|P\Psi_\eta^T(y_r)\|^2$ である。従って、与えられた γ に対し

$$\frac{2 + k_0}{k} \leq \gamma \dots \quad (28)$$

を満たす定数 k を選べば

$$\int_{t_0}^t e^2(\tau) d\tau \leq \gamma \left(\int_{t_0}^t (\|w(\tau)\|^2 + \|w(\tau)\|^4) d\tau + V(t_0) \right) \quad (29)$$

より、(7) も $\alpha(r) = r + r^2$, $\beta = V(t_0)$ とすることで満たされることがわかる。□

[注 4] 定理 1(C2) において、 c は任意に大きくとれるので、十分小さい正定数 ε' を用いて $\varepsilon = 1 + \varepsilon'$ とおくと、(17) は次式のように書き換えられる。

$$A_0^T P + P A_0 + P \hat{E} \Lambda^2 \hat{E}^T P + \hat{F}^T \Lambda^{-2} \hat{F} < -\varepsilon' I \quad (30)$$

ただし

$$\hat{E} = [E, M], \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} F^T \\ \sqrt{1 + \lambda_2^2} I \end{bmatrix}, \\ \Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1 I, \lambda_2 I \}$$

従って条件 (C2) は

$$\|\Lambda^{-1} \hat{F}(sI - A_0) \hat{E} \Lambda\|_\infty < 1 \dots \quad (31)$$

と同値である。 A_0 は漸近安定行列なので、 $\hat{E}$ (または $\hat{F}$) の特異値が十分小さければ (31) が満たされ、故に (17) を満たす P, ε に対して $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ が存在する。一方、(31) はシステム

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + \hat{E} \Delta(\xi, t) \\ \|\Delta\| \leq \|\hat{F} \xi\| \end{cases}$$

が二次安定であることを意味し、システムの零ダイナミクスが十分な“安定余裕”を有することに等価である。□

[注 5] 不確かさを考慮しなければ $\delta = 0$ より $E = M = 0$ となる。さらに、適切な幾何学的条件を付加した場合

には (2) において零ダイナミクス η が線形となるため、 $M = 0$ となり、(17) は Lyapunov 不等式に帰着される。また、 $b(\eta, y) = b(y)$ であるときには $b_0(\eta) = I$ となるので、以上の条件の下では、文献⁽¹¹⁾での結果に一致する。

□

[注 6] 不確かさに対するマッチング条件を緩め、(2) において η -サブシステムの不確かさを $\delta_0(\eta, y)$ とし、これを考慮した場合を考える。

$$\dot{\eta} = f_0(\eta) + f_1(\eta, y)y + \Psi_\eta(y)w(t) + \delta_0(\eta, y)$$

この場合には、例えば

1) $\|\delta_0(\eta, y)\| \leq \bar{m}\|\eta\|$ を満たす正定数 $\bar{m}$ の存在を仮定すると、(17) の左辺に次式

$$\lambda \geq 2\bar{m}\bar{\sigma}(P)$$

を満たす λI ($\lambda > 0$) を加えたものを解くように修正することで、定理 1 と同じ結果が導かれる。

2) $\|\delta_0(\eta, y)\| \leq \bar{m}|e|$ を満たす正定数 $\bar{m}$ の存在を仮定すると、(17) の左辺に次式

$$\lambda \geq 2\bar{m}\bar{\sigma}(P)$$

を満たす λI ($\lambda > 0$) を加えたものを解くように修正することに加えて、(28) における k を

$$\frac{2 + k_0}{k - \frac{1}{4\bar{m}\bar{\sigma}(P)}} \leq \gamma$$

を満たすように修正することで、定理 1 と同じ結果が導かれる。□

4. 数 値 例

次に示す非線形システムを考える。

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -10\eta - \frac{1}{5}\eta^3 + \eta y + yw \\ \dot{y} = \eta y + u + \frac{1}{2}y^2 w + y^2 \cos(\eta + y) \end{cases}$$

ただし (2) において、 $f_0 = -10\eta - \frac{1}{5}\eta^3$, $f_1 = \eta$, $\Psi_\eta = y$, また $a = \eta y$, $b = 1$, $\Psi_e = \frac{1}{2}y^2$ である。さらに不確かさは $\delta = y^2 \cos(\eta + y)$ である。

出力の目標値を $y_r = (\sin 2t + \cos 2t)/\sqrt{2}$ で与えると、ノミナルシステムよりリファレンスダイナミクスは次式となる。

$$\dot{\eta}_N = -10\eta_N - \frac{1}{5}\eta_N^3 + y_r \eta_N$$

コンパクト集合 χ を次で与える。

$$e \in [-1, 1], \quad \bar{\eta} \in [-1, 1]$$

このとき定理の条件 (C2) において、 $E = 1, M = 1, F = 4, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \varepsilon = 10$ ($c = 1$) となり、Riccati 不等式を満たす 1 つの解として $P = 2$ を得る。また、 u の構成に

必要な関数は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}\mu(\eta_N, y) &= \eta_N y - \dot{y}_r, \quad \|\bar{\Psi}_e(\eta_N, y)\|^2 = \frac{y^4}{4} \\ \nu(\eta_N, y) &= 0, \quad \bar{\Psi}_\eta(\eta_N, y) = 0 \\ \Xi(y, y_r) &= 4(y + y_r), \quad \bar{n}(\eta_N, y) = y^2 \geq n(\eta_N, y)\end{aligned}$$

さらにコンパクト集合 χ 内では $m = 1$, $\gamma_1(y) = |y|$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ と求められるので, 求める外乱除去特性を有するロバスト制御入力 (23) は次式となる。

$$\begin{aligned}u(y, y_r, t) &= -ke - (\eta_N y - \dot{y}_r) - \frac{ey^4}{16} \\ &\quad - 4e(|y| + |y_r|)^2 - y^2 - 4e - y^2 e\end{aligned}$$

ただし, k は, 設計仕様として与えられる外乱除去指数 γ に対して (28) を満たすよう選ぶ。

以上で設計された補償器 u に対して, 外乱除去指標を $\gamma = 1, 0.1$ としたときの数値計算結果を図 1~4 に示す。ただし, 外乱信号と状態の初期値はそれぞれ以下とした。

$$\begin{aligned}\text{外乱信号} \quad w(t) &= \cos 20t \cdot \sin 30t \\ \text{初期条件} \quad \eta_N(0) &= 1, \quad y(0) = 1 \\ \eta(0) &= 0\end{aligned}$$

図 1 シミュレーション結果 (外乱除去指標)

Fig. 1. Simulation results (performance index).

5. 終わりに

本論文では相対次数 1 を有する非線形システムにおいて, 外乱-状態安定性 (ISS) を考慮した外乱除去特性を持つ追従問題を, ゲイン有界な不確かさの存在を考慮した上で出

力フィードバックにより解いた。数値例は, 本設計法の有効性を示している。これにより従来の零初期条件下での外乱除去手法では不十分となっていた問題に対して一つの解を与えた。ただし, 得られた結果は準大域的なものであることに注意する。

図 2 シミュレーション結果 (y_r, y)
Fig. 2. Simulation results (output signal y_r, y).

図 3 シミュレーション結果 (η_N, η)
Fig. 3. Simulation results (signal η_N, η).

図 4 シミュレーション結果 (u)
Fig. 4. Simulation results (control input u).

(平成 11 年 12 月 7 日受付, 同 12 年 3 月 29 日再受付)

文 献

- (1) W.M.Wonham: Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, New York, Springer, 1979
- (2) G.Basile and G.Marro: Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1992
- (3) A.Isidori: Nonlinear Control Systems, 3rd edition, Springer, 1989
- (4) H.Nijmeijer and A.J.van der Schaft: Nonlinear Dynamical Control Systems. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1990
- (5) R.Marino, W.Respondek and A.J.van der Schaft: Almost Disturbance Decoupling for single-Input Single-Output Nonlinear System, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-34, pp.1013-1017, 1989
- (6) R.Marino, W.Respondek, A.J.van der Schaft and P.Tomei: Nonlinear H_∞ almost disturbance decoupling, *Systems & Control Letters*, 23, pp.159-168, 1994
- (7) A.Isidori: A note on almost disturbance decoupling for nonlinear minimum phase systems, *Systems & Control Letters*, 27, pp.191-194, 1996
- (8) 申, 田村: Lyapunov 関数に基づく非線形ロバスト H_∞ 補償器の構成法, 計測自動制御学会論文集, Vol.34, No.9, pp.1191-1197, 1998
- (9) A.Isidori: Global almost disturbance decoupling with stability for non minimum-phase single-input single-output nonlinear system, *Systems & Control Letters*, 28, pp.115-122, 1996
- (10) I.Kanellakopoulos, P.V.Kokotovic and A.S.Morse: A toolkit for nonlinear feedback design, *Systems & Control Letters*, 18, pp.83-92, 1992
- (11) R.Marino and P.Tomei: Nonlinear Output Tracking with Almost Disturbance Decoupling, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-44, pp.18-28, 1999
- (12) 伊藤, 申および田村: 外乱抑制特性を考慮した非線形系の適応ロバスト制御, 第 19 回適応シンポジウム資料 (大分), pp.31-36, 1999
- (13) H.Khalil: Nonlinear Systems, Prentice Hall, 1996
- (14) R.Marino and P.Tomei: Nonlinear Control Design (Geometric, Adaptive, Robust), Prentice-Hall, 1995

伊藤 和 寿 (非会員) 1995 年 3 月上智大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士前期課程修了。同年株式会社小松製作所入社。1998 年 4 月上智大学大学院理工学研究科機械工学専攻博士後期課程入学。非線形系の適応制御系およびロバスト制御系の構成に関する研究に従事。計測自動制御学会会員。

申 鉄 龍 (正員) 1986 年, 中国東北重型機械学院自動制御学部修士課程修了, 同年同大学助手を経て講師。1992 年, 上智大学大学院理工学研究科博士後期課程修了, 同年同大学理工学部助手, 現在に至る。ロバスト制御理論及びその応用に関する研究に従事。計測自動制御学会, 電気学会, IEEE 等の会員 (工学博士)。

田 村 捷 利 (非会員) 1966 年, 名古屋大学工学部修士課程修了, 同年同大学工学部助手。70 年上智大学講師, 現在同大学教授。最適制御, 計算機アルゴリズム, 適応制御の研究に従事。日本機械学会会員 (工学博士)。