非対称長方形磁極による磁界の解析, 特に空げき中心部の均一度について

正 員 伴 悦 夫 (日本電子)

1. ま え が き

長方形の磁極による磁界については、その構造が簡単であること、また直径対空げき長比が比較的大きな円筒形の磁極を用いる通常の研究用磁石の磁界に対する近似として、等角写像法によって取扱う研究が幾つか報告されている⁽¹⁾⁽²⁾。高い均一度を必要とする研究用磁石では、磁界の強さと共に空げき中心付近の小さな領域での分布が重要な問題となるが、前掲論文においては、いずれも計算の簡化のために対向する磁極の完全な対称性が仮定されており、実際上問題になる磁極の幅の差異、あるいは偏心による分布の変化は考慮されていない。

本論文においては、極面が平行になるように配置された二つの長方形の磁極による磁界を統一的に取扱ひ、上記の効果を理論的に明らかにする。なお、例えば幅の異なる磁極を同心に配置することにより、軸方向に所要のこう配を作るような磁石を、本論文の諸結果より検討することも可能であることはいうまでもない。

次に本論文において対象とするような、物理あるいは化学実験に用いられる磁石における磁界の均一度について若干述べる。これらの実験においては、通常数 cm^2 以下の被験試料が空げき中心に置かれるが、試料内の均一度は実験の内容と要求される精度によって与えられる。例えば、強磁性、半導体などの一般の物性実験では $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度が、電子スピン共鳴、広幅な核磁気共鳴などでは $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 程度が要求される。また、主として有機物の液体を対象とする高分解の核

磁気共鳴は 10^{-8} 程度以上であり、このような極度に高い均一度は電流シムの技術を併用することによってのみ実現しうる⁽³⁾。

この種の磁石における磁極の偏心による分布の変化の実測例は、例えば津野氏による報告⁽⁴⁾に示されている。本論文による理論は最も単純なモデル化によるものであり、数値的に比較し得る実験データではないが、異径および偏心の効果の数値的概念を与える一つの例と考えられるので、それらの結果についても若干の考察を加えた。併せて本論文の背景となる二、三の事項についても簡単にふれてある。

2. 理論式の導出

〈2・1〉 磁極面の写像関数 図1に本論文で対象とする磁極の形状を示す。相対向する N および S 極の極面はそれぞれ $A-O-E-D$ 面、 $A-B-C-D$ 面で、それぞれ $\pm y$ 方向に半無限に、また紙面に垂直な方向に無限に広がっているとする。空げきに面する $O-E$ および $B-C$ 面はともに x 軸に平行に配置されている。また両側面 $A-O, E-D, A-B, C-D$ はいずれも y 軸に平行であり、従って四つの縁端点 O, E, B, C 点での縁端角はいずれも直角である。図示のように空げき長を単位として両極の幅 l, m および両者のずれ n を与える。 $x-y$ 面を z 面として、いま $O, A, B, C,$

図 1 平行に置かれた一般の長方形磁極

Fig. 1. General rectangular poles placed in parallel.

An Analysis of the Magnetic Field Produced by the Unsymmetrical Rectangular Poles, Especially on the Homogeneity at the Central Region of Air Gap. By *Etsuo Ban*, Member (Technical & Engineering Division, JEOL Ltd.).
伴 悦夫: 正員, (株)日本電子技術本部

D, E の各点を媒介平面 t の実軸上の値 $0, sn^2 b, 1, 1/k^2, 1/k^2 sn^2 a, \infty$ に対応させればシュワルツ-クリストッフ変換により⁽⁵⁾,

$$\frac{dz}{dt} = C_1 \frac{\sqrt{t(t-1)(t-1/k^2)}}{(t-sn^2 b)(t-1/k^2 sn^2 a)^2} \dots\dots\dots (1)$$

となる。以下、本論文にて使用するヤコビのだ円関数については付録(I)を参照されたい。なお、上式中の a, b は Π 関数のパラメータである。

(1)式は媒介変数 ζ を

$$t = sn^2 \zeta \dots\dots\dots (2)$$

なる変換によって与えれば、以下のようにして ζ について積分できる。まず、(2)式を微分して

$$dt = 2sn\zeta cn\zeta dn\zeta d\zeta$$

sn 関数などの公式を用いて、(1)式を ζ の関数として表わせば

$$dz = \frac{2C_1}{k} f(\zeta) d\zeta \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $f(\zeta)$ は

$$f(\zeta) = \frac{sn^2 \zeta cn^2 \zeta dn^2 \zeta}{(sn^2 \zeta - sn^2 b)^2 (sn^2 \zeta - 1/k^2 sn^2 a)^2} \dots\dots\dots (4)$$

である。 $f(\zeta)$ を次のように四つの部分分数項に展開する。

$$f_1(\zeta) = g_0 \{g_1 f_1(\zeta) + g_2 f_2(\zeta) + g_3 f_3(\zeta) + g_4 f_4(\zeta)\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、定係数 $g_0 \sim g_4$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \left(\frac{k^2 sn^2 a}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 b} \right)^2 \\ g_1 &= \frac{k^2 sn^2 a (1 + k^2 sn^2 a sn^2 b)}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 b} \\ g_2 &= -\frac{1 + k^2 sn^2 a sn^2 b}{sn^2 b (1 - k^2 sn^2 a sn^2 b)} \\ g_3 &= k^2 sn^2 a \\ g_4 &= 1/sn^2 b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

である。また、各部分項 $f_1(\zeta) \sim f_4(\zeta)$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} f_1(\zeta) &= \frac{cn^2 \zeta dn^2 \zeta}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 \zeta} \\ f_2(\zeta) &= \frac{cn^2 \zeta dn^2 \zeta}{1 - sn^2 \zeta / sn^2 b} \\ f_3(\zeta) &= \frac{cn^2 \zeta dn^2 \zeta}{(1 - k^2 sn^2 a sn^2 \zeta)^2} \\ f_4(\zeta) &= \frac{cn^2 \zeta dn^2 \zeta}{(1 - sn^2 \zeta / sn^2 b)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。(7)式の四つの関数の積分 $I_1 \sim I_4$ については付録(II)を参照されたい。

以上の諸式を整理して、(3)式の積分は

$$z = \frac{2C_1 M}{k} \left\{ A_0 \zeta + E(\zeta) + A_1 \Pi(\zeta, a) + A_2 \Pi(\zeta, b + iK') - \frac{k^2 sn^2 a sn \zeta cn \zeta dn \zeta}{2(1 - k^2 sn^2 a sn^2 \zeta)} - \frac{sn \zeta cn \zeta dn \zeta}{2(sn^2 b - sn^2 \zeta)} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。ただし、 $z_{\zeta=0} = 0$ であるので積分定数は0である。(8)式中の定係数は

$$\left. \begin{aligned} M &= - \left(\frac{k^2 sn^2 a}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 b} \right)^2 \\ A_0 &= (cs^2 b - dn^2 a)/2 \\ A_1 &= sc ad na + cs anda - csad na \\ &\quad \times \frac{1 + k^2 sn^2 a sn^2 b}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 b} \\ A_2 &= sc bd nb + cs bndb - csbd nb \\ &\quad \times \frac{1 + k^2 sn^2 a sn^2 b}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。なお、(8)式の係数 C_1 は以下のようにして得られる。媒介変数 ζ 平面は図2のように原像 z 平面(図1)と対応している。従って、 E 点すなわち、 $\zeta = iK'$ において z が実数であることから $C_1 M$ は虚数である。次に、 B 点すなわち $\zeta = K$ において $z = n - i$ であることから、(8)式より

$$n - i = \frac{2C_1 M}{k} \{ E + K \{ A_0 + A_1 Z(a) + A_2 Z(b + iK') \} \} \dots\dots\dots (10)$$

これから

$$f = E + K \{ A_0 + A_1 Z(a) + A_2 \{ Z(b) + cs bdn b \} \} \dots\dots\dots (11)$$

として

$$C_1 = -ik/2 f M \dots\dots\dots (12)$$

をうる。また、(10)式の実部から

$$n = -\pi A_2/2 f \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。同様にして、 C 点 $\zeta = K + iK'$ および E 点 $\zeta = iK'$ での z の値 $z_C = n + m - i, z_E = l$ から付録(I)に示す Π, E 関数の公式を用いて

$$m = \frac{K'}{K} + \frac{\pi}{2Kf} (A_1 a + A_2 b - 1) \dots\dots\dots (14)$$

図2 図1の磁極に対する媒介 ζ -面
Fig. 2. Parametric ζ -plane for the poles shown in Fig. 1.

図3 図1の磁極に対する複素磁位面
Fig. 3. Complex potential plane for the poles shown in Fig. 1.

$$l = m - \frac{\pi}{2f}(A_1 + A_2) \dots\dots\dots (15)$$

を得る。なお、ここで $E(iK')$ の値は ∞ となるが、次式の極限值

$$\lim_{\zeta \rightarrow iK'} \{E(\zeta) + cs\zeta \frac{dn\zeta}{d\zeta}\} = i(K' - E')$$

が有限になることを用いている。また Π 関数の符号は今の場合の写像条件に適合するほうをとっている。

以上により、図1の磁極の形状 l, m, n および ζ を媒介変数とする原像の表現がすべて得られた。

〈2・2〉複素磁界と複素磁位の写像関数 次に、複素磁界 $H = H_x + iH_y$ の ζ による表現をうるために、複素磁位 $W = U + iV$ を図3のように、すなわち図1の上方の極を単位正磁位に、下方の極を零磁位にとる。

$$\frac{dW}{dt} = \frac{C_3}{(t - sn^2b)(t - 1/k^2sn^2a)} \dots\dots\dots (16)$$

なる変換式により、 H は

$$H = \mathcal{K}[i dW/dz] \\ = \mathcal{K}[i(dW/dt)(dt/dz)] \dots\dots\dots (17)$$

で与えられるから⁽⁵⁾、(1)、(16)式を用いて

$$H = \frac{-2f}{\pi(1 - k^2sn^2asn^2b)} \\ \times \mathcal{K}\left[\frac{(sn^2b - sn^2\zeta)(1 - k^2sn^2asn^2\zeta)}{sn\zeta cn\zeta dn\zeta}\right] \dots\dots\dots (18)$$

となる。

次に、複素磁位 W は(16)式を t について直接積分してから、(2)式によって ζ の関数として表わせば

$$W = \frac{1}{\pi} \ln \frac{sn^2\zeta - sn^2b}{sn^2b(1 - k^2sn^2asn^2\zeta)} \dots\dots\dots (19)$$

となる。上式より四つの縁端点 O, B, C, E 点の磁位は

$$\left. \begin{aligned} W_O &= i \\ W_B &= (2/\pi) \ln(csbn da) \\ W_C &= (2/\pi) \ln(dsbn ca/k) \\ W_E &= i - (2/\pi) \ln(ksnbsna) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

となる。以上の諸結果より、 ζ を媒介変数として磁極

(a) 齊一な場合 (b) 異幅の場合 (c) 偏心の場合

図4 三つの対称的な場合の磁極の配置

Fig. 4. Pole configurations for three symmetric cases.

間の空間の任意の点での、磁位と磁界を求めることができる。

〈2・3〉特殊な三つの場合の条件と代表的な3点における磁界 次に、本論文での主題である両極の幅が異なる場合あるいは偏心の場合を、同心で幅の等しい場合との比較で示す。

(1) 幅の等しい磁極が同心に置かれている場合

この場合の分布は、与えられた磁極幅/空けき長比における「固有の分布」であり、わずかに偏心している場合、あるいは幅がわずかに異なっている場合に付加される不均一は、この「固有の分布」を基準としてとることになる。図4(a)から、この場合 $n=0$ 、 $l=m$ だから、(13)式により $A_2=0$ 、また(15)式により $A_1=0$ となる。また(9)式により A_0 も0になり、 $a=b=K/2$ の条件が得られる。また、(11)式から $f=E$ となり、(14)式から $l=m$ は

$$l = \frac{K'}{K} - \frac{\pi}{2KE} = \frac{1}{E}(K' - E') \dots\dots\dots (21)$$

となる。これは一つの定数、すなわち母数 k のみの関数である。(21)式は対称性により、図1の第1象限のみを写像して得られる結果⁽²⁾と一致する。

次に、本節で扱う三つの場合は、いずれも空けきの中心に関してなんらかの対称性をもっているが、次の3点すなわち(図4参照)

OE 極面上の $\zeta = iK'/2$ の F 点

空けき中央の $\zeta = (K + iK')/2$ の H 点

BC 極面上の $\zeta = K + iK'/2$ の G 点

はそれぞれ対称面内にある代表的な点である。

いまの場合、これらの ζ に対する関数値^{(6)~(9)}を用いて(18)式により計算すれば

$$\left. \begin{aligned} H_F &= -i2E/\pi k' \\ H_H &= -i2E/\pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

となる。これらも既知の結果⁽²⁾と一致する。なお(21)式から $k'=1, 0$ はそれぞれ $l=\infty, 0$ の極限の場合になり、上式から物理的に予想されるように、それぞれ $H_F = H_H = -i$ (垂直下方に向いている単位の一様な磁界である) および

表 1 三つの対称的な場合の代表的な 3 点の磁界

Table 1. Magnetic fields at special three points for the three symmetrical cases shown in Fig. 4.

	条 件	H_F/H^0	H_H/H^0	H_G/H^0
(a)	$a=b=K/2$	$i\{2/(1+k')\}$	$i\{2k'/(1+k')\}$	$=H_F/H^0$
(b)	$a=b$	$i\{(1+k \operatorname{sn}^2 b)^2/(1+k)\}$	$i\{(dn^2 b - k^2 \operatorname{sn}^2 b \operatorname{cn}^2 b)/k'\}$	$i\{(1-k \operatorname{sn}^2 b)^2/(1-k)\}$
(c)	$a=K-b$	$i(1-k^2 \operatorname{sn}^4 b)/dn^2 b$	$\{k(\operatorname{sn}^2 b dn^2 b - \operatorname{cn}^2 b) + ik'(1-k^2 \operatorname{sn}^4 b)\}/dn^2 b$	$=H_F/H^0$

ただし, $H^0 = -(2/\pi)\{f/(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b)\}$, $f=(11)$ 式

$$H_F = \infty, H_H = -2i/\pi$$

を与える。これらは、それぞれ無限に広がった面どうしの間の様な磁界、および無限に広がった S 極に対し、無限少に薄い N 極の面が相対している場合である。

(2) 幅の異なる極が同心に置かれている場合

このときには図 4 (b) から $l=m+2n$ の関係があり、(13)式と(15)式によって

$$m-l = \frac{\pi}{2f}(A_1+A_2) = \frac{\pi}{f}A_2$$

これから $A_1=A_2$, (9)式により $a=b$ なる条件が得られる。

(3) 幅の等しい極が偏心して置かれている場合

このときは $l=m$ から(15)式によって $A_1=-A_2$ となる。これから $b=K-a$ なる条件が得られる。

各点の磁界はこれらの条件を用いて A_0, A_1, A_2 の値を求め、これらから(11)式によって f を求め、(18)式によってそれぞれの点の ζ の値から計算される。これらをそれぞれの場合の(18)式の定数係数値 (H^0) に対する比として表 1 にまとめて示す。いずれの場合にも、 F, G 点での値が純虚数であることは、磁界が極面に垂直(この場合 y 方向)であることを示している。また、(3)項の場合の H 点(中心点)での値が複素数であることは、この点での磁界が中心軸に対して傾斜していることを示しているが、これが偏心による結果であることはいうまでもない。

3. 数値計算結果と考察

前章において、本解析に必要な諸式とそれらより導かれる幾つかの結論が得られたが、本論文においては第 1 章で述べたように 10^{-5} のけたの現象を対象としているので、座標 z 、磁極の形状 l, m, n 、磁界 H の数値計算の精度はいずれも少なくとも 10^{-6} 以上を必要とする。

具体的な結果を示すまえに、この点について若干ふれておく。後述するように本論文で対象とするような磁石では、前章の諸式に用いられているだ円関数の母数 k^2 は 10^{-4} より小さい範囲にある。数値計算には通

常用いられているように、だ円諸関数の計算にはすべて収束の極めて良いだ円 θ 関数の三角級数を使っている。このときのノルム q の計算は春日谷氏の数値表⁽¹⁰⁾の級数によった。ヤコビの諸関数 (sn 関数など)の精度には全然問題はないが、 Π 関数には sn 関数などの対数が含まれるので、無限遠点に漸近する際に精度が落ちてくることがあるので注意を要するが、本論文で与えられている範囲では、十分な精度が確保されていることが確認されている。だ円関数には大量の公式が与えられているので⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾、特定な点での精度のチェックは容易に行なうことができる。

本章では〈2・3〉節で述べた三つの場合について数値計算結果とそれらに対する考察を述べる。

第 1 章で述べた観点より、両極の幅がわずかに異なる場合〔〈2・3〉節(2)項、以下、異幅の場合と略記〕、あるいは両極がわずかに偏心している場合〔〈2・3〉節(3)項、以下、偏心の場合と略記〕を同幅、同心〔〈2・3〉節(1)項の場合〕の場合と比較しながら示す。ここで、両者をそれぞれに分離した形で与えたのは、微少な範囲ではこれらによる不均一が重ね合わさって生ずるだろうと思われること、また不均一の形が単純で直観的になる利点があるためである。

さて、〈2・3〉節で述べたように、これらの場合の中心点はいずれも $\zeta=(K+iK')/2$ の点にある。また、両極の不斉一がわずかであることから a, b はいずれも $K/2$ の近くにある。いま斉一な磁極〔ここでは、同じ幅の極が同心になっている場合；〈2・3〉節(1)項の場合のことを言う〕の場合を(21)式により計算すると、母数の自乗 k^2 (通常、この形で値が与えられることが多い) が 10^{-4} のとき $l \approx 3.18$ となる。円筒形の極を用いる磁石での実際の経験によれば、この値に相当する磁極径と空けき長の比は (10^{-4} 程度の均一度の場合には) 3 以上を必要とする。従って、 k^2 は 10^{-4} より小さな値をとる。なお、以下においては原点を空けきの中心点に移した $X-Y$ 座標系によって図示している。

図 5、図 6 に上記の母数に対する Y および X 軸上の磁界分布を示す。対称性により、いずれも Y 成

図 5 完全対称な長方形磁極による磁界の軸上の分布

Fig. 5. Magnetic field distribution along pole axis produced by completely symmetric rectangular poles.

図 6 完全対称な長方形磁極による磁界の中心面内の分布

Fig. 6. Magnetic field distribution in median plane produced by completely symmetric rectangular poles.

図 7 完全対称な長方形磁極による磁界のマップ

Fig. 7. Magnetic field map produced by the completely symmetric rectangular poles.

分のみである。

次に、図 7 に中心付近の X - Y 面内の Y 成分磁界のマップを示す。これらの分布は、前述したようにこの磁極系で得られる“固有の分布”とみなすことができる。これに対し以下に示す〈2・3〉節(2)、(3)項の場合、すなわち磁極の幅の異なること、あるいは両極が偏心していることから生ずる分布の変化は、機械的な不斉さ(精度の不足)による“付加的な不均一”と考

図 8 同心で幅の異なる長方形磁極による磁界のマップ

Fig. 8. Magnetic field map produced by the concentric rectangular poles of different widths.

図 9 同心で幅の異なる長方形磁極による軸上の磁界の分布

Fig. 9. Magnetic field distribution along pole axis produced by the concentric rectangular poles of different widths.

えられる⁽⁴⁾。上記の場合、固有の均一度は $|X|, |Y| \leq 0.1$ において 5×10^{-6} 程度である。

次に、 $a=b=(1+\varepsilon)K/2$ として、幅がわずかに異なるときを調べる。 $\varepsilon=10^{-2}$ でのマップを図 8 に、またこのときの Y 軸上の分布を図 9 に示す。幅の差は $l-m \approx 0.0314$ 程度であるが、このときの分布は“固有の分布”とは全く異なり、 $|Y| \leq 0.1$ において 10^{-4} 程度の Y 方向への直線こう配が支配的になっている。

図 10 に $\varepsilon=0$ (斉一な場合)、 10^{-4} 、 10^{-3} での Y 軸上の分布を示す。これらにより、この場合の“固有の分布”を損なわないためには、異幅度 (幅の差 $l-m$) を 3×10^{-4} 程度以下に抑える必要があることがわかる。

次に、 $a=(1-\varepsilon)K/2$ 、 $b=(1+\varepsilon)K/2$ として $\varepsilon=10^{-2}$ の偏心の場合のマップを図 11 に示す。これによれば、“固有の分布”を原点を中心に約 20° 反時計方向に回転した形になっている。Tsuno 氏⁽⁴⁾によれば、偏心によりマップの中心の移動と回転の二つの効果が

(a) $l=m=3.17765$, (b) $l=3.17749, m=3.17781$
(c) $l=3.17608, m=3.17922$

図 10 同心で磁極幅がわずかに異なる
長方形磁極による軸上の磁界の分布

Fig. 10. Magnetic field distribution along pole axis produced by the concentric rectangular poles of different widths.

$l=3.17781, n=0.0157$

図 11 幅の同じ長方形磁極が偏心している
場合の磁界のマップ

Fig. 11. Magnetic field map produced by the eccentric rectangular poles of same widths.

指摘されているが、ここで扱っているモデルでは対称点、すなわち図 4 (c) の H 点を中心として回転することは明らかであり、測定されている中心面から上方への移動は何らかの他の原因が重なっていることによるものであろう。回転についての観測値は約 20° で、マップの変化は定性的には本論文の理論によって良く説明されていると思われるが、前述のように基本的な条件がかなり異なっているので、定量的な比較が論じられる対象ではない。ここでは、高均一度磁石の分布の実測例として示した。なお、本計算例の偏心量 ($n/2$) は 0.008 (実測例では 0.024) であるが、このような微細な不斉により大きな回転が起きることは必ずしも直観的でなく、注目に値すると思われる。

いずれにしても、偏心の結果、津野氏も指摘するように大きな XY 成分の不斉が付加されることになる。いまの場合、“固有の分布”を損なわないためには偏心度を 10^{-3} 以下に抑える必要がある。これは異幅度に対する上記の要求より 1 けた低いようであるが、偏心時には $X=0$ の面内でも (斉一あるいは異幅の場合には存在しない) 磁界の X 成分が発生しており、

$l=m=3.17765$

図 12 完全対称な長方形磁極の側面に
沿っての磁界の分布

Fig. 12. Magnetic field distribution along side plane of completely symmetric rectangular poles.

$l=m=3.17765$

図 13 完全対称な長方形磁極の先端面
に沿っての磁界の分布

Fig. 13. Magnetic field distribution along top face of completely symmetric rectangular poles.

その量はいまの場合 ($\epsilon=10^{-3}$ で) 1.57×10^{-6} になる。この量は磁力線の曲がりの度合いを示すが、これを目安としてとれば、 10^{-6} のけたの均一度に対しては異幅度と同程度、すなわち 10^{-4} のけたが要求される。

なお、ここで注意を要することは、本論文での取扱いは平面問題であり、軸付近に関しては軸対称の場合とは異なることである。例えば、完全な軸対称における原点での磁界の軸および径方向の二次の偏微分係数の間には、周知のように

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}$$

の関係がある。平面問題では右辺の数係数は -1 になるが、これは図 5、図 6 の結果に現われている。

次に、斉一な場合の極面すなわち図 1 の OA および OE 面に沿っての磁界の変化を図 12、図 13 に示す。縁端点 O 点は数学的な意味での特異点であって、いまの場合のモデルでは図示のように無限大になる。例えば、高電界ではこのような先端をもつ電極は当然、放電を発生し使用しえないことはいままでのないが、磁界においてはこれらの点の付近は他の平坦など

ころより先に局所的に飽和し始め（磁気抵抗が生じてくるので）、等磁位面が変化してくることになる。電界とは異なり、このことは特別な不都合を生ずることにはならないが、本論文で扱ったような高均一な磁石では、中心付近の分布に対して無視しえない影響を与える⁽¹¹⁾。このことから、上記のような極面上の磁界の様子を知ることが必要であり、磁極においても必要に応じて縁端点を丸めている。

次に、本論文の主題からは離れるが、実際上の問題について若干ふれる。前述のように現実の研究用磁石は、主として加工が容易で精度が出しやすいために軸対称形（円筒あるいは円すい筒のような）の極を用いており、本論文とは座標系が異なる。本論文でのような平面問題では極の奥行き方向の有限性が近似条件となるが、座標の対称性から有限な角柱磁極については、中心付近では Y 方向への変化と同様に考えればよい。すなわち、問題とする領域において必要な均一度を得られるような極の幅より奥行きを長くとればよい。

他方、上記のような軸対称形の極に対する近似と考える場合には、空げき長に対する径の大きさが条件となる⁽¹²⁾。このときには、前述のように中心付近で両座標系による結果は異なる。

次に、不均一の他の一つの原因として両極の不平行がある。これは経験によれば、平行度の一次までとれば通常十分である。測定の精度に留意すれば極の接統面に適当なスペーサをそう入するか、あるいは取付けボルトの調節で比較的容易に消去しうるものである⁽⁴⁾。いずれにしても“固有の均一度”を損なわないためには、試料の範囲で必要な均一度と同程度の平行度を必要とする。

次に、電流による磁界の成分についてふれる。この成分による影響を考えること自体は、極を等磁位面とするスカラー磁位表現の立場を離れることになり、本論文の立場とは異なるわけであるが、実際には空げき中心に対してコイルは十分遠いところにあり、単なる起磁力としての役割をもつのみで、均一度に影響することは特殊な場合を除きほとんどない。一見、電流の効果と思われるのは、主に磁化の変化による間接的なものである（前述の局所飽和効果のような）ことが多い。

以上、本論文の背景として簡単にふれた事柄は、いずれも実際的、経験的に処理されており、理論解析には多くの困難がある。本論文の主題は、前にも述べたように極めて理想化された（ z 方向に無限に広がっている、透磁率が無限大であるなど）モデル化によって

可能となった厳密な解析表現を示し、一見して非常に困難な対象と思われる極めて高い均一磁界を要する研究用磁石に対する一つのアプローチを提示することになった。この観点より、実際上の例を示してあるが、本論文の理論の実証あるいは限界の確認を意図したものではないので、詳しく論ずることは別の機会にゆずりたい。

なお、周知のように磁界の問題を基礎方程式の離散化によって（差分法あるいは有限要素法）数値的に解く方法が非常に発達しているが、本論文で扱ったような精度を得ることは事実上不可能と思われる。ただし、それらの解のチェックには本論文の与えた諸式が有用であることはいうまでもない。

研究用磁石は高い均一度の磁界の発生を工学的、技術的に強く要求されるまれな例であるが、本解析例の示すように性質の良く知られた解析関数による表現が、得られる情報の量と質において依然として最も有力な方法の一つであることを実証していると言えよう⁽¹³⁾。

4. む す び

長方形の磁極の極面を平行に配置する磁石による磁界について、二次元近似による一般的な解を与えた。極の形はヤコビのだ円関数の母数および二つの Π 関数のパラメータにより表わされる。幅は異なるが同心の場合、および偏心しているが同じ幅であるときは、二つのパラメータ a, b の間にそれぞれ $a=b, a=K-b$ の関係がある。また、等しい幅の極が同心になっているときは $a=b=K/2$ で表わされ、既知の結果のように Π 関数を含まない。

これらの解を用いて、空げきの中心付近において、 10^{-5} のオーダー以上の均一度が問題となるような研究用磁石を想定し、磁極の幅が空げきの約 3.18 倍の場合について、上記の二つの非対称による分布の変化を計算して次のような結論が得られた。

(1) 幅が異なる場合 分布の中心が極面の方向に移動し、原点において奇数次の不均一項が発生する。 10^{-5} オーダーの“固有の均一度”を損なわないためには、異幅度は 10^{-4} オーダー以下でなければならない。

(2) 偏心の場合 8×10^{-3} の偏心に対し約 20° 分布が回転する。上記の均一度を損なわないためには偏心度は 10^{-3} 以下でなければならない。また、原点付近での磁力線の曲がりを 10^{-6} 以下にするためには、偏心度は 10^{-4} 以下でなければならない。

終りに、本研究を進めるにあたり東京大学物性研究所 田沼静一教授より文献の入手につき御配慮を、また

等角写像法の多くの貴重な文献につき「二次元問題」の著者 宮本慶己氏より御教示および便宜を図っていただいたことを記して謝意を表します。また、計算機の使用につき配慮いただいた当社 SID 江藤第一技術部次長、同 EM グループの諸氏に感謝します。

(昭和 55 年 12 月 29 日受付)

文 献

- (1) N. Davy: *Phil. Mag.*, **35**, 819 (1944)
- (2) W. Snowdon & N. Davy: *Brit. J. Appl. Phys.*, **4**, 339 (1953)
- (3) W. A. Anderson: *Rev. Sci. Instrum.*, **24**, 856 (1953)
- (4) K. Tauno: *Japan J. Appl. Phys.*, **17**, 837 (1978)
- (5) 宮本: 二次元問題(5版)(昭 26)
- (6) H. Hancock: *Theory of elliptic functions* (1953)
- (7) 友近: 楕円函数論(昭 17)
- (8) 戸田: 楕円函数入門(昭 51)
- (9) P. E. Byrd & M. D. Friedman: *Handbook of Elliptic Integrals*, 2nd ed. (1971)
- (10) 春日谷: 新数値表(昭 52)
- (11) A. Huber & H. Primas: *Nucl. Instrum. & Method*, **33**, 125 (1965)
- (12) M. E. Rose: *Phys. Rev.*, **53**, 715 (1938)
- (13) H. Prinz (増田・河野訳): 電界計算法, p. 37 (昭 49)

付 録

(I) だ円関数については多数の成書^{(6)~(9)}があり、本論文で用いた公式などは大部分これらの中に見いだすことができる。以下、これらについてごく簡単に述べる。不完全だ円積分の逆関数として導かれる $sn(\zeta, k)$ は sn 関数と呼ばれ、 k を母数、 ζ を変数とする。通常 k を省いて $sn\zeta$ と書かれる。 cn 関数、 dn 関数は三角関数と似た次の関係で得られる。

$$cn^2\zeta = 1 - sn^2\zeta \quad \text{.....(付 1)}$$

$$dn^2\zeta = 1 - k^2 sn^2\zeta \quad \text{.....(付 2)}$$

また、いわゆる Glaisher 氏の記号を用いて、これらの関数の比を次のように表わす。

$$cs\zeta = cn\zeta / sn\zeta \quad \text{.....(付 3)}$$

この記号によれば、例えば $1/dn\zeta$ は $nd\zeta$ と書かれる。

次に、ヤコビ氏の Z および Π 関数はそれぞれ sn 関数の不定積分として次式で与えられる。

Z 関数は

$$Z(\zeta) = \int dn^2\zeta d\zeta \quad \text{.....(付 4)}$$

あるいは

$$E(\zeta) = \frac{E}{K}\zeta + Z(\zeta) \quad \text{.....(付 5)}$$

として E 関数が定義される。ここで、 K , E はそれ

ぞれ周知のルジャンドル氏の第 1 種および第 2 種完全だ円積分である。

Π 関数は

$$\Pi(\zeta, a) = \int \frac{k^2 snacn adn asn^2 \zeta d\zeta}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 \zeta} \quad \text{.....(付 5)}$$

で表わされる。これらにおいても母数 k は省いてある。

次に、本文の(14), (15)式を得るときに用いた E および Π 関数の公式は

$$E(K + iK') = E + i(K' - E') \quad \text{.....(付 6)}$$

$$\Pi(K + iK') = (K + iK')Z(a) + \frac{i\pi a}{K} \quad \text{.....(付 7)}$$

$$\Pi(iK') = i \left\{ K'Z(a) + \frac{\pi}{2K}(a \pm K) \right\} \quad \text{.....(付 8)}$$

証明は前出の諸書にあるので省略する。

(II) 本文(7)式の四つの関数の不定積分は次のとおりである⁽⁹⁾。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int f_1(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{k^2 sn^2 a} \{ E(\zeta) - (dn^2 a)\zeta \\ &\quad + csadna \Pi(\zeta, a) \} \quad \text{.....(付 9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int f_2(\zeta) d\zeta \\ &= sn^2 b \{ E(\zeta) + (cs^2 b)\zeta \\ &\quad - csb dnb \Pi(\zeta, b + iK') \} \quad \text{.....(付 10)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int f_3(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2k^2 sn^2 a} \left\{ -E(\zeta) + (1 + k^2 sn^2 a)\zeta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - k^2 sn^4 a}{snacn adna} \Pi(\zeta, a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2 sn^2 a sn\zeta cn\zeta dn\zeta}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 \zeta} \right\} \quad \text{.....(付 11)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1 - k^2 sn^4 a}{snacn adna} \Pi(\zeta, a) \\ &+ \frac{k^2 sn^2 a sn\zeta cn\zeta dn\zeta}{1 - k^2 sn^2 a sn^2 \zeta} \} \quad \text{.....(付 12)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int f_4(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{sn^2 b}{2} \left\{ -E(\zeta) + \frac{1 + sn^2 b}{sn^2 b} \zeta \right. \\ &\quad - \frac{1 - k^2 sn^4 b}{snbcn b dnb} \Pi(\zeta, b + iK') \\ &\quad \left. + \frac{sn\zeta cn\zeta dn\zeta}{sn^2 b - sn^2 \zeta} \right\} \quad \text{.....(付 13)} \end{aligned}$$