実多項式の減衰度指定 Hurwitz 安定性について

正 員 森 武 宏 (京都工芸繊維大学電子情報工学科)

正 員 小 亀 英 己 (大阪府立大学電気電子システム学科)

On Shifted Hurwitz Stability of Real Polynomials

Mori Takehiro, Member (Dept. of Electronics & Information Science, Kyoto Institute of Technology),
Kokame Hideki, Member (Dept. of Electrical & Electronic Systems, Osaka Prefecture University)

Shifted Hurwitz stability has been one of traditional means to specify control performances. Still, its conditions have thus far scarcely come to the fore in studies of control systems analysis, in large part because they would be regarded as direct corollaries of the "shiftless" Hurwitz stability criteria. This note examines them afresh and presents new conditions and a characterization for the shifted Hurwitz property. The results obtained possess some advantages over those derived simply by shifting the Hurwitz stability conditions.

キーワード : real polynomials, shifted Hurwitz stability, Schur stability, delta operator polynomials, sufficiency criteria

1. ま え が き

実多項式の減衰度指定 Hurwitz 安定性とは、その零点の実部がすべて指定された負の実数より小さい性質をいう。この性質は制御系設計の際の伝統的な性能設計指標の一つとしてしばしば出現するにもかかわらず、そのための条件や判定法はこと改めて取り上げられることがなかったように見受けられる。これは、単なる変数のシフトにより Hurwitz 安定性に関する諸結果をそのまま流用することができるので、それで事足りると考えられてきたことがその主因であろう。

本稿はこの性質について改めて検討を加え、新たないくつかの判定条件あるいは特徴付けを導くものである。得られた結果には上に述べた Hurwitz 安定性を経由する方法にない利点があり、これにかわる、あるいはこれを補完する意義をもつ。

2. 主要な結果

n 次実係数多項式、

$$f(s) := a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \cdots \cdots \cdots (1)$$

に対する減衰度 $T(> 0)$ の減衰度指定 Hurwitz 安定性 (Shifted Hurwitz Stability、以下 S-Hurwitz 安定性と略) とは、(1) の零点 s がすべて $\text{Re}(s) < -T$ を満たすときをいう。この性質はとりもなおさずシフトされた多項式 $f(s-T)$ が Hurwitz 安定であることに他ならないから、変数を移動させたのち Hurwitz 安定性に関する様々な判定法や等価条件が適用できる。ここではこの直観的な経路を Hurwitz ルートと呼ぶことにする。本稿では、これに対して S-Hurwitz 安定条件を零点がすべて複素平面上のある円板内に存在す

る条件に等価に置き換える。すなわち Hurwitz ルートに對置して、いわば Schur ルートとも呼べる方法である。このことにより、Hurwitz ルートにない特色をもつ判定法あるいは特徴付けが得られる。これらは、以下の3つの小節のそれぞれにまとめられている。

〈2・1〉 S-Hurwitz 安定性の判定法 Schur ルートの鍵となるのが、文献(5)に示された次の事実である。

〔補題1〕 (1) 式の $f(s)$ が減衰度 T で S-Hurwitz 安定であるための必要十分条件は、多項式 $g(s) := s^n f(1/s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0$ の零点 $s = s_0 = x_0 + jy_0$ がすべて複素平面上の領域、

$$\mathcal{D} := \{x + jy \mid (x + \frac{1}{2T})^2 + y^2 < (\frac{1}{2T})^2\} \quad (2)$$

に存在することである。

$\mathcal{D}$ は、複素平面上中心 $(-1/2T, j0)$ 、半径 $1/2T$ の円板領域である。実は、この $\mathcal{D}$ はデルタ演算子多項式に対する安定領域に他ならない。デルタ演算子 δ は $\delta := (q-1)/\Delta$ 、 q : シフト演算子、 Δ : サンプルング周期で定義され、 q に優る計算誤差特性をもつといわれる離散演算子である (文献(1)参照)。この δ に対応する周波数領域変数を γ としたとき、 $\mathcal{D}$ は多項式 $g(\gamma)$ で $\Delta = 2T$ とした場合の安定領域となっている。つまり、デルタ演算子で記述されたシステムの特性多項式が $g(\gamma)$ であるとき、その零点がすべて $\mathcal{D}$ にあればシステムは安定である。そして、デルタ演算子多項式の安定判別に関しては近年様々な方法が提案されている⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾。補題1は、これらの方法が S-Hurwitz 安定性判定のためにもそのまま利用できることを示している。すなわち、与えられた多項式の係数のべき順を逆にし、サンプルング周期

を $2T$ とおいて上述のいずれかの方法を適用するのみでよい。Hurwitz ルートなら、多項式 $f(s-T)$ の s の各べきの係数を計算しなければならないが、ここに述べた方法ではこのお膳立ては一切不要で、直ちに判定にとりかかることができる。

〈2・2〉 S-Hurwitz 安定性の等価表現 ここでは、補題 1 をもとに S-Hurwitz 安定性をシフトされた Schur 安定性に等価に書き換えた結果を示す。このため、次の多項式を定義する。

$$\begin{aligned}\bar{h}(s) &:= 2^n T^n g(s/2T) \\ &= a_n s^n + 2T a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + 2^n T^n a_0 \cdots \cdots \quad (3) \\ h(z) &:= \bar{h}(z-1) = a_n z^n + b_{n-1}(T) z^{n-1} + \cdots + b_0(T) \quad (4)\end{aligned}$$

$h(z)$ の $n-1$ 次以下の係数 $b_i(\cdot)$, $i = 0, \dots, n-1$ は、 T の関数となっていることに注意しよう。このとき、下記の定理が成り立つ。

〔定理 1〕 $f(s)$ が減衰度 T で S-Hurwitz 安定であるための必要十分条件は、 $h(z)$ が Schur 多項式であることである。

これは、円板 D をスケーリング (3) 式) とシフト (4) 式) により原点中心の単位円板に移した結果である。この定理では、(4) 式のようにシフト後の係数をまず求めなければならない点では Hurwitz ルートとかわりがない。しかしながら、定理には次のような二つの効用がある。その一つは、一貫してデジタル設計する場合などには実現すべき S-Hurwitz 安定性を z 平面での性質として表現しておいた方が便利である事実があることである。明らかに s 平面での減衰度 T は、 z 平面では円板の半径に対応している。他の効用は、Schur 安定性の諸性質が Hurwitz 安定性のそれらに加えて利用できることになり、その結果 S-Hurwitz 安定性の特徴付け、判別法の選択肢を広げていることである。その一例を次の小節に示す。

〈2・3〉 S-Hurwitz 安定性の十分条件 定理 1 のように Schur ルートを辿れば、S-Hurwitz 安定性の解析的な十分条件を簡単に得ることができる。

〔定理 2〕 次の条件 (i) または (ii) は、減衰度 T で多項式 (1) が S-Hurwitz 安定であるための十分条件である。

- (i) $a_n > b_{n-1}(T) > b_{n-2}(T) > \cdots > b_0(T) > 0$
- (ii) $a_n > |b_{n-1}(T)| + |b_{n-2}(T)| + \cdots + |b_0(T)|$

これらは多項式の Schur 安定性のよく知られた十分条件⁽⁸⁾を、 $h(z)$ に適用したものである。このように、一旦 $b_i(T)$, $i = 0, \dots, n-1$ を計算しておけば、Schur ルートでは S-Hurwitz 安定性の解析的な十分条件が簡単に得

られる。これに対して Hurwitz ルートでは、同様な十分条件を得る試みは有用な結果を生まない。なぜなら、Hurwitz 安定性の十分条件はもともとその数が少ないうえに一般に係数の高次同次不等式になり⁽⁶⁾、さらに係数が T の多項式になることを考慮すると十分条件に対する要請ともいえるべき簡明さが失われるからである。定理 2 では 2 つの代表的な十分条件を用いたが、Schur 安定性に関してはこれら以外にも簡単な十分条件が少なからず存在し同様に S-Hurwitz 安定性判定のために使用することができる^{(8) (9) (10)}。最後に定理 2 の条件 (i) の簡単な数値例を挙げておこう。 $n = 3$ のとき、(i) は次の 4 つの不等式に帰着する： $2a_3 > Ta_2$, $3Ta_2 - 3a_3 - 2T^2a_1 > 0$, $2a_3 - 3Ta_2 + 4T^2a_1 - 4T^3a_0 > 0$, $2Ta_2 - a_3 - 4T^2a_1 + 8T^3a_0 > 0$ 。例えば、 $T = 1$, $a_0 = 0.07$, $a_1 = 0.7$, $a_2 = 1.5$, $a_3 = 1$ のとき、この条件は満たされる。実際、このときこの多項式は減衰度 1 で S-Hurwitz 安定であることが確かめられる。

(平成 14 年 3 月 4 日受付)

文 献

- (1) R.H. Middleton & G.C. Goodwin: Digital Control and Estimation: A Unified Approach, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1990)
- (2) K. Premaratne & E.I. Jury, "Tabular Method for Determining Root Distribution of Delta-Operator Formulated Real Polynomials", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39-2, 352-355 (1994)
- (3) H. Fan: "Efficient Zero Location Tests for Delta-Operator-Based Polynomials", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42-5, 722-727 (1997)
- (4) H. Fan: "A Normalized Schur-Cohn Stability Test for the Delta-Operator-Based Polynomials", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42-11, 1606-1612 (1997)
- (5) T. Mori & H. Kokame: "A Note on the Stability of Delta-Operator-Induced Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45-10, 1885-1886 (2000)
- (6) 森 武宏・小亀英己: "実多項式の Hurwitz 安定性のいくつかの十分条件", 電気学会論文誌, 121-C-9, 1488-1489 (2001)
- (7) Y. Xi & G. Schmidt: "A Note on the Location of the Real Roots of a Polynomial", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 30-1, 78-80 (1985)
- (8) E.I. Jury: Application of the Z-Transform Method, Wiley, NY (1964)
- (9) E. I. Jury: Innors and Stability of Dynamical Systems, Wiley, NY (1974)
- (10) R.A. Horn & C.A. Johnson: Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989)

森 武宏 (正員) 1945 年生。1968 年京都大学工学部電子工学科卒業。1974 年同大学院博士課程課程修了、同大学助手、助教授を経て 1990 年より京都工芸繊維大学教授。工学博士。主として制御系の解析設計の研究に従事。

小 亀 英 己 (正員) 1946 年生。1968 年京都大学工学部電子工学科卒業。1973 年同大学院博士課程課程修了、同大学助手。1980 年大阪工業大学講師、同助教授、教授を経て 1995 年より大阪府立大学教授。工学博士。ロバスト制御の研究に従事。