磁化構造物の磁気モデルの決定

正 員 森 恵 一 (防衛大)

1. 序 言

車両、船舶または宇宙船により、埋没物体の磁気探知、磁気機雷の掃海または宇宙磁界の観測を実施するためには、これら磁化構造物から発生する磁界を所要の水準以下にまで低減させる必要が生ずる。磁界は、主として磁性を有する材料、部品の永久および誘導磁化に起因する。磁界低減のためには、磁性の少ない材料、部品を用いて構造物を構成し、必要に応じ永久磁化の消去、磁気補償などを施さなければならない。

磁界低減を効果的に行なうには、外部磁界の原因となる内部磁化を見いだすことがまず要求される。しかし、磁気源が定まって磁界が確定するのとは反対に、磁界が定まっても磁気源は確定しない。すなわち、一定の外部磁界を実現するに必要な構造物の磁化は様々な形で存在しうる。このため、外部磁界からは真の磁化を見いだすことはできず、外部に関して等価な磁気モデルを求めようのみである。

車両、船舶、宇宙船の外形は一般に細長く、細長回転だ円体と似ている。従って、完備系を成すところの回転だ円体関数を用いれば、近くから遠くまでの外部磁界を完全に記述できることとなる。また、外部磁界の構造も回転だ円体状であり、同関数を用いて磁界を級数展開する場合、比較的収束の速いことが予想される。このため、回転だ円体関数に基づく磁気モデルが有用と判断される。筆者は、同関数による級数展開各項を代用磁荷の等価分布と関係づけ、展開係数値を基として、構造物の磁化評価を行なう方法を既に示した⁽¹⁾。

一定状態の構造物磁気モデルを決定するということは、外部磁界の観測資料から回転だ円体関数の係数値を定めることに帰着する。ところが、係数は構造物を

取り囲む共焦点回転だ円体面上で磁界法線分力が定まったときのみ、その面上における面関数の直交性のため一義的に定まるに過ぎない。要するに、この面上で磁界法線分力を観測しない限り、磁気モデルは確定しない。それにもかかわらず、測定容易な位置および分力を選んで磁界を観測し、得られた資料から磁気モデルを決定したいことが多い。大きくて重い構造物を囲んで回転だ円体面を設け、この面上で磁界法線分力を観測することは実際上不可能であることによる。このような場合には、最小二乗法などを適用し、観測値にうまく当てはまるように係数値を定めるという方法を取らざるをえない。

Roy氏は、宇宙船の側方磁界3分力の観測値に球関数を変形した式を当てはめて、八次までの係数値を求め、計算値と実測値とを比較している⁽²⁾。しかし、式の変形によって球関数の性質は損なわれ、本来三次元的であるべき磁気モデルが側方平面以外には通用しない二次元的モデルと化し、適用可能範囲が著しく狭められる。また竹田氏は、船舶の磁気的模型の下方における磁界観測値に、回転だ円体関数の偏導関数を最小二乗法により当てはめて係数値を求めようとした際、精度を上げるべく三次の関数まで考慮したところ、かえって磁気モデルが不正確になったと報告している⁽³⁾。

最小二乗法適用による磁気モデル決定が精度良く行なえなかった主要な原因は、正規方程式の条件悪化にあったと考えられる⁽⁴⁾。すなわち、モデルの精度を上げようとしてより高次の関数までも考慮すると、元来が非直交関数による当てはめのため、正規方程式係数逆行列の幾つかの要素が、他に比して極端に大きな値を持つようになる。すると、小さな観測誤差と言えども大きく解を左右する。この傾向は、狭い範囲での観測資料を用いる場合に特に顕著となる。近似を良くしようとして高次の関数まで考慮すると、その範囲内で似た形を有するものの出現する機会が増すからである。

A Magnetic Field Modeling for Magnetized Objects. By Keiichi Mori, Member (Department of Applied Physics, The National Defense Academy).

森 恵一：正員，防衛大学校応用物理学教室

筆者は外部磁界への影響度、あるいは磁氣的発生しやすさの順序に従って級数各項を並べ替え、この順に従って各項を採用していくことにより、正規方程式条件の良好化を図りうるものと考えた。そして、その一般的傾向を構造物本体の寸法と関係づけて関数の次数、位数選択則を導き、これを用いた磁気モデル決定の方法を提案する。この方法によれば、測定容易な位置、分力を選んで得られた磁界観測資料からでも、精度良くモデル決定を行ないることが期待される。

以下、回転だ円体関数による磁化構造物磁界の展開式について記述した後、関数の発生しやすさを磁氣的に検討して次数、位数選択則を導く。次に観測誤差について考察し、磁気モデル決定に対する最小二乗法適用の妥当性を示す。最後に、磁気源が既知であるところの船体磁気を例として磁気モデルの決定を試み、本方法の有効性を示す。

2. 磁化構造物磁界の回転だ円体関数による展開

伝導電流の無視できる空間に1個の磁化構造物が存在しているものとする。構造物体の外部では磁界はうずなしであるため、磁界のスカラー・ポテンシャル、すなわち磁位を定義することができる。また磁界の発散も存在しないため、この磁位はラプラスの方程式を満足する。

第1図に示すように、この空間内、構造物の中心線上に点 C_1 および C_2 を置き、これらを焦点とする細長回転だ円体座標系 (ξ, η, ζ) を設ける。すると、任意の点 $P(\xi, \eta, \zeta)$ は、回転だ円体面 $\xi(1 \leq \xi)$ 、回転双曲面 $\eta(-1 \leq \eta \leq 1)$ および半平面 $\zeta(0 \leq \zeta \leq 2\pi)$ の交点

第1図 磁化構造物、焦点を C_1 および C_2 とする外接回転だ円体面ならびに磁界観測点 P_i の配置

Fig. 1. Arrangement of the magnetized object, a circumscribed spheroid whose foci are C_1 and C_2 , and points P_i 's for magnetic field measurement.

として表わされる。もし、点 P が構造物に外接する回転だ円体面の外側に存在していれば、そこでの磁位 ϕ は

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n Q_n(\xi) P_n(\eta) + \sum_{m=1}^n Q_n^m(\xi) P_n^m(\eta) (A_n^m \cos m\zeta + B_n^m \sin m\zeta) \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 n : 次数、 m : 位数、 A_n , A_n^m , B_n^m : 展開係数

のとおり回転だ円体関数によって展開され、級数は絶対収束する⁽⁵⁾。

なお、回転だ円体座標系は級数収束がなるべく速まるように設けることが望ましい。このためには、共焦点回転だ円体面群中に構造物の形状と比較的良好く一致するものを含ませるように、焦点位置を定めることが適当であろう。

さて、焦点位置を $x = \pm c$, $y = z = 0$ とする直角座標系 (x, y, z) を併せて設け、 ζ は z 軸から y 軸方向に向かって測るものとする、両座標間には

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2c} \left\{ \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2} \right\} \\ \eta &= \frac{1}{2c} \left\{ \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2} \right\} \\ \zeta &= \tan^{-1} \frac{y}{z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

の関係が存在する。

点 P における直角座標系での方向余弦を α, β および γ とする l 方向の磁界分力 f は、

$$\begin{aligned} f &= -\frac{\partial \phi}{\partial l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n G_n(\xi, \eta, \zeta) + \sum_{m=1}^n \{ A_n^m \times G_n^m(\xi, \eta, \zeta) + B_n^m H_n^m(\xi, \eta, \zeta) \} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (3)$$

の形式で表わされる。ただし、

$$\frac{\partial}{\partial l} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \dots\dots\dots (4)$$

の関係を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} G_n &= - \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\times \{ Q_n(\xi) P_n(\eta) \} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{G_n^m}{H_n^m} \right) = & - \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ & \times \left\{ Q_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \begin{pmatrix} \cos m\xi \\ \sin m\xi \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。 G_n, G_n^m および H_n^m は位置および磁界分力の関数となる。

3. 回転だ円体関数の次数, 位数の選択則

(1)式から認められるとおり, n 次の回転だ円体関数には位数 m が 0 から n までの $2n+1$ 個のものが含まれる。回転だ円体関数の発生しやすさ, あるいは外部磁界への寄与が次数, 位数によってどのように変化するかについて検討する。

まず, 次数について考える。 n 次, m 位の第 2 種ルジャンドル陪関数 $Q_n^m(\xi)$ は, ξ が十分大きくなると,

$$Q_n^m(\xi) \sim (-1)^m \frac{(n+m)!}{n! \sqrt{n}} \frac{\sqrt{\pi}}{(2\xi)^{n+1}} \quad \dots\dots (6)$$

により示される式に漸近する⁽⁶⁾。なお, $m=0$ の $Q_n^0(\xi)$ は $Q_n(\xi)$ に相当する。(6)式を (1) 式に代入すると, n 次の回転だ円体関数 $Q_n(\xi)P_n(\eta)$, $Q_n^m(\xi) \times P_n^m(\eta) \cos m\xi$ および $Q_n^m(\xi)P_n^m(\eta) \sin m\xi$ は, 距離 ξ が大きくなるといずれも ξ の $n+1$ 乗に反比例するようになることが認められる。すなわち, 傾向としては低次の関数ほど遠くにまで影響を及ぼし, また一定の位置で見ると低次の関数ほど優勢である。従って, 予想されたことながら, 次数については $n=1$ から順次高いものへと採用すべきである。

次に位数について検討する。最初に, 非常に細長い物体を想像しよう。このような物体が背景磁界によって磁化される場合, 内部の反磁界は長軸方向には極めて小さく, 反対に短軸方向には非常に大きい。すなわち, 長軸方向には磁化されやすく, これに比し短軸方向の磁化は無視できる。このため磁化は長軸方向を向き, 外部磁界あるいは磁位は長軸に関して対称となる。このことは (1) 式において 0 位の関数しか発生せず, 1 位以上のものを無視できることを示している。

第二に, 長, 短軸の長さがほぼ等しい球状の物体を想像しよう。これが磁化される場合, 反磁界の大きさはいずれの方向についても同程度であり, 磁化されやすさに方向性はないとみなしうる。いま印加磁界を一定とし, 座標軸の取り方を変え, n 次の関数中 m 位のものは様々の大きさで出現する。この状況はまた座標系が定まり, 印加磁界が変化する実際の場合と同等である。すなわち, n 次の関数中いずれの位数のも

のも出現しやすさは同等と判断され, 等しく考慮すべきである。結局, 球状の物体にあっては, 地磁気の球関数分析の場合と同様に最高位数は n に一致させ, n を順次大きく取っていくが必要になる。

以上二つの例は, 所要位数が物体の形状に強く依存し, 所要の位数対次数比が物体の太さ対長さの比に大きく関係することを示している。詳しく見れば, その様相は物体個々により, また同じ物体にあっては磁気状態によって変動しよう。しかし, 正規方程式条件の良好化を図る目的からすれば, 一般的傾向を知るのみで十分である。そこで, 上に示した両極端の例の間を直線近似することにする。

外部磁界に大きく寄与するのは付属品を除いた構造物の本体であるため, その長さを L , 幅および高さの最大値を D とするとき, 所要の位数対次数比 m/n が D/L に比例するものとする。実際には, とともに正の整数であるところの最高次数 N および最高位数 M を仮定して計算を実行していく必要がある。そこで, ガウスの記号 $[a]$ により a を越えない最大の整数を表わすこととし, この傾向を

$$M = \left[\frac{D}{L} N \right] + 1 \quad \dots\dots\dots (7)$$

により定式化する。(7)式は N を仮定したとき, M として $(D/L)N$ を切り上げた数値を採用することを意味している。一方, 位数 m が 0 および 1 の関数は, 最も基本となるところの磁気双極子による磁界に関係している⁽⁴⁾。(7)式によれば, ガウス記号内が 1 未満となった場合においても $M=1$ は保証され, 従って双極子磁界は常に考慮されることとなる。

(3)式の各項は, N を 1, 2, ... と増加させるときの N と, (7)式から求まる M とを次数および位数とするものの順に並べ替えられ, この順序に従って採用されることとなる。なお, N 次, M 位以下の展開係数個数 J は, (1)式から認められるとおり一定次数中 M 位以下の係数個数 $(2M+1)$ に N を乗じたものから, $M > N$ のため値を持ちえないところの個数, すなわち $M(M-1)$ を差し引いたものに等しく,

$$J = N(2M+1) - M(M-1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。

4. 磁界観測値からの磁気モデル決定

磁気モデルを決定することは, 第 1 図に示す外接回転だ円体面の外側の I 個の点 P_i ($i=1, 2, \dots, I$) 上で, 磁界分力 f_i を観測して得た F_i に最も良く当てはまるような, (3)式有限項の係数値を見いだすことである。この場合 (3)式各項は, 前章の方法により既に並

べ替えられていることはもちろんである。ここにおいて、観測値から係数値を求めるためには、どのような方法が適当であろうかという問題が生ずる。

そこで、まず観測誤差の検討から始めよう。磁界観測における誤差は、使用する磁力計の指示誤差、磁気検出器の位置誤差、観測すべき磁界分力に対する検出器の指向誤差、更には背景磁気雑音などから成る。これらの各個は、偶発的というよりはむしろ系統的に生じるとみなされるが環境条件によっても左右されるため、完全な補正は困難である。しかし、大きな原因について補正を施した後は小さな系統的誤差も多数寄り集まり、全体としては偶発的に生じするように見かけられる。また、磁気検出器の位置誤差、指向誤差など幾何学的なものも磁界に換算可能である。すなわち、大きな系統的誤差補正後は正規分布則に従う確率的な誤差のみ磁界観測値に含まれているとみなすことができる。

さて、以後述べるよう誤差が正規分布則に従っている場合、磁界が(3)式の有限項により完全に記述されたとすると、最小二乗法は最も確からしい係数値を与える。一般に、現実の磁界は有限級数では表わせないが、級数収束が速まっているため、ある程度以上の項による磁界は速やかに観測誤差のレベル以下に埋没してしまう。すなわち、磁界についてのこのような想定は現実の状況をかなり良く表わしている。このため磁気モデルの決定のためには、最小二乗法を適用することが妥当と判断される。

この有限項数を J_0 とし、観測点数 I はそれよりも十分大きいものとする。また、既に並べ替えられた(3)式の j 番目の項の係数および関数を、 A_j および G_j と表わす。まず、最初から j 番目の項まで考慮して最小二乗法を適用することとする。最小二乗法は観測の重み w_i 付き残差二乗和

$$\delta_j^2 = \sum_{i=1}^I w_i \left(F_i - \sum_{j=1}^J A_j G_j \right)^2 \dots\dots\dots (9)$$

を最小にすることを要求する。そのとき、 $\partial(\delta_j^2)/\partial A_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, J$) が満足されなければならないとの条件から

$$\begin{aligned} A_1 \sum_{i=1}^I w_i G_{1i} G_{ji} + A_2 \sum_{i=1}^I w_i G_{2i} G_{ji} + \dots \\ + A_j \sum_{i=1}^I w_i G_{ji} G_{ji} = \sum_{i=1}^I w_i F_i G_{ji} \\ (j=1, 2, \dots, J) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

なる正規方程式が得られる。(10)式においては、一般に左辺の A_j に関する係数行列式は零とはならず、また右辺の全項が零となることもないため、この連立方

程式にはただ一とおりの解が存在する。左辺係数逆行列の j 行 k 列要素を λ_{jk} と表わすと、解はクレーマの規則により

$$A_j = \sum_{k=1}^J \lambda_{jk} \left(\sum_{i=1}^I w_i F_i G_{ji} \right) \quad (j=1, 2, \dots, J) \dots\dots\dots (11)$$

と表わされる。ここで、(11)式から求まる A_j を用いて

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^I w_i \left(F_i - \sum_{j=1}^J A_j G_j \right)^2}{I - J} \dots\dots\dots (12)$$

なる量を考える。いま、たまたま J が J_0 に一致したものとし、このときの(12)式 σ_j を σ と表わす。すると、点 P_i における観測値 F_i の平均二乗誤差 σ_i は、

$$\sigma_i = \sigma / \sqrt{w_i} \dots\dots\dots (13)$$

により、また係数 A_j の平均二乗誤差 σ_{A_j} は、

$$\sigma_{A_j} = \sigma \sqrt{\lambda_{jj}} \dots\dots\dots (14)$$

によって、それぞれ推定できる⁽⁷⁾。(13)式は、また

$$w_i = (\sigma / \sigma_i)^2 \dots\dots\dots (15)$$

と書き換えることができる。すなわち、点 P_i における観測値の平均二乗誤差が元来 σ_i であった場合、重み w_i を(15)式により定めて最小二乗法を適用すると、(13)式のとおりの推定値は元来の値とちょうど一致する。つまり、磁界の当てはまりが最も妥当となり、係数についても最も確からしい値が得られたことになる。なお(15)式中の σ は、 σ_i と無次元である w_i とを関係づけている量にすぎないため、 σ_i と同次元の任意の値をあらかじめ選ぶう。

以上では、 J がたまたま未知の J_0 に一致した場合について論じた。もちろん、 J が J_0 に一致していなくても、 A_j の値は(11)式を用いて形式的には計算できる。しかし、少なくとも J が J_0 を下回っている限り正確な値の得られないのは当然のことである。 J_0 の値をあらかじめ知ることはできないが、観測誤差が正規分布則に従っていること、および有限級数を想定していることにより、次のようにして見いだすことができる。すなわち、 J を順次大きくして最小二乗法を適用していくと、当てはまりが段々良くなっていくため、(12)式による σ_j は次第に小さくなる。そして J が J_0 に一致した後は、一定値 σ に収束したまま変化しなくなる⁽⁸⁾。このことは、 J_0 を上回る項の係数値が、統計学的に見て零であることを意味する。このように、 J を変えていった場合の σ_j の収束状況から J_0 の値を見いだすことができる。

具体的には、まず最高次数 N を仮定し、これと(7)式による最高位数 M を用いて最小二乗法を適用

する。そして(8)式による J をも用いて、(12)式の σ_j を求める。 N を順次増しつつ σ_j の評価を行ない、これが一定値に収束したときの係数値を最確値として採用すればよい。

5. 磁気モデルの決定例

〈5・1〉 磁気源および観測条件 これまでに提示した方法の効果を確認するためには、真の状態がわかっている磁気源について、その外部磁界から磁気モデルを決定し、結果を対比してみることが適当と考えられる。磁化構造物としては全長46m、幅8.5m、喫水2.3m、基準排水量330tの木造船を取り上げる⁽⁹⁾。そして、この船が北向きに航行中の船体磁気を、次に示すような棒磁石の組合せに置き換えて単純化し、磁気源とみなす。木造船の船体磁気は、主機械、発電機など主要なう載品21個のみから発生するものとし、各う載品の磁化は、各中心に位置する長さ1mの棒磁石に置き換えることとした。この場合、我が国周辺における地磁気の方角に合せ、棒磁石はすべて船首方向から伏角45°で傾斜しているものとし、モーメントは各推定磁性材重量に比例するものとした。ここで、第1図と同様な船体中心線上、船首尾相当の位置を焦点とする回転だ円体座標系ならびに船首、右げんおよび下方向を各 x, y および z 軸正方向に一致させた直角座標系を設ける。すると、想定磁気源すなわち21本の棒磁石の中心位置およびモーメントは第1表のとおりを表わされる。

磁界観測は、第2図に示すように船体下方、その幅とほぼ等しい距離だけ中心線から隔たった水平面上、縦、横各等間隔に刻んだ格子点において、すべて鉛直分力について行なうものと想定した。観測範囲は、磁力計の一定レンジのみで測定可能なように、磁界がそ

第2図 木造船とう載の主要物体、回転だ円体面および磁界観測平面の配置

Fig. 2. Arrangement of the major objects aboard a wooden-hulled ship, a spheroid and a plane for magnetic field measurement.

の最大値のおおむね 1/10 に減衰するところまでとした。なお、磁界 f_i は第1表棒磁石の各磁極についてクーロンの法則を適用し、結果を合成することにより計算した。また、観測誤差としては数表から正規乱数を求め、標準偏差の期待値が通常のフラックスゲート形磁力計使用の場合と同程度に、すなわち観測範囲内磁界最大値の1%の大きさとなるよう調整した⁽¹⁰⁾。そして、前記の磁界計算値 f_i にこの観測誤差を加算して、磁界観測値 F_i とみなした。想定観測条件をまとめて第2表に示す。

なお第2図における回転だ円体面は、第1図とは異なり観測平面に接するように設けた。21個のとう載品はもちろんのこと、船体の大部分はこの回転だ円体面の内側に存在するため、外側の観測平面上の磁界が(3)式により表現されることは基本的に保証される。

第1表 棒磁石の位置および磁気モーメント

Table 1. Locations and magnetic moments of the bar magnets.

番号 k	中心の座標			磁気モーメント p_k (AT·m ²)
	x_k (m)	y_k (m)	z_k (m)	
1	19.0	0.0	-1.7	420
2	15.2	0.0	-5.1	88
3	1.5	1.1	0.4	138
4	1.5	-1.1	0.4	138
5	-0.8	1.1	0.1	163
6	-0.8	-1.1	0.1	163
7	-0.8	-3.0	0.4	42
8	-2.0	1.9	-1.1	48
9	-2.0	-1.9	-1.1	48
10	-3.0	-3.4	-2.3	34
11	-5.1	1.9	-1.0	48
12	-5.1	-1.9	-1.0	48
13	-5.8	1.2	0.4	202
14	-5.8	-1.2	0.4	202
15	-6.2	-1.4	-2.6	53
16	-7.6	2.2	0.1	33
17	-8.0	-2.2	0.1	33
18	-8.9	2.2	0.2	39
19	-9.3	-2.2	0.2	39
20	-12.9	-2.4	-0.5	141
21	-16.8	0.0	-2.5	89

第2表 想定観測条件

Table 2. Assumed conditions of observation.

項 目	記 事
深 度 z	9m
x 方向間隔 Δx	5m
x 方向範囲	-30~30m
y 方向間隔 Δy	3m
y 方向範囲	-9~9m
総観測点数 I	13×7=91
磁界分力	z (鉛直)
磁界誤差	標準偏差 σ が観測範囲内磁界最大値の1%

〈5・2〉 磁気モデルの決定 回転だ円体関数の係数は、磁荷 $\rho_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ の分布を基に

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2n+1}{4\pi c} \sum_k P_n(\xi_k) P_n(\eta_k) \rho_k \\ \left(\frac{A_n^m}{B_n^m} \right) &= \frac{2n+1}{2\pi c} (-1)^m \frac{\{(n-m)!\}^2}{\{(n+m)!\}} \\ &\times \sum_k P_n^m(\xi_k) P_n^m(\eta_k) \left(\frac{\cos m \zeta_k}{\sin m \zeta_k} \right) \rho_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

第3表 棒磁石配列による回転だ円体関数係数の真の値と最小二乗法による推定値との比較 (1/4 π AT単位)

Table 3. Prolate spheroidal harmonic coefficients of the bar magnets configuration in 1/4 π AT, in comparison with the values by the method of least squares.

係数名	真の値	推定値		備考*
		係数	平均二乗誤差	
A_1	9.0	9.3	1.1	○
A_2	2.0	0.8	2.4	○
A_3	4.5	-6.0	6.1	○
A_4	44.1	36.7	13.1	○
A_5	36.2	39.0	28.0	○
A_6	-15.9	18.1	34.9	○
A_7	-56.3	-11.1	23.5	○
A_8	-45.9	—	—	×
A_1^1	-4.52	-4.58	0.09	○
A_2^1	0.02	0.54	0.55	○
A_3^1	0.14	0.14	0.60	○
A_4^1	-0.83	-1.94	0.79	○
A_5^1	0.04	-1.10	1.06	○
A_6^1	1.43	0.34	1.07	○
A_7^1	1.47	1.43	0.47	○
A_8^1	-0.03	—	—	—
A_2^2	-0.029	-0.029	0.004	○
A_3^2	-0.017	0.004	0.010	○
A_4^2	-0.019	-0.009	0.008	○
A_5^2	-0.006	-0.011	0.009	○
A_6^2	-0.003	-0.009	0.006	○
A_7^2	0.003	-0.005	0.003	○
A_8^2	0.005	—	—	—
A_3^3	-0.00004	—	—	—
A_4^3	-0.00018	—	—	—
A_5^3	-0.00012	—	—	—
A_6^3	-0.00003	—	—	—
A_7^3	-0.00002	—	—	—
A_8^3	0.00001	—	—	—
B_1^1	0.00	0.23	0.12	○
B_2^1	0.10	0.14	0.14	○
B_3^1	-0.12	-0.05	0.20	○
B_4^1	0.03	0.26	0.23	○
B_5^1	0.06	-0.25	0.26	○
B_6^1	-0.07	-0.36	0.39	○
B_7^1	0.09	-0.17	0.35	○
B_8^1	-0.08	—	—	—
B_2^2	-0.012	-0.001	0.005	○
B_3^2	0.007	0.005	0.005	○
B_4^2	-0.002	0.003	0.005	○
B_5^2	-0.001	0.002	0.004	○
B_6^2	0.001	0.001	0.005	○
B_7^2	-0.001	-0.004	0.003	○
B_8^2	0.000	—	—	—
B_3^3	-0.00006	—	—	—
B_4^3	-0.00002	—	—	—
B_5^3	0.00000	—	—	—
B_6^3	-0.00001	—	—	—
B_7^3	0.00000	—	—	—
B_8^3	0.00000	—	—	—

*: 推定係数値の上下, 平均二乗誤差範囲内に真の値の存在する場合に○印, その他は×印

により直接計算できる⁽⁵⁾。(16)式による係数値は、磁荷分布が定まれば確定するので、真の値と呼ぶことにする。第1表の棒磁石配置を基として、 $n=8, m=3$ までの係数値を(16)式により計算し、第3表中真の値として示す。

次に、第2表の条件下で得られた磁界観測値 F_i から回転だ円体関数係数を求める。既に、いずれの観測位置においても誤差の標準偏差 σ_i 一定とみなしているため、これを σ と置く。すると、(15)式により重み w_i はすべて1となる。さて、構造物本体の長さ L および太さ D としては、船体の長さおよび幅を選ぶことが適当と考えられる。そこで、 $L=46\text{m}, D=8.5\text{m}$ とし、最高次数 N を1から8まで1おきに高め、(7)式により対応する最高位数 M を定めて順次最小二乗法を適用した。 N および M の変化に伴う(12)式 σ_J/σ の推移を第3図に示す。この図から、 σ_J/σ は $N=6, M=2$ 以降ほぼ1に収束、すなわち観測誤差の推定値が本来の値に一致することが認められる。そこで、 $N=7, M=2$ における値を採用することとし、推定係数値および(14)式によるその推定平均二乗誤差を第3表に示す。

〈5・3〉 考察 第3表によると、七次2位以下の係数33個中22個については、その推定値に各推定平均二乗誤差を加減した範囲内に真の値が存在している。その割合、すなわち22/33は平均および標準偏差を各 μ, σ とする正規分布において、 $\mu \pm \sigma$ の範囲内に

第3図 回転だ円体関数の次数 N および位数 M による σ_J/σ の推移

Fig. 3. Dependence of σ_J/σ on the degree N and the order M of spherical harmonics.

第4表 観測面 ($z=9\text{m}$) 上における $n=8$, $m=3$ までの回転だ円体関数による各磁界鉛直分力最大値と総合磁界のそれとの比

Table 4. Ratios of the vertical field strengths by each spheroidal harmonic up to $n=8$ and $m=3$ to the total vertical field upon the observation plane, $z=9\text{m}$.

$n \backslash m$	0	1	2	3
1	0.2	0.6	—	—
2	0.0	0.0	0.1	—
3	0.0	0.0	0.1	0.1
4	0.3	0.1	0.2	0.1
5	0.1	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.2	0.0	0.0
7	0.1	0.2	0.0	0.0
8	0.1	0.0	0.1	0.0

資料が存在する確率の期待値 0.6827 に非常に近い。すなわち、この例における磁界は、実質的には $N=7$, $M=2$ で打ち切られている磁界と同等となる。

ちなみに、第3表係数真の値および(5)式を用いて観測範囲内の各次数、位数に対応する磁界最大値を計算し、クーロンの法則により計算した総合磁界の最大値との比によって示すと第4表のとおりとなる。この表から、船体が細長いことより低位の磁界成分が顕著である傾向がはっきり認められ、次数、位数選択則の有効性を直観的に理解できる。

なお、級数収束がより速い場合には高次、高位の項を考慮しなくても済むため、正規方程式の条件はより良好化する。このため、係数値の平均二乗誤差の推定値も小さくなり、磁気モデルの精度は高くなる。現実の木造船においては、この例で考慮した品目以外に、数多くの小さなとう載品が存在する。これらは、磁界を平滑化するため級数収束を速め、磁気モデルの精度を高める効果を有する。

ところで、次数、位数選択則を用いず、(3)式どおり $N=M$ として同じ例に最小二乗法を同様に適用した場合、正規方程式の条件は急激に悪化していった。そして、いまだ σ_1/σ が1に到達しない、 $N=6$ での計算途中、使用していた同一計算機にあふれが発生し続行不可能となった。

6. 結 言

回転だ円体関数を用いて磁化構造物の磁界を展開するに際し、外部磁界への影響度あるいは磁氣的発生しやすさに従って級数各項を並べ替えると収束は非常に速まる。従って、誤差が正規分布則に従う通常の磁界観測に基づいては、最小二乗法の適用により磁気モデル決定が可能となる。

外部磁界への影響度の傾向を、構造物本体寸法に応ずる関数の次数、位数選択則によって一般化すると、最小二乗法適用による磁気モデル決定の手順は定形化される。また、正規方程式の条件も良好化に転ずるため測定容易な位置、分力を選んだ磁界観測に基づいても精度の高い磁気モデル決定を期待できる。

磁気モデルの精度は、観測位置における磁界の複雑さ、言い替えると、その位置での級数収束性および構造物から見た観測範囲の広がり、あるいは立体角に特に大きく関係する。例えば、磁界が複雑であるところの至近距離で観測を行なう場合には、観測範囲の広がりがある程度以上大きく取らないと、所要の精度を期待できないこともありうる。あらかじめ、既に示した手順に従って計算を試行し、正規方程式の条件および磁気モデルの精度を吟味のうえ観測計画を立案することが重要である。

最後に、本研究の実施にあたり、終始懇篤な御指導を賜った京都大学工学部板谷良平教授に深く感謝し、有益な助言をいただいた、本校応用物理学教室義井胤景教授に厚くお礼申し上げる。

(昭和54年10月8日受付、同55年8月7日再受付)

文 献

- (1) 森：電学論 A, 98, 475 (昭 53-9)
- (2) T. N. Roy: *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-13, 914 (1977)
- (3) 竹田・錦織：防衛大学校理工学研究報告, 11, 239 (昭48-9)
- (4) A. Ralston & P. Rabinowitz: *A First Course in Numerical Analysis*, p. 412 (1978) McGraw-Hill
- (5) 森：防衛庁技術研究本部技報, 技-507 (昭 47-8)
- (6) 森口・宇田川・一松：数学公式Ⅲ, p. 135 (昭 44) 岩波書店
- (7) 一瀬：誤差論, p. 34 (昭 53) 培風館
- (8) A. Ralston & P. Rabinowitz: *A First Course in Numerical Analysis*, p. 253 (1978) McGraw-Hill
- (9) J. Moore: *Jane's Fighting Ships 1979-80*, p. 303 (1979) Jane's Yearbooks
- (10) 山内：簡約統計数値表, p. 114 (昭 52) 日本規格協会