ダイナミック・トンネリング・アルゴリズムの複数制約最適化問題への適用

非会員 松本 英揮 (東京都立大学)
正員 安田 恵一郎 (東京都立大学)

Application of Dynamic Tunneling Algorithm to Multi-constrained Optimization Problem

Hideki Matsumoto, Non-member, Keiichiro Yasuda, Member (Tokyo Metropolitan University)

A dynamic tunneling algorithm (DTA) based on dynamical system is an effective method for global optimization problem. The algorithm has been only applied to unconstrained optimization problems. In this paper, we propose an algorithm, which can apply the DTA to constrained problems by resolving region of boundary of constraints. A typical numerical example illustrates the validity of the proposed algorithm.

キーワード：大域的最適化, ダイナミック・トンネリング・アルゴリズム (DTA), 力学系

1. はじめに

大域的最適化問題の解法の一つに, 力学系のダイナミクスを利用した DTA⁽¹⁾ があるが, 著者らは大域的最適性と計算効率の向上を目的とし, DTA に相互作用の概念を取り入れた多軌道型 DTA を提案した⁽²⁾。さらに, 多軌道型 DTA を有制約問題に適用する基礎的検討段階として, 単一の制約条件を考慮した近似アルゴリズムを提案した⁽³⁾。

本稿では, 多軌道型 DTA を複数の制約を有する最適化問題にも適用可能なアルゴリズムに拡張し, 典型的な数値例を用いてその有効性を検証する。

2. DTA の方策と定式化

DTA は, 初期点から目的関数の局所最適解を求める最適化フェーズと, 最適化フェーズで得られた局所最適解から脱出し, 目的関数を一層改善しうる点を探索するトンネリングフェーズから構成される。そしてこれらを交互に実行することで大域的最適化を実現しようとする。実際には, それぞれ最適化システム, トンネリングシステムと呼ばれる力学系を構成し, その時間発展の計算を行うことで大域的最適化を行う。

以下本稿では, 次式の複数制約最適化問題を扱う。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in R^n, f(\mathbf{x}) \in C^1 \quad \cdots (1) \\ \text{subj.to} \quad & g_p(\mathbf{x}) \leq 0, (p = 1, 2, \cdots, r) \end{aligned}$$

〈2・1〉探索空間の領域分解 本稿では, 以下の条件に基づいて, 探索空間を領域分解する ($0 < \varepsilon \ll 1$)。

- (A) 探索点 $\mathbf{x}$ がすべての制約条件式に対して, $g_p(\mathbf{x}) < -\varepsilon$ を満たす実行可能領域にある場合。
- (B) 探索点 $\mathbf{x}$ がある制約条件式に対して $-\varepsilon \leq g_p(\mathbf{x}) \leq 0$ となり, 残りの制約条件式に対して $g_q(\mathbf{x}) < -\varepsilon$ を満たす実行可能領域にある場合。

図1 端点近傍の領域分解

Fig. 1 Regional division of vicinity of end point

- (C) 探索点 $\mathbf{x}$ がすべての制約条件式に対して, $-\varepsilon \leq g_p(\mathbf{x}) \leq 0$ となる実行可能領域にある場合。
- (D) 探索点 $\mathbf{x}$ はある制約条件式に対して実行可能であるが, 実行不可能領域にある場合。
- (E) 探索点 $\mathbf{x}$ がすべての制約条件式に対して, 実行不可能となる領域にある場合。

上の領域分解の基準を用いると, 2変数2制約の最適化問題の制約条件の境界近傍は, 図1のように領域分解される。

〈2・2〉最適化システム (1)式に対する最適化システムを以下のように構成する。

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = & -\nabla f(\mathbf{x}) - \sum_{p=1}^r a_{p_{opt}} k_{p_{opt}} \nabla g_p(\mathbf{x}) \\ & - p \sum_{p=1}^r \nabla g_p(\mathbf{x}) \{ \max(0, g_p(\mathbf{x})) \} \quad \cdots (2) \end{aligned}$$

ここで、(2) 式の第 1 項は最急降下法を力学系によって表現したものである。また第 2 項は制約境界近傍で制約内側に留まるための力学系、第 3 項は探索点が制約領域を逸脱したときのペナルティ項を示している。ただし、第 2 項の係数の導出方法は以下の通りである。

$$a_{p_{opt}} = \begin{cases} 0 & , (g_p(\mathbf{x}) < -\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon} g_p(\mathbf{x}) + 1, & (-\varepsilon \leq g_p(\mathbf{x}) \leq 0) \\ 1 & , (0 < g_p(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (3)$$

$$k_{p_{opt}} = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla g_p(\mathbf{x})}{\|\nabla g_p(\mathbf{x})\|^2} \dots\dots\dots (4)$$

〈2・3〉 トンネリングシステム (1) 式に対するトンネリングシステムを以下のように構成する。ただし $\mathbf{x}^i$ は i 番目の軌道を、 $\mathbf{x}^*$ は最適化フェーズで見つかった局所的最適解を表している。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^i &= -\nabla f(\mathbf{x}) - \alpha \left[\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^*\| - l(t) \right] \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^*\|} \\ &\quad - \alpha \sum_{j=1, j \neq i}^r \left[\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\| - l(t) \right] \frac{\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j}{\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j\|} \\ \frac{d\mathbf{x}^i}{dt} &= \mathbf{F}^i - \sum_{p=1}^r a_{p_{tun}} k_{p_{tun}} \nabla g_p(\mathbf{x}^i) \\ &\quad - p \sum_{p=1}^r \nabla g_p(\mathbf{x}^i) \{ \max(0, g_p(\mathbf{x}^i)) \} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

上式の $\mathbf{F}^i$ は無制約問題におけるトンネリングシステムを示している。これは最急降下法の力学系、局所的最適解から脱出するための作用、軌道間の相互作用から構成され、有制約問題のトンネリングシステム (5) 式の第 1 項として組み込まれる。このとき (5) 式の構造は有制約問題の最適化システムと同一であり、各係数も以下のように導かれる。

$$a_{p_{tun}} = \begin{cases} 0 & , (g_p(\mathbf{x}^i) < -\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon} g_p(\mathbf{x}^i) + 1, & (-\varepsilon \leq g_p(\mathbf{x}^i) \leq 0) \\ 1 & , (0 < g_p(\mathbf{x}^i)) \end{cases} \quad (6)$$

$$k_{p_{tun}} = \frac{\mathbf{F}^i \cdot \nabla g_p(\mathbf{x}^i)}{\|\nabla g_p(\mathbf{x}^i)\|^2} \dots\dots\dots (7)$$

$\mathbf{F}^i$ の作用には、ばね定数を $\alpha(>0)$ とした線形ばねを用いる。これは 2 点間距離が (8) 式の自然長 $l(t)$ より小さいときは斥力として働き、大きいときは引力として働く。

$$l(t) = \frac{t}{T} (l_{max} - l_{min}) + l_{min} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、(8) 式の l_{min} , l_{max} ($l_{min} < l_{max}$) は正のパラメータであり、探索する領域の大きさに応じて決定する。

3. 数 値 例

数値例は、Griewank 関数を目的関数とする有制約問題とした。その結果を図 2 に示す。

図 2 有制約問題に対する DTA の軌跡

Fig. 2 Trajectory of DTA for constrained problem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{200} - \cos x_1 \cos \frac{x_2}{\sqrt{2}} + 1 \\ \text{subj.to} \quad & g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 - 81 \leq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) = (x_1 - a)^2 + 4(x_2 - b)^2 - 121 \leq 0 \\ & (a = 8.236, b = 3.661) \end{aligned}$$

この問題におけるパラメータの設定は、ばね定数 $\alpha = 0.5$, $l_{max} = 18.0$, $l_{min} = 1.0$, 探索時間 $T = 10.0$, ペナルティ係数 $p = 10.0$ とし、軌道数 $r = 4$ とした。

図 2 では、初期点 1 (−0.3, 5.0) から出発し、端点 A を経て制約境界上の局所的最適解に到達している。その後、トンネリングフェーズによって初期点 2 が見出されている。また同様のサイクルを経て、3 回目の最適化フェーズで大域的最適解 (端点 B) に到達している。その後 3 回目のトンネリングフェーズを行ったが、より目的関数を改善する点が見つからなかったため、アルゴリズムが終了した。

4. おわりに

本稿の目的は、DTA を複数の制約を有する最適化問題にも適用できるよう改良することであった。数値例では、複数の制約が課せられた領域においても、探索点の逸脱などの問題は見られなかった。今後の課題としては、より高次の問題に対応するため、領域分解の基準をより系統立てることにより、アルゴリズムを簡潔にすることが挙げられる。

(平成 12 年 3 月 28 日受付)

文 献

- (1) Y.Yao: "Dynamic Tunneling Algorithm for Global Optimization", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, Vol.19, No.5, pp.1222-1230, 1989
- (2) 村野, 他: 「多軌道型ダイナミック・トンネリング・アルゴリズムの構成」, 電気学会論文誌, Vol.188-C, No.4, 1998
- (3) 茂中, 他: 「ダイナミック・トンネリング・アルゴリズムの有制約大域的最適化問題」, 電気学会論文誌, Vol.188-C, No.11, 1998