逆伝播ファジィ推定器を用いた離散時間スライディングモード制御

正員 大内 隆夫 (日本大学)

非会員 桑原 弘晃 (日本大学)

非会員 金子 正人 (日本大学)

Discrete Sliding Mode Control Using Back-Propagation Fuzzy Inference Engine

Ohuchi Takao, Member, Kuwabara Hiroaki, Non-member, Kaneko Masato, Non-member (Nihon University)

There is not a limit to that the states of systems on the sampling point of time take always on the switching surface in discrete sliding mode control. The chattering is easy to induce when those states go away from this surface. New determination method of control input to prevent a chattering to the discrete sliding mode control with element of uncertainty satisfying the matching condition has been proposed by Mr. Miguchi, et al. But the chattering is induced to reach the switching surface. Therefore, the control input conditions approaching exponentially to switching surface are discovered by defining and introducing a new nonlinear control input to solve this problem. The methods which expand the fuzzy logic systems using Back-Propagation algorithm to multiinput-multioutput types and infer the element of uncertainty by this algorithm are described in this paper. And the designing methods approaching exponentially to the switching surface and deterring the chattering front and on the switching surface are proposed, when the control input searched in such a way is applied to linear systems with element of uncertainty satisfying matching condition.

キーワード：逆伝播を用いたファジィ論理系、学習、離散時間、スライディングモード

1. はじめに

非線形ロバスト制御理論の代表的な理論に可変構造制御理論がある。この可変構造制御理論の中で最も理論的に体系化され、かつ最も有力といわれているのがスライディングモード制御理論である⁽¹⁾。この中でも離散系に対してはサンプリング時点での制御対象の状態がいつも切換面上にあるとは限らず、離れてくるとチャタリングが生じやすくなり、位相面軌跡は切換面上に強制的に拘束できないため、厳密な意味ではロバスト性は存在しなくなる⁽²⁾。

離散時間スライディングモード制御の設計法としては種々あるが、中でも古田らは安定な離散時間スライディングモード制御系の設計に関して、チャタリングを起こさないサンプリング時間の設計について離散的リアプノフ安定理論から考察している⁽³⁾⁽⁴⁾。しかし、これらは不確定要素をもつシステムに対し、チャタリングをある程度抑えることができて、なくすることはできず、システムの状態を切換面にある程度近づけることはできても、切換面には乗せることはできないため、システムの漸近安定性を保証できない。これらの問題を解決する方法とし

て、美口らは不確定要素を持つ線形システムに対し、チャタリングを防ぐ新しい制御器を提案した⁽⁵⁾。これは切換面にとどめる等価入力是一般に未知であるため、その一部の不確定要素をニューラルネットで推定し、制御入力を構成するものであるが、切換面に到達するまでにチャタリングが生ずる。

ところで、最近、数値入出力対のデータで直接学習できるファジィ論理系が開発され、種々の方法が発表されている^{(6)~(9)}。これらはニューラルネットワークと同様な学習機能があるが、2, 3の点でこれより優れていることが分かっている。

本論文ではこの逆伝播法を用いたファジィ論理系を多入力多出力型に拡張し、マッチング条件を満たした不確定要素を持つ線形システムに対して、美口らの手法に新たに非線形制御入力を定義し導入することにより、切換面に到達するまでにチャタリングを無くし、切換面上においてチャタリングを抑止できる新たな制御器の設計法を提案する。今まで提案されてきた方法では、不確定要素はそのノルムの上限値がきめられているか、もしくは不確定部分の構造が既知である必要があったが、本論文の方法で取り扱うシステムは不確定要素の上限がなく、そ

の構造も未知でよい。つまり、不確定要素に関する情報は逆伝播ファジィ推定器で推定されるので、より実用的である。

2. 逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系の学習

〈2・1〉 ファジィ論理系 ここでファジィルールベースは、次のファジィIF-THEN ルールの集合である。

$$R^{(l)}: IF \ x_1^p \text{ is } F_1^l \text{ and } \dots \text{ and } x_n^p \text{ is } F_n^l, \\ THEN \ y \text{ is } G^l$$

F_i^l : 入力空間 U_i で定義されるファジィ集合
 G^l : 出力空間 V で定義されるファジィ集合
 $\mathbf{x}^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$
 $\in U_1 \times \dots \times U_n$: 前件部変数
 $y \in V$: 後件部変数
 $i = 1, 2, \dots, n$: 入力数
 $l = 1, 2, \dots, M$: ルール数

推論は各プロダクションルールに対して合成則を用いて行うことができる。ここでは入力としてシングルトン・ファジィ化器を用い、ガウス関数形メンバシップ関数を用いる。また、代数積と推論と重心法非ファジィ化器を用いた一連のファジィ推論方式は、総称してファジィ論理系と呼ばれている⁽⁹⁾。

このファジィ論理系は次式で表わされる。

$$f(\mathbf{x}^p) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left[\prod_{i=1}^n a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i^p - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[\prod_{i=1}^n a_i^l \exp \left(- \left(\frac{x_i^p - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right]} \\ = \frac{\sum_{l=1}^M [\bar{y}^l z^l]}{\sum_{l=1}^M z^l} = \frac{a(z^l)}{b(z^l)} \dots \dots \dots (1) \\ a(z^l) = \sum_{l=1}^M \bar{y}^l z^l, \quad b(z^l) = \sum_{l=1}^M z^l, \\ z^l = \prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i^p - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right)$$

ファジィ論理系の調整パラメータ $\bar{y}^l \in V$, $a_i^l \in (0, 1)$, $\bar{x}_i^l \in U_i$, $\sigma_i^l > 0$ の制約を持つ $\bar{y}^l$, a_i^l , $\bar{x}_i^l$ と σ_i^l である。 $a_i^l = 1$ とおく。

ここで、学習用数値入出力対 $(\mathbf{x}^p, \bar{y}^p)$, $(p = 1, 2, \dots, M)$ が与えられたとき、与えられた精度まで全ての入出力対に漸近するようなファジィ論理系 $f(\mathbf{x}^p)$ を構成できる。これは与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、 $\|f(\mathbf{x}^p) - \bar{y}^p\| < \varepsilon$ を満たす $\sigma^* > 0$ が存在する事も証明されている⁽⁹⁾。

〈2・2〉 逆伝播ファジィ学習アルゴリズム この逆伝播法の基本概念は、フィードフォワード型の回路網に利用可能である。このファジィ論理系はフィードフォワード型回路網として表わす事ができるので、それを学習す

るのに逆伝播法の考えを使用することができる。(1) 式の関数形を見れば 3 層のフィードフォワード回路網として表現できることが分かる。このことから、ファジィ論理系を学習するのにパラメータ $\bar{y}^l$, a_i^l , $\bar{x}_i^l$, σ_i^l を用い、それを調整するため逆伝播法の考えを適用することができる。

まず、入出力対を $(\mathbf{x}^p, d^p)$, $\mathbf{x}^p \in U \subset R^n$, $d^p \in V \subset R$ とする。またファジィ推論式は簡易推論法を用いる。まず、対象システムの出力 d^p とファジィ推論出力 $f(\mathbf{x}^p)$ との誤差を評価するための評価関数を (2) 式のように定義する。

$$e^p = \frac{1}{2} [f(\mathbf{x}^p) - d^p] \dots \dots \dots (2)$$

e^p を最小にするように (1) 式の $f(\mathbf{x}^p)$ を決める。 $\bar{y}^l$ を学習するための式を (3) 式に示す。

$$\bar{y}^l(k+1) = \bar{y}^l(k) - \alpha \left. \frac{\partial e^p}{\partial \bar{y}^l} \right|_k \dots \dots \dots (3)$$

$l = 1, 2, \dots, M$, $k = 1, 2, \dots$ で α は学習率である。ここで、 $f(\mathbf{x}^p) = f^p$ とおく。

$$\frac{\partial e^p}{\partial \bar{y}^l} = (f^p - d^p) \frac{\partial f^p}{\partial a(z^l)} \frac{\partial a(z^l)}{\partial \bar{y}^l} \\ = (f^p - d^p) \frac{1}{b(z^l)} z^l \dots \dots \dots (4)$$

$$\bar{y}^l(k+1) = \bar{y}^l(k) - \alpha (f^p - d^p) \frac{1}{b(z^l)} z^l \dots \dots \dots (5)$$

次に $\bar{x}_i^l$ の学習式を示す。

$$\bar{x}_i^l(k+1) = \bar{x}_i^l(k) - \alpha \left. \frac{\partial e^p}{\partial \bar{x}_i^l} \right|_k \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial e^p}{\partial \bar{x}_i^l} = (f^p - d^p) \frac{\partial f^p}{\partial z^l} \frac{\partial z^l}{\partial \bar{x}_i^l} \\ = (f^p - d^p) \frac{\bar{y}^l - f^p}{b(z^l)} z^l \frac{2(x_i^p - \bar{x}_i^l(k))}{(\sigma_i^l(k))^2} \dots \dots (7)$$

$$\bar{x}_i^l(k+1) = \bar{x}_i^l(k) \\ - \alpha (f^p - d^p) \frac{\bar{y}^l - f^p}{b(z^l)} z^l \frac{2(x_i^p - \bar{x}_i^l(k))}{(\sigma_i^l(k))^2} \dots \dots (8)$$

同様に σ_i^l についての学習式は、

$$\sigma_i^l(k+1) = \sigma_i^l(k) \\ - \alpha \frac{f^p - d^p}{b(z^l)} (\bar{y}^l - f^p) z^l \frac{2(x_i^p - \bar{x}_i^l(k))^2}{(\sigma_i^l(k))^3} \dots \dots (9)$$

学習の流れは最初 $\mathbf{x}^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ が入力され (1) 式によりフィードフォワード方向に計算され $f(\mathbf{x}^p)$ が求められる。ここで、 $f(\mathbf{x}^p)$ と対象システムの出力 d^p との誤差が最小となるようにバックワード方向にパラメータ

$\bar{y}^l, \bar{x}_i^l, \sigma_i^l$ が更新され学習の 1 周期が完了する。この学習の 1 周期を (1) 式にそつてもう少し詳しく説明する。

まずファジ理論系は、ここでは $M = 40$ 個のルールから構成されており、学習時の初期パラメータ $\bar{y}^l(0), \bar{x}_i^l(0), \sigma_i^l(0)$ のみが、ある範囲内でランダムに一樣に分布している各々 40 個ずつの値を用いる。今ファジ理論系の各ルールに同一の入力（学習入力）が印加されると、40 個のさまざまな前件部適合度がメンバシップ関数によって計算される。各ルールの前件部適合度と、後件部 $\bar{y}^l$ とが掛け合わされ、簡易推論法による非ファジ化に重心法を用いて、フィードフォワード方向の推論結果 $f(\bar{x}^p)$ を得る。前述の通りバックワード方向によるパラメータ更新が行われ、学習の 1 周期が終わる。

〈2・3〉多入力多出力型への拡張 今までは多入力 1 出力型のシステムを説明してきたが、出力側を多出力型に拡張する方法について述べる。ここでのファジ理論系は、 M 個のルールから構成される場合について説明する。

このルール毎の n 個の入力に対し、 n 個の出力からなる入出力対 $(\bar{x}^l, \bar{y}^l)$ 、 $(l = 1, 2, \dots, M)$ から成り立っているとする。このことは n 個の前件部と、 n 個の後件部から成り立つことになり、 $\bar{x}^l = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)$ 、 $\bar{y}^l = (y_1^l, y_2^l, \dots, y_n^l)$ 、 $(l = 1, 2, \dots, M)$ で表わすことができる。

ここで、この入出力対のデータを次のように n 出力を n 組に分けて、 $(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l, y_1^l)$ 、 $(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l, y_2^l)$ 、 $\dots$ 、 $(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l, y_n^l)$ 、に分岐させることができる。すると、 $(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l, y_1^l)$ は n 入力 1 出力型となる。同様にして、 n 入力 1 出力型の組がほかに $(n-1)$ 組できることになる。そこで逆伝播学習アルゴリズムを用いたファジ理論系の原理を、 n 出力に拡張することが可能となる。そのため、与えられた精度まで、入出力対に一致するように (1) 式を n 個推論することが可能となる。

〈2・4〉逆伝播ファジ推定器の特徴 逆伝播学習アルゴリズムを持つファジ理論系は適応ファジ系の構成要素となる。これと逆伝播ニューラルネットワークと比較すると、次の利点がある。

- (1) 適応ファジ系のパラメータは、学習手順の収束を早める良き初期パラメータ選択法を開発できるなど⁽⁹⁾、明らかな物理的意味を持っている。 $\bar{y}^l$ はファジ IF-THEN 規則の THEN 部分ファジ集合の中心であり、 $\bar{x}_i^l$ と σ_i^l は IF 部分のファジ集合の中心と幅である。文献 (9) には非常に優れた方法である初期パラメータ選択法が示されている。一方ニューラル同定器のパラメータは、入出力データと明らかな関係がない。
- (2) 適応ファジ系は数値情報のほかに、システム的方法で、すなわちファジ IF-THEN 規則の形で言語情報を組み込むことができる。これを組み込むと収束が早くなることが知られている⁽⁹⁾。

- (3) 非線形動的な系に適応ファジ系を同定器として用いた場合、ニューラル同定器と比較すると、ファジ理論系の逆伝播学習アルゴリズムを用いたときの収束の早さは、ニューラルネットワークの逆伝播学習アルゴリズムを用いたときより早い。
- (4) ファジ同定器は逆伝播アルゴリズムで学習するのに必要なパラメータも少なく、簡単なシステムを用いているので、ニューラル同定器と同じか、それよりも性能が良い。

3. 離散時間スライディングモード制御と制御入力の設計

〈3・1〉システムの提起と切換関数の設計 離散時間系の制御対象を次式のように与える。

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{b}u(t) + f(t) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\bar{A} \in R^{n \times n}$ 、 $\bar{b} \in R^{n \times 1}$ 、 $f(t)$ ：不確定要素、 $\bar{x}(t) \in R^n$ ：制御対象の状態、 $u(t) \in R^1$ ：制御入力、 $f(t)$ ：マッチング条件を満たす不確定要素、 $\bar{b} = [b_1, b_2]^T$ 、 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$

次の変換行列で (10) 式を変換する⁽¹⁾。

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-1} & -b_1 b_2^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{x}(t) = T^{-1}x(t) \dots\dots\dots (11)$$

$\det T \neq 0$ とする。

$$x(t+1) = Ax(t) + b[u(t) + \tilde{f}(t)] \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $x_1(t) \in R^{n-1}$ 、 $x_2(t) \in R^1$ 、 $\sigma(t) \in R^1$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, b = [0, 0, \dots, 0, 1]^T, b_2 = 1, \\ f(t) = b\tilde{f}(t) \dots\dots\dots (13)$$

切換関数を $\sigma(t)$ とすると次式で表わされる。

$$\sigma(t) = S \cdot x(t) = (S_1, S_2) \cdot x(t) \\ = (S_1 x_1(t) + S_2 x_2(t)) \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $S_2 = 1$ を選べば $x_2 = \sigma(t) - S_1 x_1(t)$ となり、これを (12) 式に代入すると

$$x_1(t+1) = [A_{11} - A_{12} \cdot S_1]x_1(t) + A_{12}\sigma(t) \dots\dots\dots (15)$$

この時切換面上 $\sigma(t) = 0$ でこの制御系を安定させるためには、行列 $[A_{11} - A_{12} \cdot S_1]$ の固有値が単位円内にくるように S_1 を決定すれば $\sigma(t)$ が決定される。ここで、 A_{22} と $x_2(t)$ はスカラーである。

〈3・2〉切換面に到達するまでのチャタリングを低減させるための条件 ここでは、初期状態から切換面に到達するまでにチャタリングを起こさない条件を求める。すなわち、状態が切換面を行き過ぎない条件を満足するスライディングモード制御を考える⁽¹⁰⁾。まず、チャタリン

グを起こさずに状態を切換面に移す条件を考察する。すなわち、切換面 $\sigma(t) = Sx(t)$ と状態との距離が、チャタリングに密接に関係して影響を及ぼしているため、 $\sigma(t)$ が正か負に場合分けして、次のサンプリング時刻 $(t+1)$ に対して $\sigma(t+1)$ がどのような位置にあるべきかを検討することにする。

$\sigma(t) > 0$ のときの初期状態から出発したと仮定する。

$$\sigma(t) \geq \sigma(t+1) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$\sigma(t) < 0$ のときの初期状態から出発したと仮定する。

$$\sigma(t) \leq \sigma(t+1) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

を満足すれば状態は切換面を行き過ぎない条件となる。

〈3・3〉 切換面に対する到達則と制御入力的设计 離散時間系の制御対象は連続時間系の制御対象と違い、その性質上チャタリングが発生する欠点を有している。そこでこれを抑止するため、逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系の手法を用いて、間接的に不確定要素を推定して、これを制御入力の一部とする。与えられた状態の初期値から切換面に漸近的に接近し、到達してからこの切換面に乗せることができる制御入力の設計法について述べる。

ここで切換関数を $\sigma(t)$ とし、その切換面に漸近的に近づくような制御入力を、次のような美口氏らのリアプノフの方法を使い設計する。リアプノフ関数は次式を用いる。

$$V(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(t) \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} V(t+1) - V(t) &< \sigma(t+1)(\sigma(t+1) - \sigma(t)) \\ &< 0 \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t+1)(\sigma(t+1) - \sigma(t)) \\ = -D\sigma(t+1)^2, D > 0 \quad \dots\dots (20) \end{aligned}$$

すなわち、

$$(\sigma(t+1) - \sigma(t)) = -D\sigma(t+1) \quad \dots\dots\dots (21)$$

(20) 式が成り立つような $u(t)$ を求めれば、常に $V(t+1) - V(t) < 0$ となるため、漸近的に $V(t+1)$ は減少し、 $\sigma(t+1) \rightarrow 0$ となる。

制御入力 $u(t)$ を次のような等価制御入力 $u_{eq}(t)$ と新たに定義され導入された非線形制御入力 $u_{nl}(t)$ の2つの値を加えるものとする。

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_{nl}(t) \quad \dots\dots\dots (22)$$

(14) 式と (21) 式より

$$\sigma(t+1) = Sx(t+1) = \sigma(t)/(1+D) \quad \dots\dots (23)$$

(23) 式に (12) 式を代入すると

$$\begin{aligned} Sx(t+1) &= S \left[Ax(t) + b \left\{ u_{eq}(t) + u_{nl}(t) + \tilde{f}(t) \right\} \right] \\ &= \sigma(t)/(1+D) \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

次に等価制御入力 $u_{eq}(t)$ を求める。このとき、非線形制御入力と不確定要素は零とする。

$$u_{eq}(t) = -(Sb)^{-1} \left[SAx(t) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] \quad \dots\dots (25)$$

非線形制御入力 $u_{nl}(t)$ を次のように新たに定義する。

$$u_{nl}(t) = -\{\alpha(t) + F(x, t) \operatorname{sgn} \sigma(t)\} \operatorname{sgn} \sigma(t) \quad (26)$$

ここで、 $F(x, t) : \tilde{f}(t)$ のファジィ推定値

これらの等価制御入力、非線形制御入力を (22) 式に代入し、(16) 式と (17) 式を満たすような $\alpha(t)$ を求める。(23) 式と (24) 式より

$$\begin{aligned} \sigma(t+1) &= \frac{\sigma(t)}{(1+D)} + Sb \left\{ -(\alpha(t) + F(x, t) \right. \\ &\quad \times \operatorname{sgn} \sigma(t)) \cdot \operatorname{sgn} \sigma(t) \left. + \tilde{f}(t) \right\} \quad \dots\dots (27) \end{aligned}$$

次に $\sigma(t) > 0, (\sigma(t) \geq \sigma(t+1) \geq 0)$ のとき (27) 式は次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma(t+1) &= \sigma(t)/(1+D) \\ &\quad - Sb \left[\alpha(t) - (\tilde{f}(t) - F(x, t)) \right] \\ &\leq \frac{\|\sigma(t)\|}{(1+D)} - \|Sb\|\alpha(t) + \|Sb\| \\ &\quad \times \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \geq 0 \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

(28) 式を満たす $\alpha(t)$ は次式となる。

$$\alpha(t) \leq \frac{\|\sigma(t)\|}{(1+D)\|Sb\|} + \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \quad \dots\dots (29)$$

ここで、 $\|x(t)\| = \sum_{i=1}^n |x_i(t)|$, $|x_i(t)|$: 絶対値 (29) 式を非線形制御入力に代入すると、

$$\begin{aligned} u_{nl}(t) &= - \left[\left\{ \frac{\|\sigma(t)\|}{(1+D)\|Sb\|} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \right\} \eta + F(x, t) \right] \cdot \quad (30) \\ &\quad 0 < \eta < 1 \end{aligned}$$

よって、制御入力 $u(t)$ は、

$$\begin{aligned} u(t) &= -(Sb)^{-1} [SAx(t) - \sigma(t)/(1+D)] \\ &\quad - \left[\{(Sb)^{-1}\|\sigma(t)\|/(1+D) \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\|\} \eta + F(x, t) \right] \quad \dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここで、 $(Sb) = 1 > 0$ であるから $(Sb)^{-1} = \frac{1}{\|Sb\|}$ とおく。(31) 式に不確定要素 $\tilde{f}(t)$ が含まれるので次章のように書き換えられる。

次に $\sigma(t) < 0, (\sigma(t) \leq \sigma(t+1) \leq 0)$ のとき

(27) 式は次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma(t+1) &= \frac{\sigma(t)}{1+D} + (Sb) \left[\alpha(t) + (\tilde{f}(t) - F(x, t)) \right] \\ &\leq 0 \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

(32) 式を満たす $\alpha(t)$ は、(28) 式と同様にして次式となる。

$$\alpha(t) \leq \frac{\|\sigma(t)\|}{(1+D)\|Sb\|} - \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \quad \dots\dots (33)$$

ゆえに非線形制御入力は、(26) 式と (33) 式より

$$\begin{aligned} u_{nl}(t) &= [\{\|\sigma(t)\|/(1+D)\|Sb\| \\ &\quad - \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\|\} \eta - F(x, t)] \quad \dots\dots (34) \\ 0 &< \eta < 1 \end{aligned}$$

よって、制御入力

$$\begin{aligned} u(t) &= -(Sb)^{-1} \left[SAx(t) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] \\ &\quad + \left[\left\{ (Sb)^{-1} \frac{\|\sigma(t)\|}{(1+D)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \right\} \eta - F(x, t) \right] \quad \dots\dots (35) \end{aligned}$$

ここでも、前述の理由により次章のように書き換えられる。ここで、 $\sigma(t) > 0$ の場合と $\sigma(t) < 0$ の場合の、漸近的に切換面に到達するための制御入力設計法を示した。

4. 逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系の学習法

逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系で、制御対象の不確定要素 $\tilde{f}(t)$ を推定することが目的であるが、直接 $\tilde{f}(t)$ を取り出すことはできない。そこで、(21) 式が成り立つように学習を行う。つまり、 $(1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t) = 0$ するような $u(t)$ を求めることであり、 $V(t+1) - V(t) < 0$ が成り立つように学習することである。

次に $\sigma(t) > 0$, $(\sigma(t) \geq \sigma(t+1) \geq 0)$ のとき (21) 式に (31) 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} (1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t) &= -\|\sigma(t)\|\eta - (1+D)(Sb) \\ &\quad \times [\|\tilde{f}(t) - F(x, t)\|\eta - (\tilde{f}(t) - F(x, t))] \quad (36) \end{aligned}$$

(1) $\tilde{f}(t) - F(x, t) > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\|\eta - (\tilde{f}(t) - F(x, t)) &= -(1-\eta)(\tilde{f}(t) - F(x, t)) \quad \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

(2) $\tilde{f}(t) - F(x, t) < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\|\eta - (\tilde{f}(t) - F(x, t)) &= -(1+\eta)(\tilde{f}(t) - F(x, t)) \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t) &= -\|\sigma(t)\|\eta + (1+D)(Sb) \\ &\quad \times (1 \mp \eta)(\tilde{f}(t) - F(x, t)) \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. \begin{aligned} -\eta : (\tilde{f}(t) - F(x, t)) &> 0 \\ +\eta : (\tilde{f}(t) - F(x, t)) &< 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

次に (36) 式の両辺を $(1+D)$ で割り $(Sb)^{-1}$ を左乗すると

$$\begin{aligned} (Sb)^{-1} \left[\sigma(t+1) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] &= - \left[\left\{ (Sb)^{-1} \|\sigma(t)\|/(1+D) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \right\} \eta + F(x, t) \right] + \tilde{f}(t) \quad \dots\dots (41) \end{aligned}$$

(41) 式の右辺大括弧を (31) 式右辺の 2 番目の大括弧に挿入すると、制御入力 $u(t)$ は

$$\begin{aligned} u(t) &= -(Sb)^{-1} \left[SAx(t) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] \\ &\quad + (Sb)^{-1} \left[\sigma(t+1) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] - \tilde{f}(t) \quad (42) \end{aligned}$$

(42) 式の $u(t)$ を (12) 式に代入すれば、不確定要素 $\tilde{f}(t)$ は消去される。

$$\sigma(t) < 0, (\sigma(t) \leq \sigma(t+1) \leq 0)$$

(21) 式に (35) 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} (1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t) &= \|\sigma(t)\|\eta - (1+D)(Sb) \cdot [\|\tilde{f}(t) \\ &\quad - F(x, t)\|\eta - (\tilde{f}(t) - F(x, t))] \quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

この場合も (37) 式と (38) 式が成り立つので

$$\begin{aligned} (1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t) &= \|\sigma(t)\|\eta + (1+D)(Sb) \\ &\quad \times (1 \mp \eta)(\tilde{f}(t) - F(x, t)) \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

この場合も $\mp \eta$ は (40) 式を意味する。次に (43) 式の両辺を $(1+D)$ で割り $(Sb)^{-1}$ を左乗すると

$$\begin{aligned} (Sb)^{-1} \left[\sigma(t+1) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] &= \left[\left\{ (Sb)^{-1} \|\sigma(t)\|/(1+D) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - F(x, t)\| \right\} \eta - F(x, t) \right] + \tilde{f}(t) \quad \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

(45) 式の右辺大括弧を (35) 式右辺の 2 番目の大括弧に挿入すると、制御入力 $u(t)$ は

$$\begin{aligned} u(t) &= -(Sb)^{-1} \left[SAx(t) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] \\ &\quad + (Sb)^{-1} \left[\sigma(t+1) - \frac{\sigma(t)}{(1+D)} \right] - \tilde{f}(t) \quad (46) \end{aligned}$$

(46) 式の $u(t)$ を (12) 式に代入すれば、不確定要素 $\tilde{f}(t)$

は消去される。結局、 $(1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t)$ は $\sigma(t) > 0$ の場合は (39) 式を、 $\sigma(t) < 0$ の場合は (44) 式を意味しており、学習が進むに連れて $\sigma(t)$ は零に漸近し、 $(1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t)$ も零に漸近するから、逆伝播ファジィ推定器の出力 $F(x, t)$ は、 $\tilde{f}(t)$ に与えられた精度で一致するように学習を行うことと等価になる。

以上の考えから、評価関数は次のようにする。

$$E = \frac{1}{2} [(1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t)]^2 \dots\dots\dots (47)$$

よって、評価関数 E を最小にするような重みの更新は次のように計算される。 $\bar{y}^l$ は後件部の中心値である。

$$\bar{y}^l(t+1) = \bar{y}^l(t) - \alpha \frac{\partial E}{\partial \bar{y}^l} \Big|_t \dots\dots\dots (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \bar{y}^l} \Big|_t &= \frac{\partial E}{\partial \sigma(t+1)} \frac{\partial \sigma(t+1)}{\partial u(t)} \frac{\partial u(t)}{\partial f(\mathbf{x}^p)} \\ &\quad \times \frac{\partial f(\mathbf{x}^p)}{\partial a(z^l)} \frac{\partial a(z^l)}{\partial \bar{y}^l} \\ &= -\eta \cdot \{(1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t)\} \\ &\quad \times (1+D)Sb \cdot \frac{z^l}{b(z^l)} \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

$\bar{x}_i^l$ は前件部メンバシップ関数の中心値である。

$$\bar{x}_i^l(t+1) = \bar{x}_i^l(t) - \alpha \frac{\partial E}{\partial \bar{x}_i^l} \Big|_t \dots\dots\dots (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \bar{x}_i^l} \Big|_t &= \frac{\partial E}{\partial \sigma(t+1)} \frac{\partial \sigma(t+1)}{\partial u(t)} \frac{\partial u(t)}{\partial f(\mathbf{x}^p)} \\ &\quad \times \frac{\partial f(\mathbf{x}^p)}{\partial z^l} \frac{\partial z^l}{\partial \bar{x}_i^l} \\ &= -\eta \cdot \{(1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t)\} \\ &\quad \times (1+D)Sb \cdot \frac{\bar{y}^l - f(\mathbf{x}^p)}{b(z^l)} \\ &\quad \times z^l \cdot \frac{2(x_i^p - \bar{x}_i^l)}{(\sigma_i^l)^2} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

σ_i^l はメンバシップ（ガウス）関数の幅の値である。

$$\sigma_i^l(t+1) = \sigma_i^l(t) - \alpha \frac{\partial E}{\partial \sigma_i^l} \Big|_t \dots\dots\dots (52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \sigma_i^l} \Big|_t &= \frac{\partial E}{\partial \sigma(t+1)} \frac{\partial \sigma(t+1)}{\partial u(t)} \frac{\partial u(t)}{\partial f(\mathbf{x}^p)} \\ &\quad \times \frac{\partial f(\mathbf{x}^p)}{\partial z^l} \frac{\partial z^l}{\partial \sigma_i^l} \\ &= -\eta \cdot \{(1+D)\sigma(t+1) - \sigma(t)\} \\ &\quad \times (1+D)Sb \cdot \frac{\bar{y}^l - f(\mathbf{x}^p)}{b(z^l)} \\ &\quad \times z^l \cdot \frac{2(x_i^p - \bar{x}_i^l)^2}{(\sigma_i^l)^3} \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

以上のように、(15) 式の $x_1(t)$ を逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系の学習入力とし、 t のサンプリング時点のパラメータ $\bar{y}^l(t)$ 、 $\bar{x}_i^l(t)$ と $\sigma_i^l(t)$ から、(48) 式～(53) 式の逆伝播法により、 $(t+1)$ のサンプリング時点のパラメータ $\bar{y}^l(t+1)$ 、 $\bar{x}_i^l(t+1)$ と $\sigma_i^l(t+1)$ 、 $l = 1, 2, \dots, M$ を求め、これを (1) 式に代入し、 $f(\mathbf{x}^p)|_{t+1}$ を計算する。この値を次々と計算し、(47) 式の E が与えられた精度に達したとき、このスライディングモード制御系の不確定要素 $\tilde{f}(t)$ の推定値 $F(x, t)$ が計算され、次式が成立する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^p)|_{t+1} \simeq F(x, t) \dots\dots\dots (54)$$

このように、離散時間システムにおけるチャタリング防止のための制御入力を、状態の初期値を切換関数の正負に分けて算出式を導き、システムに含まれるマッチング条件を満たす不確定要素を推定するファジィ推定器のパラメータ更新用逆伝播学習式も提案できた。このような条件やルールに従って学習していけば、システムは切換面に漸近的に近づくことができる。そのため、切換面周辺においてチャタリングを抑止し、切換面上にシステムの状態を乗せることが可能である。

5. シミュレーション結果

次式に示される美口氏らの 2 次元のシステムを用いて、提案した手法の有効性を比較検討する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u(t) + \tilde{f}(t)] \dots\dots (55) \end{aligned}$$

切換関数は

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= Sx(t) = (S_1, S_2)x(t) \\ &= S_1x_1(t) + S_2x_2(t) \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

ここで $S_2 = 1$ を選ぶ。(56) 式より、

$$x_2(t) = \sigma(t) - S_1x_1(t) \dots\dots\dots (57)$$

を (55) 式に代入するとスライディングモードに到達するまでの $x_1(t)$ は次式で表わされる。

$$x_1(t+1) = (1.2 - 0.1S_1)x_1(t) + 0.1\sigma(t) \dots (58)$$

スライディングモードに達すれば $\sigma(t) = 0$ となり、次のようなスライディングモードの式が得られる。

$$x_1(t+1) = (1.2 - 0.1S_1)x_1(t) \dots\dots\dots (59)$$

よって、 $0 < (1.2 - 0.1S_1) < 1$ の条件に合うように S_1 を選べば、切換面上でのスライディングモードの制御系は安定となる。ここでは $S_1 = 5$ に選ぶ。

(55) 式の未知なる不確定要素を、ここでは次のように選ぶ。

$$\tilde{f}(t) = 2x_1^2(t) \dots\dots\dots (60)$$

$\sigma(t) > 0$ ($\sigma(t) \geq \sigma(t+1) \geq 0$) のとき
 $D = 1.0$, $\eta = 0.7$ とする。(57) 式は

$$x_2(t) = \sigma(t) - 5x_1(t) \dots\dots\dots (61)$$

(55) 式に次の変換行列を作用させ

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ \sigma(t+1) \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} \quad (62)$$

(62) 式から $\sigma(t+1)$ を求め、この $\sigma(t+1) = 0$ ならしめる制御入力 $u(t)$ は、(31) 式より次式となる。

$$u(t) = -(0.5x_1(t) + 0.6\sigma(t)) \\ - \left\{ \frac{\|\sigma(t)\|}{2} + \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \right\} \\ \times \eta + F(x, t) \dots\dots\dots (63)$$

この例題でも $Sb = 1 > 0$ であるので、式は簡単化される。ここでも、(41) 式より次式が得られる。

$$[\sigma(t+1) - \sigma(t)/2] \\ = - \left\{ \frac{\|\sigma(t)\|}{2} + 2\|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \right\} \\ \times \eta + F(x, t) + \tilde{f}(t) \dots\dots\dots (64)$$

(64) 式右辺の大括弧を (63) 式に代入すると

$$u(t) = -(0.5x_1(t) + 0.6\sigma(t)) \\ + \left[\sigma(t+1) - \frac{\sigma(t)}{2} \right] - \tilde{f}(t) \dots\dots\dots (65)$$

同様に $\sigma(t) < 0$ ($\sigma(t) \leq \sigma(t+1) \leq 0$) の場合には

$$u(t) = -0.5x_1(t) - 0.6\sigma(t) + \left\{ \frac{\|\sigma(t)\|}{2} \right. \\ \left. - \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \right\} \times \eta - F(x, t) \dots\dots\dots (66)$$

ここでも、(45) 式より同様にして、

$$[\sigma(t+1) - \sigma(t)/2] \\ = \left\{ \frac{\|\sigma(t)\|}{2} - \|\tilde{f}(t) - F(x, t)\| \right\} \eta \\ - F(x, t) + \tilde{f}(t) \dots\dots\dots (67)$$

(67) 式右辺の大括弧を (66) 式に代入すると

$$u(t) = -0.5x_1(t) - 0.6\sigma(t) \\ + \left[\sigma(t+1) - \frac{\sigma(t)}{2} \right] - \tilde{f}(t) \dots\dots\dots (68)$$

(65) 式と (68) 式を (55) 式に代入すれば、不確定要素は消去される。

次に、このシミュレーションシステムの結果を示す。逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系のパラメータの

初期値は、 $-1.0 < \bar{y}^l < 1.0$, $0 < \bar{x}_i^l < 0.3$, $0 < \sigma_i^l < 0.2$ の間を一様にランダムに分布した乱数を用いた。使用したスライディングモード制御系のパラメータは $D = 1.0$, $\eta = 0.7$, $S_1 = 5$, $S_2 = 1$, 初期状態 $x_1(0) = 0.15$, $x_2(0) = -0.28$ とし、このファジィ論理系の推定器の学習率 $\alpha = 0.86$ と選んだ。このような設定で 150 回の学習を行った。

切換関数 $\sigma(t)$ の時間に対する軌跡を図 1 に示す。この図から、逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系で不確定要素を推論しながら、制御入力により切換関数値を減少させ、切換面に漸近的に到達し、切換面をスライディングした事が分かる。図 2 は制御対象の前述の初期状態より、切換関数 $\sigma(t) > 0$ の時は (63) 式を、 $\sigma(t) < 0$ の時は (66) 式を用いて (55) 式に制御入力を印加し、(58) 式の $x_1(t+1)$ を逆伝播アルゴリズムを用いたファジィ論理系の入力とし (1) 式の $f(x^p)$ を計算し、(47) 式に従ってこれが最小となるように、(48) 式～(53) 式を用いて $\bar{y}^l(t+1)$, $\bar{x}_i^l(t+1)$ と $\sigma_i^l(t+1)$, $l = 1, 2, \dots, 40$ を求め、これを (1) 式に代入して $f(x^p)|_{t+1}$ を計算し、(54) 式により不確定要素 $\tilde{f}(t)$ の推定値 $F(x, t)$ を求めることにより、(55) 式を用いたシステムの $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の制御特性を示す。図 3 は位相平面上の $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の特性を示す。

図 1 各時間点の切換関数
 Fig. 1. Switching function at each point of time

6. 結言

本論文では、マッチング条件を満たす不確定要素を持つ線形離散時間スライディングモード制御で生じる、切換面に到達するまでと、切換面上でのチャタリング防止法として、等価制御入力のほかに新たに非線形制御入力を定義し導入することによって、システムの状態が切換面を行き過ぎない条件を求めこれを満たす制御入力により、その可能性をシミュレーションによって確認する事ができた。さらに、逆伝播ファジィ推定器を用いて不確定要素を推定する事で、切換面上に到達する前後でチャタリ

図2 ファジィ論理系を用いた状態軌跡
Fig. 2. State trajectories using fuzzy logic systems

図3 ファジィ論理系を用いた位相面状態軌跡
Fig. 3. State trajectories on phase plane using fuzzy logic systems

ングを防止する制御器を提案した。さらに提案した制御器は、不確定要素に関する情報のマッチング条件を満たす事さえ分かれば、その上限を知らなくてもよく、その構造も未知でよい。従って、より実用的であるといえる。

ここでは、制御対象に不確定要素があることで、この不確定要素を記述する言語情報の作成に問題があった。そこで言語情報を用いた On-Line 初期パラメータ選択法は使用しないで、 $\bar{y}^l(0)$, $\bar{x}_i^l(0)$, $\sigma_i^l(0)$ に一様ランダムに分布した乱数を用いて制御対象と推定モデルの出力を求めた。次はこのような場合での言語情報作成による初期パラメータ選択法の開発、またはこれらを実用化できるテーマの開発を検討するつもりである。

(平成 11 年 5 月 24 日受付, 同 11 年 9 月 14 日再受付)

- (1) V.I.Utkin: "Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems", Moscow:Nauka (1974)
- (2) W.Gao: "Discrete-time Variable Structure Control Systems", IEEE Trans. on Indust. Elect., 42,2,117-122 (1995-2)
- (3) 古田勝久, 森貞雅博:「離散系のスライディングモードコントロール」計自製学論,25,5,574-578 (1989)
- (4) K.Furuta: "Sliding Mode Control of Discrete System", Systems and Control Letters,14,2,145-152 (1990-2)
- (5) 美口純一, 呉漢生, 水上孝一:「ニューラルネット推定器を用いた離散時間スライディングモード制御」計自製学論,33,8,787-791 (1997-8)
- (6) Wang,L.X. and J.M.Mendel: "Back-Propagation Fuzzy Systems as Nonlinear Dynamic System Identifiers", Proc. IEEE International Conf. on Fuzzy Systems,San diego,1409-1418 (1992)
- (7) Wang,L.X. and J.M.Mendel: "Generating Fuzzy Rules from Numerical Data, With Applications", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybern.,22,6,1414-1427 (1992-6)
- (8) Wang,L.X. and J.M.Mendel: "Fuzzy Basic Functions Universal Approximation and Orthogonal Least Squares Learning", IEEE Trans. on Neural Networks,3,5,807-814 (1992-5)
- (9) Li-Xin Wang: "adaptive Fuzzy Systems and Control", Prentice-Hall (1994)
- (10) 野波健蔵, 田宏奇:「スライディングモード制御」コロナ社 (1994)

大内 隆夫 (正員) 1930 年生。1956 年 3 月 東北大学大学院工学研究科電気および通信工学専攻修士課程修了。同年 山形大学助手。1975 年同教授。1993 年 日本大学工学部情報工学科 教授。工学博士。この間、非線形磁気応用、システム制御、認知システム、移動ロボット、知能情報システムに関する研究に従事。電子情報通信学会、計測自動制御学会、日本ファジィ学会、システム制御情報学会、日本ロボット学会各会員。

桑原 弘晃 (非会員) 1972 年生。1999 年 3 月 日本大学大学院工学研究科情報工学専攻博士前期課程修了。同年 ブリヂストンソフトウェア (株) 入社。在学中、知的制御系の構成に関する研究に従事。

金子 正人 (非会員) 1964 年生。1989 年 3 月 山形大学大学院工学研究科電子工学専攻修士課程修了。同年 日本電気ホームエレクトロニクス (株) 入社。1993 年 日本大学工学部情報工学科 助手。主として音声認識、知能情報処理に関する研究に従事。電子情報通信学会、情報処理学会各会員。