線形むだ時間システムにおける L^2 ゲイン解析と 状態フィードバック制御 — 無限次元 LMI アプローチ —

学生員 池田 光治郎 (早稲田大学)

非会員 東 剛人 (金沢大学)

正員 内田 健康 (早稲田大学)

L^2 -gain Analysis and State Feedback Control Synthesis for Linear Time-Delay Systems — Infinite-Dimensional LMI Approach —

Kojiro Ikeda, Student Member (Waseda University), Takehito Azuma, Non-member (Kanazawa University), Kenko Uchida, Member (Waseda University)

In this paper, we propose a new method of L^2 -gain analysis and state feedback control synthesis for time-delay systems via infinite-dimensional LMI, which reflects explicitly infinite-dimensionality features of time-delay systems. First, we show an infinite-dimensional LMI condition for L^2 -gain analysis. The infinite-dimensional LMI condition depends two parameters, and difficult to solve. Next, we propose a method of solving such infinite-dimensional LMI conditions using a convex polyhedron. The method consists of two steps: the first step is to make a convex polyhedron, and the second step is to reduce an infinite-dimensional LMI condition to a finite-dimensional LMI condition using the convex polyhedron. Finally, we discuss a state-feedback control synthesis based on the infinite-dimensional LMI conditions for L^2 -gain analysis and the method of solving infinite-dimensional LMIs, when the feedback gain is constrained.

キーワード：むだ時間システム (time-delay system), L^2 ゲイン (L^2 -gain), 線形行列不等式 (Linear Matrix Inequality: LMI), 状態フィードバック (state feedback)

1. はじめに

近年、線形制御システムの解析・設計において、有効な数値計算アルゴリズムを有する線形行列不等式 (Linear Matrix Inequalities: LMIs) を用いる手法が注目されている。^{(5) (10)} LMI 手法の要点は、システムの状態の 2 次形式で与えられるリアプノフ関数あるいはストレージ関数 (storage function) の構成を LMI の解法に帰着させることにある。

LMI 手法を線形むだ時間システムの解析・設計に拡張する試みもすでに数多くなされているが、著者の知る限り Gu の安定性解析の結果⁽¹¹⁾を除けば、むだ時間がない場合と同様の有限次元 LMI の枠組み内での結果となっている⁽¹³⁾。そこでは、状態の 2 次形式としては、集中定数部分の 2 次形式を中心とする限定されたものを用い、また、状態フィードバック制御則としてはメモリーレスフィードバックに限定することによって LMI 手法の実行が可能になっており、いわば、議論の出発点から有限次元に限定したものである。しかし、むだ時間システムの最大の特徴は

その無限次元性にある⁽⁶⁾。著者らはこの無限次元性をできるだけ反映した解析・設計法になることを念頭に置き、無限次元 LMI に基づくむだ時間システムの新しい解析・設計法の検討を始めている⁽⁴⁾。本稿では同じ観点から、 L^2 ゲイン解析と状態フィードバックコントローラ的设计について、無限次元 LMI に基づく新しい解析・設計法を提案する。

従来法と比較した時の提案法の特徴をまとめると、つぎの 2 点になる。1 点目は、状態 2 次形式として集中定数部分と分布定数部分からなるむだ時間システムの無限次元の状態の一般的な 2 次形式を考え、この 2 次形式の構成要件を 2 個のパラメータに依存する無限次元 LMI 条件に帰着させることである。従来法では集中定数部分の 2 次形式に限定している。2 点目は、この無限次元 LMI を、パラメータ空間上に適当な凸多面体を構成することによって実際に解くことが可能な有限個の LMI に帰着させることである。無限次元 LMI 条件は特別な限定をしていないことから、有限次元に限定した従来法より保守性の少ない条件である。実際、2 点目の無限次元 LMI の解法において保守性を少なく

することができれば、従来法より良い結果を得ることが期待できる。なお、2点目の無限次元のLMIの解を、無限次元LMIを有限個のLMIに帰着させてから解く方法は、著者らによって提案された、ゲインスケジューリング問題におけるパラメータ依存LMIの解法のアイデアと同じものである。⁽³⁾ この手法においては、保守性の少ない解を得るためにはパラメータ空間における凸多面体の構成が重要であり、一般的な構成法が提案されている。⁽⁴⁾ 本稿では、対象がむだ時間のシステムの L^2 ゲイン解析・設計に対する無限次元LMIであること、さらに、無限次元LMIが2個のパラメータに依存するという特殊性を考慮して、保守性のより少ない新しい凸多面体の構成法を提案する。

以下、本稿では、まず第2章で対象システムを設定し、 L^2 安定のための無限次元LMI条件を導出する。そして、第3章では、その無限次元のLMI条件を有限個のLMI条件に帰着させる手法および凸多面体の構成法を提案する。さらに、第4章では、第3章までで述べた L^2 ゲイン解析の結果に基づいた状態フィードバックコントローラ的设计法、ならびに、その際にゲインの大きさを制限した場合の設計法について提案し、最後に第5章でまとめる。

なお、以下において“ α ”は行列あるいはベクトルの転置を表す。対称行列 P_0 および対称行列値関数 $P_2(\alpha, \beta)$ に対して、記法

$$L(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} P_0 & P_1(\beta) \\ P_1(\beta)' & P_2(\alpha, \beta) \end{bmatrix} > (<)0, \\ \forall \alpha \in [-h, 0], \beta \in [-h, 0]$$

は、

$$\frac{1}{2}(L(\alpha, \beta) + L'(\alpha, \beta)) = \begin{bmatrix} P_0 & \frac{1}{2}(P_1(\alpha) + P_1'(\beta)) \\ \frac{1}{2}(P_1'(\alpha) + P_1(\beta)) & \frac{1}{2}(P_2(\alpha, \beta) + P_2(\beta, \alpha)) \end{bmatrix}$$

が各 $(\alpha, \beta) \in [-h, 0] \times [-h, 0]$ において、正定(負定)であることを意味する。また、 $L^2([-h, 0]; R^n)$ は区間 $[-h, 0]$ で定義される二乗可積分な n 次元実ベクトル値関数の集合を、 $C([-h, 0]; R^n)$ 、 $C^1([-h, 0]; R^n)$ は区間 $[-h, 0]$ で定義される連続および1回連続微分可能な n 次元実ベクトル値関数の集合を、それぞれ表すものとする。

2. L^2 ゲイン解析

〔2・1〕対象システム つぎの状態にむだ時間を含む線形システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \\ &+ \int_{-h}^0 A_{01}(\beta) x(t+\beta) d\beta \cdots \cdots (1) \\ &+ Bu(t) + Dw(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$$x(0) = \phi(0), x(\beta) = \phi(\beta), -h \leq \beta \leq 0$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は状態、 $u(t) \in R^m$ は制御入力、 $w(t) \in R^p$ は外部入力、 $z(t) \in R^q$ は制御量、 $(\phi(0), \phi(\beta)) \in R^n \times L^2([-h, 0]; R^n)$ は初期状態、 h はシステムのむだ時間を表す。

また、 $A_0, A_1 \in R^{n \times n}$ 、 $A_{01}(\beta) \in L^2([-h, 0]; R^{n \times n})$ 、 $B \in R^{n \times m}$ 、 $C \in R^{q \times n}$ 、 $D \in R^{n \times p}$ 、 $h > 0$ である。

〔2・2〕内部安定性 むだ時間システム(1)において $u(t) = 0$ 、 $w(t) = 0$ として得られるつぎのむだ時間システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \\ &+ \int_{-h}^0 A_{01}(\beta) x(t+\beta) d\beta \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

むだ時間システム(2)の内部安定性をつぎのように定義する。

〔定義1〕 むだ時間システム(2)において、任意の初期状態 $(\phi(0), \phi(\beta))$ に対し解 $x(t)$ が零に漸近するとき、むだ時間システム(2)は内部安定であるという。

〔2・3〕 L^2 入出力安定性 つづいて、この節では、むだ時間システム(1)において $u(t) = 0$ として得られるつぎのむだ時間システムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \\ &+ \int_{-h}^0 A_{01}(\beta) x(t+\beta) d\beta + Dw(t) \cdots (3) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

むだ時間システム(3)の L^2 入出力安定性をつぎのように定義する。

〔定義2〕 むだ時間システム(3)において、初期状態 $(\phi(0), \phi(\beta)) = 0$ としたとき、任意の入力 $w(t) \in L^2([0, \infty); R^p)$ に対し出力も常に $z(t) \in L^2([0, \infty); R^q)$ となるとき、むだ時間システム(3)は L^2 入出力安定であるという。

さらに、 L^2 入出力安定であるようなむだ時間システム(3)の L^2 ゲイン G をつぎのように定義する。

〔定義3〕 むだ時間システム(3)が L^2 入出力安定であるとき、むだ時間システム(3)の L^2 ゲイン G をつぎで定義する。

$$G = \sup_{w \in L^2, w \neq 0} \frac{\|z\|_{L^2}}{\|w\|_{L^2}} \cdots \cdots (4)$$

ここで $\|\cdot\|_{L^2}$ は L_2 ノルムを表す。

〔2・4〕 L^2 ゲイン解析 むだ時間システム(3)が内部安定かつ γ 以下の L^2 ゲインをもつための条件、すなわち $G \leq \gamma$ となるための条件は次の定理により与えられる。

〔定理1〕 下記のLMI条件(LMI-1)を満たす行列および行列値関数 $P, Q, R(\beta), S(\alpha, \beta)$ が存在するならば、むだ時間システム(1)において、 $u(t) = 0$ としたむだ時間シ

システム (3) は内部安定でかつ γ 以下の L^2 ゲインを有する。
(LMI-1)

$$L_1(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} P & R(\beta) \\ R(\alpha)' & S(\alpha, \beta) \end{bmatrix} > 0, \quad (5)$$

$$Q > 0$$

$$L_2(\alpha, \beta) =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_0'P + PA_0 + Q \\ +R(0)' + R(0) + C'C \end{pmatrix} & PA_1 - R(-h) \\ \begin{pmatrix} A_1'P - R(-h)' \\ A_0(\alpha)'P + R(\alpha)'A_0 \\ -\frac{\partial}{\partial \alpha} R(\alpha)' + S(\alpha, 0) \end{pmatrix} & \begin{matrix} -Q \\ R(\alpha)'A_1 - S(\alpha, -h) \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} PA_0(\beta) + A_0'R(\beta) \\ -\frac{\partial}{\partial \beta} R(\beta) + S(0, \beta) \\ A_1'R(\beta) - S(-h, \beta) \end{pmatrix} & \begin{matrix} PD \\ 0 \\ R(\alpha)'D \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} R(\alpha)'A_0(\beta) \\ +A_0(\alpha)'R(\beta) \\ -(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta})S(\alpha, \beta) \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ -\gamma^2 I \end{matrix} \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

なお、ここで、

$$P = P', \quad Q = Q' \in R^{n \times n}$$

$$R(\beta) \in C^1([-h, 0]; R^{n \times n})$$

$$S(\alpha, \beta) = S(\beta, \alpha)'$$

$$\in C^1([-h, 0] \times [-h, 0]; R^{n \times n})$$

$$\forall \alpha, \beta \in [-h, 0]$$

である。

証明は付録 1 に示す。

3. 無限次元 LMI から有限次元 LMI への帰着

前節で得られた条件は無限次元の LMI 条件であり、そのままでは解くことは一般に困難である。そこで、本節ではこれらの無限次元 LMI 条件を解くための手法を提案する。

〈3・1〉 基本の手順 ここで、(LMI-1) において、システムパラメータ $A_{01}(\beta)$ および解 $R(\beta), S(\alpha, \beta)$ が

$$A_{01}(\beta) = A_{01}^0 + \beta A_{01}^1 + \beta^2 A_{01}^2 + \cdots + \beta^l A_{01}^l$$

$$R(\beta) = R_0 + \beta R_1 + \beta^2 R_2 + \cdots + \beta^l R_l$$

$$S(\alpha, \beta) = S_0 + (\alpha + \beta)S_1 + \cdots + (\alpha^l + \beta^l)Y_l$$

で与えられるなら、いずれの LMI もつぎのようなパラメータ依存 LMI

$$F_0(M) + f_1(\theta)F_1(M) + f_2(\theta)F_2(M) + \cdots + f_l(\theta)F_l(M) < 0 \quad (7)$$

の形で記述できる。ただし、 θ はつぎのようなベクトルである。

$$\theta \in \Theta := \{[\alpha \ \beta] | \alpha \in [-h, 0], \beta \in [-h, 0]\}$$

ここで、 $f_i: R^2 \mapsto R$ は θ の多項式関数であり、 F_i は対称かつ未知行列 M に対しアフィンな行列値関数である。

このとき、つぎの定理により、(7) の条件は有限個の LMI 条件に帰着させることができる。

〔定理 2〕⁽¹⁾ H を、 $k(\geq l+1)$ 個の頂点 $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ ($p_i \in R^r, i = 1, 2, \dots, k$) を持ち、曲面 $T = \{[f_1(\theta), f_2(\theta), \dots, f_l(\theta)]' | \theta \in \Theta\}$ を内部に含む R^l における凸多面体とする。このとき、 H の任意の頂点に対しつぎの LMI を満たす行列 M が存在すれば、その行列 M は任意の $\theta \in \Theta$ に対し、(7) を満たす。

$$F_0(M) + p_{i1}F_1(M) + p_{i2}F_2(M) + \cdots + p_{il}F_l(M) > 0 \quad (8)$$

ここで、 p_{ij} は頂点 p_i の j 番目の要素を表す。

注意 1 この定理は凸多面体 H の任意の頂点において (8) が成立すればその内部の点においても必ず (8) が成立することを示している。したがって、 T を含む体積の小さい H を構成することにより、 L^2 ゲインの評価に関する保守性を改善することができる。

文献 (1) では、凸多面体の構成方法として、

$$r_1 = [\min_{\theta \in \Theta} f_1(\theta) \min_{\theta \in \Theta} f_2(\theta) \cdots \min_{\theta \in \Theta} f_l(\theta)]',$$

$$r_2 = [\max_{\theta \in \Theta} f_1(\theta) \max_{\theta \in \Theta} f_2(\theta) \cdots \max_{\theta \in \Theta} f_l(\theta)]',$$

の 2 点を対角に持つ超直方体 (2^l 個の頂点を持つ) を構成する方法を提案している。この方法は一般的な関数 f_i およびパラメータ θ の個数が任意の一般的な場合に適用できるものであり、本節での問題にもそのまま適用できる。しかしながら、この方法はその一般性のために、保守性の大きい構成法になる可能性も持っている。そこで、以下では、本節の問題におけるパラメータが 2 個しか f_i は多項式関数であるという特殊性を考慮することでより保守性の少ない凸多面体の構成を提案する。

〈3・2〉 凸多面体の構成 前節で述べた線形むだ時間システムに関係するパラメータ依存 LMI に対しては、 T は 2 つのパラメータ α, β に依存したものになる。これは、定理 2 において、 $l = 2s$ で、

$$f_i(\alpha, \beta) = \begin{cases} f_i(\alpha), & i = 1, 2, \dots, s, \\ f_i(\beta), & i = s+1, s+2, \dots, 2s \end{cases}$$

である場合に相当する。ここで、 $f_i(\alpha), f_i(\beta)$ は α, β の多項式である。この場合、凸多面体が囲む曲面 T は $T = \{[\alpha \ \alpha^2 \cdots \alpha^s \ \beta \ \beta^2 \cdots \beta^s] | \alpha \in [-h, 0], \beta \in [-h, 0]\}$ となり、これを内部に含む R^{2s} における凸多面体の構成について考える。以下では区間 $[-h, 0]$ を一般化した区間 $[h_1, h_2]$ に対する結果を述べる。

〔定理 3〕 $T = \{[\alpha \ \alpha^2 \cdots \alpha^s \ \beta \ \beta^2 \cdots \beta^s] | \alpha \in [h_1, h_2], \beta \in [h_1, h_2]\}$ とする。このとき、つぎで与えられる頂点 p^{ij} ($0 \leq i \leq s, 0 \leq j \leq s$) を持つ R^l の凸多面体 H は T を内部に含む。

ここで、 p^{ij} は

$$p^{ij} = [p^i \ p^j], \quad i, j = 0, 1, \dots, s$$

であり, p^i は

$$\begin{aligned} p^0 &= [h_1 \ h_1^2 \ \cdots \ h_1^s]' \in R^s \\ p^1 &= [h_2 \ h_2^2 \ \cdots \ h_2^s]' \in R^s \\ &\vdots \\ p^s &= [h_s \ h_s^2 \ \cdots \ h_s^s]' \in R^s \end{aligned}$$

である。

証明は付録2に示す。

実際には, 定理3において, h_1, h_2 をそれぞれ, $h_1 = -h, h_2 = 0$ とすることで, 目的とする凸多面体を構成することができる。

なお, さらに保守性を少なくするためにさらに体積の小さい凸多面体を構成するためにはパラメータの範囲 $[-h, 0]$ を $[-h, h_a], [h_a, h_b], \dots$ のようにいくつかの区間に分割し, それらの区間ごとに定理3で示した凸多面体を構成することが可能である。

〈3・3〉数値例 提案手法の有効性を検証するため, 数値例を示す。対象システム(1)の L^2 ゲインは定理1中の LMI 条件 (LMI-1) によって与えられる。そこで, 定理1によって得られる無限次元の LMI 条件を, 有限個の LMI 条件に帰着させる時に, 文献(1)の方法と, 定理3による方法を適用し, それぞれの方法により得られた L^2 ゲインの上限の値と, 条件を解くのに要した計算機の CPU 時間を比較する。なお, 演算に当たっては LMI Control Toolbox for Use with MATLAB⁽¹²⁾を使用した。

システムパラメータをつぎのようにする。

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \\ A_{01}(\beta) &= \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad h = 2.0. \end{aligned}$$

ここで, (LMI-1) において, $R(\beta), S(\alpha, \beta)$ は,

$$\left. \begin{aligned} R(\beta) &= R_0 + \sum_{i=1}^i \beta^i R_i \\ S(\alpha, \beta) &= S_0 + \sum_{i=1}^i (\alpha^i + \beta^i) S_i \end{aligned} \right\} (i = 2 \sim 4)$$

とした。

結果は表1,2のようになった。

これらの結果から, パラメータ $(R(\beta), S(\alpha, \beta))$ の次数にかかわらず, 提案した凸多面体の構成法を利用することにより, L^2 ゲインの評価に関する保守性が改善されていることがわかる。また, 計算に要する CPU 時間についても同様に改善されている。

4. ゲインの大きさを制限した制御則の構成法

〈4・1〉状態フィードバック制御問題 ここでは, むだ時間システム(1)に対し,

$$u(t) = K_0 x(t) + \int_{-h}^0 K_{01}(\beta) x(t+\beta) d\beta \quad \cdots \cdots (9)$$

$$K_0 \in R^{m \times n}, \quad K_{01}(\beta) \in L^2([-h, 0]; R^{m \times n})$$

のような状態の履歴を用いるメモリーフィードバック則を適用した閉ループシステムを考える。その閉ループ系の L^2 ゲインの大きさが γ 以下になるようなコントローラ(9)の設計法について述べる。定理2の結果を基にこの条件を満たすコントローラのゲイン $K_0, K_{01}(\beta)$ を求めるための条件は次の定理で与えられる。

〔定理4〕 次の LMI 条件を満たす行列および行列値関数 $W, X, Z_0, Z_{01}(\beta), Y(\alpha, \beta)$ が存在するとき,

$$K_0 = Z_0 W^{-1}, \quad K_{01}(\beta) = Z_{01}(\beta) W^{-1}$$

で表されるゲインを用いたコントローラを適用した閉ループシステムは内部安定となり, その L^2 ゲインの値は γ 以下となる。

(LMI-2)

$$L_3(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} W & W \\ W & Y(\alpha, \beta) \end{bmatrix} > 0, \quad \cdots \cdots (10)$$

$$X > 0 \quad \cdots \cdots (11)$$

$$L_4(\alpha, \beta) =$$

$$\left[\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} W A_0' + W A_0 \\ + X + 2W \\ + B Z_0 + Z_0' B' \\ W A_1' - W \\ Z_{01}(\alpha)' B' \\ + A_0 W + B Z_0 \\ + Y(\alpha, 0) \\ C W' \\ D' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_1 W - W \\ -X \\ A_1 W \\ -Y(\alpha, -h) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B Z_{01}(\beta) \\ + W A_0' \\ + Z_0' B' \\ + Y(0, \beta) \\ W A_1' \\ - Y(-h, \beta) \\ B Z_{01}(\beta) \\ + Z_{01}(\alpha)' B' \\ - (\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}) \\ Y'(\alpha, \beta) \\ 0 \\ D' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} W C' & D \\ 0 & 0 \\ 0 & D \\ -I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \end{array} \right] < 0 \quad \cdots (12)$$

表1 L^2 ゲインの比較

Table 1. Comparison of L^2 gains

$S(\alpha, \beta), R(\alpha)$ の次数	2次	3次	4次
従来の手法	0.9050	0.9047	1.0620
提案の手法	0.9046	0.9033	0.90268

表2 CPU 時間の比較 (単位:秒)

Table 2. Comparison of CPU time (sec)

$S(\alpha, \beta), R(\alpha)$ の次数	2次	3次	4次
従来の手法	159.89	1861.0	20409
提案の手法	81.12	368.66	1208.5

なお、ここで、

$$\begin{aligned} W &= W', X = X' \in R^{n \times n}, \\ Y(\alpha, \beta) &= Y(\beta, \alpha)' \\ &\in C^1([-h, 0] \times [-h, 0]; R^{n \times n}) \\ Z_0 &\in R^{m \times n} \\ Z_{01}(\beta) &\in C([-h, 0]; R^{m \times n}) \\ \forall \alpha &\in [-h, 0], \quad \forall \beta \in [-h, 0] \end{aligned}$$

である。

この定理は、定理 2 において、

$$\begin{aligned} P^{-1} &= R(\beta)^{-1} = W, \quad P^{-1}QP^{-1} = X \\ S(\alpha, \beta) &= W^{-1}Y(\alpha, \beta)W^{-1} \\ K_0P^{-1} &= Z_0, \quad K_{01}(\beta)P^{-1} = Z_{01}(\beta) \quad \dots (13) \end{aligned}$$

とすることにより直ちに証明できる。

〈4・2〉ゲインの大きさを制限した制御則の構成法 前節で述べたコントローラの設計法では、制御量 z が制御入力 u を含まないため、定理 4 をそのまま用いると制御入力が大きくなってしまふことがある。これを避けるための一つの方法として、フィードバックゲインの大きさを制限することを考える。

いま、次のようにフィードバックゲインの大きさを制限しよう。

$$\begin{aligned} K'_0K_0 &< \gamma_1 I, \quad K_{01}(\beta)'K_{01}(\beta) < \gamma_2 I \quad \dots (14) \\ \forall \beta &\in [-h, 0] \end{aligned}$$

ここで、 γ_1, γ_2 はあらかじめ与えられているとする。このとき、次の定理を得る。

〔定理 5〕与えられた正の定数 p_1, p_2, q に対し、定理 4 の LMI 条件 (LMI-2) と下記の LMI 条件 (LMI-3) とを満たす行列および行列値関数 $W, X, Y(\alpha, \beta), Z_0, Z_{01}(\beta)$ が存在するならば、システム (1) に対し状態フィードバック制御則

$$K_0 = Z_0W^{-1}, \quad K_{01}(\beta) = Z_{01}(\beta)W^{-1} \quad (15)$$

を用いて構成した閉ループシステムは内部安定でその L^2 ゲインの値は γ 以下となり、フィードバックゲインは以下の不等式を満たす。

$$K'_0K_0 < p_1q^2I, \quad K_{01}(\beta)'K_{01}(\beta) < p_2q^2I \quad (16)$$

(LMI-3)

$$\begin{bmatrix} p_1I & Z'_0 \\ Z_0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad \dots (17)$$

$$\begin{bmatrix} p_2I & Z'_{01}(\beta) \\ Z_{01}(\beta) & I \end{bmatrix} > 0 \quad \dots (18)$$

$$\begin{bmatrix} qI & I \\ I & W \end{bmatrix} > 0 \quad \dots (19)$$

証明は付録 3 に示す。

与えられた γ_1, γ_2 に対して、(14) を満たし、システムの L^2 ゲイン G をある値 γ 以下となるようなフィードバックゲインを求めるアルゴリズムはつぎのように与えられる。

アルゴリズム

(Step 1) p_1, p_2, q の初期値を定め、 p_{10}, p_{20}, q_0 とする。

(Step 2) (LMI-1), (LMI-2) と以下の LMI を解く。

$$p_1 < p_{10}, \quad p_2 < p_{20}, \quad q < q_0$$

(Step 3) Step 2 により求めた解 p_1, p_2, q について、

$$\gamma_1 > p_1q^2, \quad \gamma_2 > p_2q^2$$

をみたすかどうか調べる。

(Step 4) Step 3 が満たされるとき、求められたゲインは (14) を満たし、アルゴリズムは終了する。Step 3 が満たされないとき、 $p_{10} = p_1, p_{20} = p_2, q_0 = q$ として Step 2 に戻る。

〈4・3〉数値例

数値例 1 本節では、前節までで示したコントローラの設計について、定理 4 による方法と、定理 5 で提案した方法で設計を行ない、その比較を行う。なお、これらの方法で得られる無限次元の LMI 条件は第 3 章の方法により有限個の LMI 条件に帰着させて解いている。

対象とするシステムは、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 0.3x(t-1) + u(t) \\ y(t) &= x(t) \quad \dots (20) \\ x(\beta) &= 0, \quad -h \leq \beta \leq 0 \end{aligned}$$

また、 $Z_{01}(\beta), Y(\alpha, \beta)$ の形は、

$$\begin{aligned} Z_{01}(\beta) &= Z_{01}^0 + \beta Z_{01}^1 + \beta^2 Z_{01}^2 \\ Y(\alpha, \beta) &= Y_0 + (\alpha + \beta)Y_1 + (\alpha^2 + \beta^2)Y_2 \end{aligned}$$

で表されるとする。

ここでは、このシステムに対して目標信号 r へのトラッキング問題を考え、図 1 に示すように積分器を含む形でフィードバックコントローラ (9) の設計を行なう。そのために、図 2 のような積分器を重み関数とする一般化プラントを導入し、 L^2 ゲインを低減化する設計を行なった。

さらに、ゲインを制限する値として、 p_1, p_2, q を、

$$p_1 = 3.49 \times 10^4, \quad p_2 = 1.28 \times 10^2, \quad q = 2.56$$

図 1 閉ループシステム

Fig. 1. The closed loop system

とした。なお、 $\gamma_1 = 2.5 \times 10^5$, $\gamma_2 = 8.5 \times 10^2$ とした。

このシステムについて定理 4, 定理 5 に基づき導出した無限次元 LMI を第 3 章の方法に基づき有限個に帰着させ解いた結果, 得られたコントローラは次のようになった。

定理 4 によるコントローラ

$$\begin{aligned} K_0 &= [115.48 \quad -24.94] \\ K_{01}(\beta) &= [75.79 \quad -12.45] \\ &\quad + \beta[-9.34 \quad -3.09] \\ &\quad + \beta^2[15.14 \quad -3.53] \end{aligned}$$

定理 5 によるコントローラ

$$\begin{aligned} K_0 &= [36.16 \quad -11.74] \\ K_{01}(\beta) &= [23.49 \quad -4.01] \\ &\quad + \beta[1.71 \quad -0.53] \\ &\quad + \beta^2[-0.07 \quad -0.19] \end{aligned}$$

ここで, $r = 1$ としたときの結果を図 3 に示す。実線は定理 4 によるコントローラ, 一点鎖線は定理 5 によるコントローラを用いたものである。

数値例 2 前節までに示したコントローラ的设计法は, 形式的に $C = 0, D = 0$ とおくことによってそのままレギュレータ (安定化コントローラ) の设计法となる。本節ではレギュレータ的设计例を示す。システムパラメータを

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.0 \\ 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad h = 0.5 \end{aligned}$$

とし, ゲインを制限する値として, $\gamma_1 = 4.0 \times 10^3$, $\gamma_2 = 3.0 \times 10^2$ と仮定した。 $Z_0(\beta), Y(\alpha, \beta)$ を数値例 1 と同じ形式として求めたコントローラはつぎのようになった。

定理 4 によるコントローラ

$$\begin{aligned} K_0 &= [-63.6094 \quad -29.0628] \\ K_{01}(\beta) &= [-20.8643 \quad -8.9807] \\ &\quad + \beta[-18.3488 \quad -10.1254] \\ &\quad + \beta^2[-4.9496 \quad -1.5358] \end{aligned}$$

図 2 一般化プラント
Fig. 2. Generalized plant

定理 5 によるコントローラ

$$\begin{aligned} K_0 &= [-16.2512 \quad -9.8343] \\ K_{01}(\beta) &= [-9.3076 \quad -4.3236] \\ &\quad + \beta[-2.0446 \quad -2.1647] \\ &\quad + \beta^2[8.0998 \quad 3.9455] \end{aligned}$$

一方, 求められたこれらのゲインを用いた閉ループ系の応答は図 4, 5 のようになった。

これらの結果から, 提案した定理およびアルゴリズムを用いることにより, むだ時間を含むシステムに対し, 制御入力の値が制限されたフィードバック制御則の構成がある程度まで可能であることがわかる。

5. おわりに

本稿では線形むだ時間システムにおける L^2 ゲイン解析および状態フィードバックコントローラ設計問題に対する新しい LMI 手法を提案し, 数値例によりその有効性を示した。また, 入力が大きくなってしまふを防ぐため, ゲインの大きさを制限する LMI 条件を付加する方法についても検討した。ゲインの大きさを小さくすることにより入力を小さくする方法には一定の限界がある。制御入力の大きさを制限した制御則の構成の本格的な議論には状態可到達集合の評価が必要であり, 今後の課題である。

(平成 12 年 12 月 25 日受付, 同 13 年 7 月 4 日再受付)

(a) Output y

(b) Input u

図 3 シミュレーション結果 (数値例 1)

Fig. 3. Simulation result

文 献

- (1) T.Azuma, R.Watanabe, K.Uchida, An Approach to Solving Parameter-Dependent LMI Conditions Based on Finite Number of LMI Conditions, *Proc of the American Control Conference*, pp.510-514, 1997
- (2) 東, 渡辺, 内田, 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析における凸包の構成法, 第 25 回制御理論シンポジウム, pp.73-78, 1996
- (3) 渡辺, 内田, 藤田, 有限個の LMI 条件に基づいたスケジューリングパラメータを持つ線形システムの解析, 第 24 回制御理論シンポジウム, pp.9-14, 1995
- (4) T.Azuma, T.Kondo, K.Uchida, Memory State Feedback Control Synthesis for Linear Systems with Time Delay via a Finite Number of Linear Matrix Inequalities, *Proc of IFAC International workshop on Linear Time Delay Systems*, pp.183-187, 1998
- (5) 岩崎, LMI と制御, 昭見堂, 1997
- (6) 渡部, むだ時間システムとの制御, 計測自動制御学会, 1993
- (7) 池田, 東, 内田, 線形むだ時間システムに対する無限次元線形行列不等式アプローチにおける凸多面体の一構成法, 電気学会全国大会, 2000
- (8) 東, 池田, 内田, ゲインの大きさを制限したむだ時間を含む線形システムにおける状態フィードバック制御-有限個の LMI 条件に基づく構成法-, 電気学会 電子・情報・システム部門大会, pp.345-346, 1998
- (9) 近藤, むだ時間を含むシステムの H^∞ 制御-有限個の LMI による解法-, 平成 9 年度早稲田大学修士論文, 1998
- (10) S.Boyd, L.El Ghaoui, E.Fereh and V.Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *SIAM, studies in applied mathematics.*, vol.15, 1994
- (11) K.Gu, Discretization of Lyapunov functional for uncertain time-delay systems, In *Proc of American Control Conference*, pp.505-509, 1997
- (12) P.Gahinet, A.Nemirovski, A.J.Laub and M.Chilali, LMI Control Toolbox For Use with MATLAB. *The MATH-*

WORKS, Inc., 1995

- (13) L.Dugard and E.I.Verriest, *Stability and Control of Time-delay Systems*, Springer 1998

付 録

1. 定理 1 の証明

LMI-1 が満たされていると仮定する。

内部安定性

次の関数を考える

$$\begin{aligned}
 V(x(t), x_t) = & x(t)'Px(t) \\
 & + \int_{-h}^0 x(t+\beta)'Qx(t+\beta)d\beta \\
 & + x(t)' \int_{-h}^0 R(\beta)x(t+\beta)d\beta \\
 & + \int_{-h}^0 x(t+\alpha)'R(\alpha)'d\alpha x(t) \\
 & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x(t+\alpha)'S(\alpha, \beta)x(t+\beta)d\alpha d\beta \\
 & \dots\dots\dots (付 1)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$x_t = \{x(t+\beta) | -h \leq \beta \leq 0\},$$

$$P, Q \in R^{n \times n},$$

$$R(\beta) \in C^1([-h, 0]; R^{n \times n}),$$

(a) 状態 $x(t)$

(b) 入力 $u(t)$

図 4 定理 4 を用いた結果結果 (数値例 2)

Fig. 4. Simulation result (Theorem 4)

(a) 状態 $x(t)$

(b) 入力 $u(t)$

図 5 定理 5 を用いた結果 (数値例 2)

Fig. 5. Simulation result (Theorem 5)

$$S(\alpha, \beta) \in C^1([-h, 0] \times [-h, 0]; R^{n \times n})$$

である。

(1) のリアプノフ関数として (付 1) を考え、 $V(x(t), x_t) > 0$, $\frac{d}{dt}V(x(t), x_t) < 0$ ($(x(t), x_t) \neq 0$) を示すことにより、内部安定性を証明する。いま、(5), (6) と、次式より、

$$\begin{aligned} V(x(t), x_t) = & \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \begin{bmatrix} h^{-1}x(t) \\ x(t+\alpha) \end{bmatrix}' L_1(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} h^{-1}x(t) \\ x(t+\alpha) \end{bmatrix} d\alpha d\beta \\ & + \int_{-h}^0 x(t+\beta)' Q x(t+\beta) d\beta. \end{aligned}$$

$V(x(t), x_t) > 0$ がいえる。

システム (1) の軌跡に沿って (付 1) の両辺を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), x_t) = & \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \begin{bmatrix} h^{-1}x(t) \\ h^{-1}x(t-h) \\ x(t+\alpha) \end{bmatrix}' \\ & L_0(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} h^{-1}x(t) \\ h^{-1}x(t-h) \\ x(t+\alpha) \end{bmatrix} d\alpha d\beta \end{aligned}$$

となる。ここで、 L_0 は次で表される。

$$\begin{aligned} L_0(\alpha, \beta) = & \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_0'P + PA_0 \\ +Q \\ +R(0)' + R(0) \\ A_1'P - R(-h)' \end{pmatrix} & PA_1 - R(-h) \\ \begin{pmatrix} A_{01}(\alpha)'P \\ +R(\alpha)'A_0 \\ -\frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha)' \\ +S(\alpha, 0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R(\alpha)'A_1 \\ -S(\alpha, -h) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} PA_{01}(\beta) + A_0'R(\beta) \\ -\frac{\partial}{\partial\beta}R(\beta) + S(0, \beta) \\ A_1'R(\beta) - S(-h, \beta) \\ R(\alpha)'A_{01}(\beta) \\ +A_{01}(\alpha)'R(\beta) \\ -(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta})S(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで Schur Complement を用いることで (6), すなわち $L_2(\alpha, \beta) < 0$ が次の条件と等価であることがわかる。

$$\begin{aligned} L_0(\alpha, \beta) & + \begin{bmatrix} C' & PD \\ 0 & 0 \\ 0 & R(\alpha)'D + R(\beta)'D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \\ & \cdot \begin{bmatrix} C' & PD \\ 0 & 0 \\ 0 & R(\alpha)'D + R(\beta)'D \end{bmatrix}' < 0. \end{aligned}$$

以上より、システム (1) は内部安定であることがわかる。

・ L^2 ゲインが γ 以下

最初に、 $w(t) = 0$ としたシステム (1) が内部安定で L^2 入出力安定であるとき、 $w \in L^2([0, \infty]; R^p)$ に対して

$x(\infty) = 0$ であることに注意する。このことと、 $x(\beta) = 0, -h \leq \beta \leq 0$ より、すべての $w \in L^2([0, \infty]; R^p)$ に対して、

$$\begin{aligned} & \|z\|_{L^2}^2 - \gamma^2 \|w\|_{L^2}^2 \\ & = \int_0^\infty [z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) + \frac{d}{dt}V(x(t), x_t)] dt \end{aligned}$$

であるということがわかる。ここで $\frac{d}{dt}V(x(t), x_t)$ を求め、上式に代入することで、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \|z\|_{L^2}^2 - \gamma^2 \|w\|_{L^2}^2 \\ & = \int_0^\infty \left(\int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \begin{bmatrix} h^{-1}x(t) \\ h^{-1}x(t-h) \\ x(t+\alpha) \\ h^{-1}w(t) \end{bmatrix}' L_2(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} h^{-1}x(t) \\ h^{-1}x(t-h) \\ x(t+\alpha) \\ h^{-1}w(t) \end{bmatrix} d\alpha d\beta \right) dt. \end{aligned}$$

このとき、(6) より、 $G \leq \gamma$ となる。 $\square$

2. 定理 3 の証明

定理 3 においては α, β の区間としては $\alpha \in [h_1, h_2], \beta \in [h_1, h_2]$ としているが、ここでは、記述を簡単にするため $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]$ とした場合を考えるが、一般性が失われることはない。

$e_1, e_2, \dots, e_{2s}$ は R^{2s} の自然基底とする、すなわち、

$$\begin{aligned} e_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \\ e_2 &= [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \\ &\vdots \\ e_s &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \\ e_{s+1} &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \\ e_{s+2} &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0], \\ &\vdots \\ e_{2s} &= [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1], \end{aligned}$$

である。なお、ここで、

$$\begin{aligned} e_{s+1} &= p^{01} - p^{00} \\ &= p^{11} - p^{10} = p^{21} - p^{20} = \dots, \\ e_{s+2} &= p^{02} - p^{01} \\ &= p^{12} - p^{11} = p^{22} - p^{21} = \dots, \dots \quad (\text{付 2}) \\ &\vdots \\ e_{2s} &= p^{0s} - p^{0(s-1)} \\ &= p^{1s} - p^{1(s-1)} = p^{2s} - p^{2(s-1)} = \dots \end{aligned}$$

であることに注意する。

いま、 β を $0 \leq \beta \leq 1$ の任意の値に固定した時、 p^{i0} と p^{is} 間の点 $p^{i\mu}$ ($i = 0, 1, \dots, s$) は、

$$\begin{aligned}
p^{i'} &= p^{i0} + \beta e_{s+1} + \beta^2 e_{s+2} + \cdots + \beta^s e_{2s} \quad (\text{付 3-a}) \\
&= p^{i0} + \beta(p^{i1} - p^{i0}) + \beta^2(p^{i2} - p^{i1}) + \cdots \\
&\quad + \beta^s(p^{is} - p^{i(s-1)}) \dots\dots\dots (\text{付 3-b})
\end{aligned}$$

と表される。すると、 T 上の点 P はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned}
P &= \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^s e_s \\
&\quad + \beta e_{s+1} + \beta^2 e_{s+2} + \cdots + \beta^s e_{2s} \\
&= p^{0'} - p^{0'} + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^s e_s \\
&\quad + \beta e_{s+1} + \beta^2 e_{s+2} + \cdots + \beta^s e_{2s}
\end{aligned}$$

(付 2) より,

$$\begin{aligned}
P &= p^{0'} - p^{00} - \beta e_{s+1} - \beta^2 e_{s+2} - \cdots - \beta^s e_{2s} \\
&\quad + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^s e_s \\
&\quad + \beta e_{s+1} + \beta^2 e_{s+2} + \cdots + \beta^s e_{2s} \\
&= p^{0'} + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^s e_s
\end{aligned}$$

(付 2), (付 3-a), (付 3-b) より,

$$\begin{aligned}
P &= p^{0'} + \alpha(p^{1'} - p^{0'}) + \alpha^2(p^{2'} + p^{1'}) + \cdots \\
&\quad + \alpha^s(p^{s'} + p^{(s-1)'}) \\
&= (1 - \alpha)p^{0'} + (\alpha - \alpha^2)p^{1'} + \cdots \\
&\quad + (\alpha^{(s-1)} - \alpha^s)p^{(s-1)'} + \alpha^s p^{s'}
\end{aligned}$$

さらに (付 3-a), (付 3-b) より,

$$\begin{aligned}
P &= (1 - \alpha)p^{00} + (1 - \alpha)\beta(p^{01} - p^{00}) + \cdots \\
&\quad + (1 - \alpha)\beta^s(p^{0s} - p^{0(s-1)}) + (\alpha - \alpha^2)P^{10} \\
&\quad + (\alpha - \alpha^2)\beta(p^{11} - p^{10}) + \cdots \\
&\quad + (\alpha - \alpha^2)\beta^s(p^{1s} - p^{1(s-1)}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (\alpha^{s-1} - \alpha^s)P^{(s-1)0} \\
&\quad + (\alpha^{(s-1)} - \alpha^s)\beta(p^{(s-1)1} - p^{(s-1)0}) \\
&\quad + \cdots + (\alpha^{s-1} - \alpha^s)\beta^s(p^{(s-1)s} - p^{(s-1)(s-1)}) \\
&\quad + \alpha^s p^{s'} \\
&= (1 - \alpha)(1 - \beta)p^{00} + (1 - \alpha)(\beta - \beta^2)p^{01} + \cdots \\
&\quad + (1 - \alpha)(\beta^{s-1} - \beta^s)p^{0(s-1)} + (1 - \alpha)\beta^s p^{0s} \\
&\quad + (\alpha - \alpha^2)(1 - \beta)p^{10} \\
&\quad + (\alpha - \alpha^2)(\beta - \beta^2)p^{11} + \cdots \\
&\quad + (\alpha - \alpha^2)(\beta^{s-1} - \beta^s)p^{1(s-1)} + (\alpha - \alpha^2)\beta^s p^{1s} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (\alpha^{s-1} - \alpha^s)(1 - \beta)p^{(s-1)0} \\
&\quad + (\alpha^{s-1} - \alpha^s)(\beta - \beta^2)p^{(s-1)1} + \cdots \\
&\quad + (\alpha^{s-1} - \alpha^s)(\beta^{s-1} - \beta^s)p^{(s-1)(s-1)} \\
&\quad + (\alpha^{s-1} - \alpha^s)\beta^s p^{(s-1)s} \\
&\quad + \alpha^s p^{s'}
\end{aligned}$$

このとき、 $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]$ より、すべての p^{ij} の係数は 0 以上である。さらに各係数の和は 1 である。これらより、 p_{ij} , ($0 \leq i \leq s, 0 \leq j \leq s$) を頂点とする凸多面体 H は T を内部に含んでいる。 $\square$

3. 定理 5 の証明

内部安定性と L^2 ゲインについては定理 4 より明らかである。そこでゲイン (15) が (16) を満たすことを示す。(17), (18), (19) はそれぞれ以下と等価である。

$$\begin{aligned}
Z_0' Z_0 &< p_1 I \\
Z_{01}(\beta)' Z_{01}(\beta) &< p_2 I \\
W^{-1} &< q I
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
K_0' K_0 &= W^{-1} Z_0' Z_0 W^{-1} \\
&< p_1 W^{-1} W^{-1} \\
&< p_1 q^2 I \\
K_{01}(\beta)' K_{01}(\beta) &= W^{-1} Z_{01}(\beta)' Z_{01}(\beta) W^{-1} \\
&< p_2 W^{-1} W^{-1} \\
&< p_2 q^2 I
\end{aligned}$$

となり、ゲインが制限される。 $\square$

池 田 光治郎 (学生員) 2000 年、早稲田大学大学院修士課程修了。同年、同大学院博士課程入学、現在に至る。

東 剛 人 (非会員) 1997 年、早稲田大学大学院修士課程修了。2000 年、同大学院博士課程修了。1998 年早稲田大学理工学部助手。2000 年より金沢大学工学部助手、現在に至る。むだ時間システム制御およびゲインスケジューリングに関する研究に従事。博士 (工学)。計測自動制御学会、システム制御情報学会の会員。

内 田 健 康 (正員) 1973 年、早稲田大学大学院修士課程修了。1976 年、同大学院博士課程修了。1983 年より早稲田大学教授 (電気電子情報工学科)、現在に至る。制御系の情報構造、ロバスト制御および推定などの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会、システム制御情報学会、IEEE などの会員。