距離係数の概念を導入した二次元異方性媒質の等方化写像

正 員 寺 門 龍 一 (茨城大)

正 員 小 林 正 典 (茨城大)

1. ま え が き

二次元静電界の問題に対する有力な手段に影像電荷法と等角写像法がある。これらは、いずれも等方性媒質を対象として考案されたものであって、そのままの形では異方性媒質に適用することはできない。

最近、これら二法を異方性媒質に適用可能なものにまで拡張する研究が行なわれた。一つは、距離係数および正規距離係数の概念の導入によって、異方性媒質に対しても影像電荷法が適用できるよう工夫したもので、その結果、異方性媒質を等方性媒質と同じように扱ひ得ることが示された⁽¹⁾。また他の一つは、等角写像理論を拡張して、写像によって誘電率そのものの変換を行なおうとしたものであり、その写像では電位、電荷、エネルギーは不変に保たれ、異方性媒質は等方性媒質に変換写像される⁽²⁾⁽³⁾。

これら二種の方法は、最終的にはいずれも等方性媒質への変換を行なうという共通性を有し、考え方と表現はかなり異なっているが、本質的には同じものであるとの推測が成り立つ。その確認のためには、等方化写像と距離係数の関係を明らかにする必要があり、それは異方性媒質の性質をより明確にはあくすることにもつながる。

その考えに基づいて、本論文では距離係数と等方化写像のそれぞれについて、一方の立場から他方を見た場合の意味を明確にし、それに伴って異方性媒質の等方化写像の方法として、従来のものより著しく簡明な関係式が示される。なお、ここで取り扱う異方性媒

質は、その等方化の性質上、対称テンソルを持ち部分的に均一性を有するものを対象とするので、その写像はアフィン写像⁽⁴⁾に限られる。

2. 距離係数と等方化写像

〈2・1〉 正規距離係数 距離係数および正規距離係数の考えは文献(1)で提案されたものであるが、その基本は二次元異方性均一媒質中に1個の点電荷を置いた場合の任意の点の電位に関係する。

いま、誘電率テンソル

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

の媒質中の一点 (x_0, y_0) に電荷 q_0 (三次元的には線電荷) を置いた場合の任意の点 (x, y) の電位は

$$\phi = \frac{q_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{\parallel}\epsilon_{\perp}}} \times \log \frac{C}{\sqrt{(\epsilon_0/\epsilon_{\parallel})(x-x_0)^2 + (\epsilon_0/\epsilon_{\perp})(y-y_0)^2}} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 C : 任意定数

である。このとき、 x 軸からの角 θ 方向への距離係数 m は次のように定義されている。

$$m(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \theta) = \sqrt{(\epsilon_0/\epsilon_{\parallel})\cos^2\theta + (\epsilon_0/\epsilon_{\perp})\sin^2\theta} \dots\dots\dots (3)$$

更に、 x 軸からの角 β 方向への距離係数によって正規化された θ 方向への正規距離係数 n が

$$n(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \theta, \beta) = m(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \theta)/m(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \beta) \dots\dots\dots (4)$$

と定義される。これを用いて、 θ 方向への実効距離 d' が、その実距離 d との間の次の関係によって定められる。

$$d' = n(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \theta, \beta) \cdot d \dots\dots\dots (5)$$

Mapping of "Isotropy-Izing" of Two-Dimensional Anisotropic Media Introduced the Consideration of the Metric Factor. By Ryuiti Terakado, Member & Masanori Kobayashi, Member (Faculty of Engineering, Ibaraki University).

寺門龍一: 正員, 茨城大学工学部電気工学科

小林正典: 正員, 茨城大学工学部電気工学科

この実効距離 d' を用いれば、(2)式で示される任意の点の電位は、求める点が x 軸に対し θ 方向にあれば次のように簡明に表わすことができる。

$$\phi = q_0 \log (1/d') / (2\pi \sqrt{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}) \dots \dots \dots (6)$$

上式は、電荷 q_0 から β 方向への単位長さ ($d=1$) の点の電位が 0 となるように、(2)式の任意定数を定めたことに相当する。

この正規距離係数は、二種の異方性媒質が直線で相接している場合に重要な意味を持つ。いま、(1)式の形に表わされる二種の誘電体が y 軸で相接しているものとすれば、それぞれの誘電体に対する正規距離係数を $\beta=\pi/2$ に対して定めることにより、任意の点に置かれた電荷に対する影像電荷の位置と大きさを容易に求め得る。この考え方は、境界線 β の方向が任意であっても、また一方の誘電率テンソルの主軸⁽⁵⁾ が x - y 軸に対して適当な角 γ だけ回転された形に表わされている場合に対しても適用できるように工夫されている。その詳細は文献(1)に譲るが、その計算式はかなり複雑である。

〈2・2〉 等方化写像 二次元異方性媒質の誘電率そのものを交換する写像理論は文献(2)で提案され、直線の境界線を有する二種の異方性誘電体を等方化する理論は文献(3)に詳述されている。その物理的意味についても文献(3)に述べられているが、要するにこの写像は部分的に均一性を有する媒質に対してはアフィン写像となり、直線は直線に変換写像される。前節で述べたように、異方性媒質中では実効距離 d' は座標軸との成す角によって定まっており、等方化写像はこの実効距離をあらゆる方向に対して等しくするような写像にはかならない。それは次の関係によっても確認できる。

いま、等方化写像が z 平面と w 平面との間の対応

$$w = M^t \cdot z + z_0 \dots \dots \dots (7)$$

ただし、 z_0 : 平行移動定数

によって与えられるとすると、 M の固有値 m_1, m_2 と誘電率テンソルの固有値 $\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}$ との間には次の関係がある⁽³⁾。

$$m_2/m_1 = \sqrt{\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp}} \dots \dots \dots (8)$$

この関係は、次の正規距離係数の比を考えると

$$\begin{aligned} n(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \pi/2, 0) / n(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, 0, 0) \\ = \sqrt{\epsilon_{\parallel}/\epsilon_{\perp}} \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

となることにより、等方化写像は互いに 90° を成す主軸の方向に対する正規距離係数の比を写像行列の固有値の比として持つ変換であることがわかる。

この文献(3)の等方化の方法も、二種の誘電体それ

ぞれを別個に等方化する写像関数によって、相分離する二種の領域を回転、縮尺、平行移動することにより再接合するものであり、その計算手順はやはり簡単ではない。

3. 正規距離係数の観点から見た等方化写像

〈3・1〉 等方化写像の自由度 いま、二種の誘電体は直線の境界線を持ち、その等方化写像はアフィン写像に限るものとするので、 z 平面と w 平面との間の交換および等方化方程式は次のようになる。ただし、 z 平面の原点は w 平面の原点に対応するものとし、平行移動定数は除いて考える。

$$w = M^t \cdot z \dots \dots \dots (10)$$

$$MM^t / (\det M) = \sqrt{\det \epsilon_z} \epsilon_z^{-1} \dots \dots \dots (11)$$

また、等方化された誘電率は

$$\epsilon = \sqrt{\det \epsilon_z} \dots \dots \dots (12)$$

であり、電気的諸量は次の変換を受ける。

$$\left. \begin{aligned} E_z &= M \cdot E_w \\ D_z &= (\det M) (M^{-1})^t \cdot D_w \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

写像関係式(10)式、 ϵ_z を具体的に次のように表わす。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

$$\epsilon_z = \begin{bmatrix} \epsilon_a & \epsilon_b \\ \epsilon_b & \epsilon_d \end{bmatrix} \dots \dots \dots (15)$$

これを等方化方程式(11)式に入れ次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} (a^2 + c^2) / \det M &= \epsilon_d / \sqrt{\det \epsilon_z} \\ (b^2 + d^2) / \det M &= \epsilon_a / \sqrt{\det \epsilon_z} \\ (ab + cd) / \det M &= -\epsilon_b / \sqrt{\det \epsilon_z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

この3式の中の1式は、他の2式より誘導可能であり、従って写像の定数 a, b, c, d が固定化されるには、更に二つの条件式の存在が許される。文献(3)の例題では、 $c=0$ (y 軸を v 軸に対応) と $a=d$ の二条件を出発点としているが、これは必然的なものではなく適当に選んだに過ぎない。

〈3・2〉 等方化写像に付加すべき条件 前節の考察により、等方化写像に更に二条件を付加し得ることがわかったが、その条件につき考える。本来、等方化写像と正規距離係数は基本において相通するものであり、正規距離係数の概念の導入は有効と考え得る。

(1)式の誘電率テンソルを持つ媒質の等方化が文献(1)に示され、それは等方化写像行列を

$$M^t = \begin{bmatrix} n(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, 0, \pi/2) & 0 \\ 0 & n(\epsilon_{\parallel}, \epsilon_{\perp}, \pi/2, \pi/2) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (17)$$

とみなすことにあたる。正規距離係数の定義から、

$n(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \pi/2, \pi/2)$ は1であり、これは y 軸が v 軸にその長さが 1:1 に対応する変換であることを示す。そのとき、 x 軸方向の伸縮の度合いを示すものが $n(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, 0, \pi/2)$ である。このように、正規距離係数 $n(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \theta, \beta)$ は β 方向の伸縮率を1としたときの θ 方向の伸縮率を示すものでもある。等方化写像に付加すべき条件の一つとして、伸縮率1の方向 β を指示することは有効な手法と考え得る。

付加すべき他の一つの条件を、直線の境界線を有する二種異方性媒質の等方化の観点から考察する。例えば、 x 軸と角 β を成す直線は写像後においても、また u 軸と角 β を成すという条件を与えるものとする。すると、 β 方向の境界線は前記の伸縮率1の条件により長さは不変で、更に角もまた不変となり、回転操作を全く要せずに等方化された二媒質がそのまま接合されることになる。

このように、二種媒質の境界線の接合の観点からは長さ不変の方向と角不変の方向をとともに β 方向とすることが望ましいが、より一般的な条件にしておくほうが応用性の点で有利である。すなわち、 z 平面において x 軸との角 α の方向が、等方化後 w 平面においては u 軸と角 δ の方向に変換されるという条件を加える。

4. 改善された等方化写像

〈4・1〉 α 方向が δ 方向に変換されるための条件式

z 平面上で傾きが $\tan \alpha$ の直線上の二点 $P_1(x_1, y_1)$ および $P_2(x_1 + x, y_1 + x \tan \alpha)$ は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x \\ y_1 + x \tan \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

に写像され、この二点を結ぶ直線が u 軸に対し角 δ を成すための条件式として次式を得る。

$$(a + b \tan \alpha) \tan \delta = c + d \tan \alpha \quad \dots\dots\dots (19)$$

〈4・2〉 β 方向の長さ不変の条件式 前節と同様に、 x 軸と角 β を成す直線上の二点 P_1, P_2 の写像は、

(18)式の α を β に置き換えて得られ、二点間の距離不変の次の条件式を得る。

$$(a^2 + c^2) \cos^2 \beta + (b^2 + d^2) \sin^2 \beta + 2(ab + cd) \sin \beta \cos \beta = 1 \quad \dots\dots\dots (20)$$

〈4・3〉 二条件を付加した等方化写像 (15)式で

表わされる z 平面の誘電率テンソルを、(14)式の写像によって w 平面に写像するにあたり、等方化条件(16)式および付加条件(19)、(20)式を満たすように定める。これは、(16)、(19)、(20)式から成る四元連立方程式を

a, b, c, d を未知数として解くことにあたり、次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{(\varepsilon_d \cos \alpha - \varepsilon_b \sin \alpha) \cos \delta + \sqrt{\det \varepsilon_z} \sin \alpha \sin \delta}{\sqrt{AB}} \\ b &= \frac{(\varepsilon_a \sin \alpha - \varepsilon_b \cos \alpha) \cos \delta - \sqrt{\det \varepsilon_z} \cos \alpha \sin \delta}{\sqrt{AB}} \\ c &= \frac{(\varepsilon_d \cos \alpha - \varepsilon_b \sin \alpha) \sin \delta - \sqrt{\det \varepsilon_z} \sin \alpha \cos \delta}{\sqrt{AB}} \\ d &= \frac{(\varepsilon_a \sin \alpha - \varepsilon_b \cos \alpha) \sin \delta + \sqrt{\det \varepsilon_z} \cos \alpha \cos \delta}{\sqrt{AB}} \\ A &= \varepsilon_a \sin^2 \alpha + \varepsilon_d \cos^2 \alpha - 2\varepsilon_b \sin \alpha \cos \alpha \\ B &= \varepsilon_a \sin^2 \beta + \varepsilon_d \cos^2 \beta - 2\varepsilon_b \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

〈4・4〉 回転表現の誘電率テンソルの等方化写像

誘電率テンソルは(15)式の表わし方と共に、(1)式のテンソルを座標軸に対して角 γ だけ回転した次式の表現もよく用いられる。

$$\varepsilon_z = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \gamma + \varepsilon_{\perp} \sin^2 \gamma & (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \gamma \cos \gamma \\ (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin \gamma \cos \gamma & \varepsilon_{\parallel} \sin^2 \gamma + \varepsilon_{\perp} \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

このテンソルに対し、前節と同じ条件を満足する等方化写像行列の要素を示しておく。

$$\left. \begin{aligned} a &= \{ \{ \varepsilon_{\parallel} \sin \gamma \sin(\gamma - \alpha) + \varepsilon_{\perp} \cos \gamma \cos(\gamma - \alpha) \} \cos \delta + \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \sin \alpha \sin \delta \} / \sqrt{AB} \\ b &= \{ \{ \varepsilon_{\parallel} \cos \gamma \sin(\alpha - \gamma) + \varepsilon_{\perp} \sin \gamma \cos(\alpha - \gamma) \} \cos \delta - \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \cos \alpha \sin \delta \} / \sqrt{AB} \\ c &= \{ \{ \varepsilon_{\parallel} \sin \gamma \sin(\gamma - \alpha) + \varepsilon_{\perp} \cos \gamma \cos(\gamma - \alpha) \} \sin \delta - \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \sin \alpha \cos \delta \} / \sqrt{AB} \\ d &= \{ \{ \varepsilon_{\parallel} \cos \gamma \sin(\alpha - \gamma) + \varepsilon_{\perp} \sin \gamma \cos(\alpha - \gamma) \} \sin \delta + \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \cos \alpha \cos \delta \} / \sqrt{AB} \\ A &= \varepsilon_{\parallel} \sin^2(\alpha - \gamma) + \varepsilon_{\perp} \cos^2(\alpha - \gamma) \\ B &= \varepsilon_{\parallel} \sin^2(\beta - \gamma) + \varepsilon_{\perp} \cos^2(\beta - \gamma) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

〈4・5〉 任意の方向の伸縮率 特定の方向 α は等方化写像後には角 δ に変換され、特定の方向 β は伸縮率が1である等方化写像を示した。任意の方向 θ に対する伸縮率および写像後の方向を明らかにしておくことは、この写像の利用上重要である。

x 軸と角 θ を成す方向の伸縮率を k で表わす。(18)式から(20)式を得る考え方により、まず次式を得る。

$$k = \sqrt{(a^2 + c^2) \cos^2 \theta + (b^2 + d^2) \sin^2 \theta} * \sqrt{+ 2(ab + cd) \sin \theta \cos \theta} \quad \dots\dots\dots (24)$$

(21), (23)式をそれぞれ代入し次式となる。

$$\left. \begin{aligned} k &= \sqrt{C/B} \\ C &= \varepsilon_a \sin^2 \theta + \varepsilon_d \cos^2 \theta - 2\varepsilon_b \sin \theta \cos \theta \\ &= \varepsilon_{\parallel} \sin^2(\theta - \gamma) + \varepsilon_{\perp} \cos^2(\theta - \gamma) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

なお, B は (21) 式または (23) 式のものを用いる。

距離係数および正規距離係数を伸縮率 k を用いて表わせば, その定義に基づき容易に次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} m(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \theta) &= \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_{\parallel}} k, \beta=0, \gamma=0 \\ n(\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}, \theta, \beta) &= k, \gamma=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

このように正規距離係数は, その主軸が座標軸と一致している誘電率テンソルを等方化する場合の伸縮率にはかならない。

〈4・6〉 任意の方向の写像後の方向 x 軸との成す角 θ の方向が, 等方化写像後 u 軸との角 θ' に変換されるものとする。(18), (19) 式の考え方により

$$\tan \theta' = (c + d \tan \theta) / (a + b \tan \theta) \dots\dots (27)$$

(21) 式を代入して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta' &= (D \tan \delta - E) / (D + E \tan \delta) \\ D &= \varepsilon_d + \varepsilon_a \tan \alpha \tan \theta - \varepsilon_b (\tan \alpha + \tan \theta) \\ E &= \sqrt{\det \varepsilon_z} (\tan \alpha - \tan \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

(22) 式の誘電率テンソルに対する関係式は, D については (28) 式の $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_d$ に (22) 式の値を代入して得られ, E については (28) 式そのままよい。

5. 応用例

改善された等方化写像の有効性を確認する意味をも含めて, 文献(1)および(3)で取り上げた例題そのままについて考察する。

〈5・1〉 文献(3)の例題 第1図(a)のような y 軸を境界線とする二種媒質複合無限平行板間領域の等方化の問題である。与えられた誘電率テンソルは

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \varepsilon_0$$

である。それぞれの誘電体に対し, $\alpha = \beta = \delta = \pi/2$ として (21) 式に代入し, 直ちに写像行列を得る。

$$\mathbf{M}_1^t = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2^t = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

また, 等方化された誘電率はそれぞれ

$$\varepsilon_1 = \sqrt{2} \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2 = 3 \varepsilon_0$$

であり, (b) 図を得る。等方性媒質中の電界 $\mathbf{E}_{w1}, \mathbf{E}_{w2}$, 電束密度 $\mathbf{D}_{w1}, \mathbf{D}_{w2}$ の計算を行ない, これらを (13) 式により変換すれば, より容易に文献(3)と全く同じ結果に達する。

第1図 文献(3)の例題の等方化

Fig. 1. "Isotropy-izing" of the example in the reference (3).

第2図 文献(1)の例題の等方化

Fig. 2. "Isotropy-izing" of the example in the reference (1).

〈5・2〉 文献(1)の例題 第2図(a)のように二種の誘電体の境界線が x 軸と角 β を成し, ε_1 の主軸は x - y 軸と平行であるが, ε_2 の主軸は x 軸に対し角 γ 回転した ξ - η 軸に平行な場合で, それぞれ次のテンソルを持つ。

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\eta} \end{bmatrix}$$

(23) 式に, ε_1 に対しては $\alpha = \beta, \beta = \beta, \gamma = 0, \delta = \beta$

を、また ε_2 に対しては $\alpha=\beta, \beta=\beta, \gamma=\gamma, \delta=\beta$ を代入することにより写像行列を得る。 ε_1 に対する行列を示せば次のようになる。

$$M_1^t = \frac{1}{\varepsilon_x \sin^2 \beta + \varepsilon_y \cos^2 \beta} \times \left[\begin{array}{cc} \varepsilon_y \cos^2 \beta + \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \sin^2 \beta & * \\ \varepsilon_y \sin \beta \cos \beta - \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \sin \beta \cos \beta & * \\ \varepsilon_x \sin \beta \cos \beta - \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \sin \beta \cos \beta & * \\ \varepsilon_x \sin^2 \beta + \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \cos^2 \beta & \end{array} \right]$$

ε_2 に対する写像行列は、(23) 式に $\varepsilon_{11}=\varepsilon_x, \varepsilon_{12}=\varepsilon_y, \alpha=\beta, \delta=\beta$ を代入したものである。この写像では、第2図(b)のように二種誘電体の境界線は写像後の w 平面においても u 軸との角は β のままで不変であり、両平面間の関係のはあくが容易である。

更に、(23)式において $\alpha=\beta, \beta=\beta$ とし、 ε_1 に対しては $\gamma=0, \varepsilon_2$ に対しては $\gamma=\gamma$ 、そして両誘電体に対して $\delta=\pi/2$ と置くことにより、各テンソルに対する変換行列は

$$M_1^t = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \sin \beta & -\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \cos \beta \\ \varepsilon_y \cos \beta & \varepsilon_x \sin \beta \end{bmatrix}}{\varepsilon_x \sin^2 \beta + \varepsilon_y \cos^2 \beta}$$

$$M_2^t = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \sin \beta \\ \varepsilon_x \sin \gamma \sin(\gamma-\beta) + \varepsilon_y \cos \gamma \cos(\gamma-\beta) \\ \varepsilon_x \sin^2(\beta-\gamma) * \\ -\sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \cos \beta \\ \varepsilon_x \cos \gamma \sin(\beta-\gamma) + \varepsilon_y \sin \gamma \cos(\beta-\gamma) \\ + \varepsilon_y \cos^2(\beta-\gamma) \end{bmatrix}}{\varepsilon_x \sin^2(\beta-\gamma) *}$$

となる。この写像によれば、等方化後の境界線は第2図(c)のように v 軸そのものとなり、しかも変換行列はむしろ簡単で、 w 平面における電界などの計算もまた容易であり、有利な変換であると考え得る。

文献(1)の方法は、 ε_1 領域では x 軸が u 軸に対応するようにしたものであり、(23)式において $\alpha=0, \beta=\beta, \gamma=0, \delta=0$ と考えたことにあたり、変換行列は

$$M_1^t = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_y} & 0 \\ 0 & \sqrt{\varepsilon_x} \end{bmatrix} / \sqrt{\varepsilon_x \sin^2 \beta + \varepsilon_y \cos^2 \beta}$$

となる。この写像により傾きが $\tan \beta$ の境界線は(28)式に $\alpha=0, \theta=\beta, \delta=0$ を代入することにより、

$$\tan \theta' = \sqrt{\varepsilon_x / \varepsilon_y} \tan \beta$$

の傾きを有する直線に変換される。従って、 ε_2 に対しても境界線の傾きが θ' となるように写像しなければならない。それは(23)式において $\alpha=\beta, \beta=\beta, \gamma=\gamma, \delta=\theta'$ とすることを意味する。文献(1)においては、これに相当する変換を数回の回転操作を行なうことにより達成している。

〈5・3〉 平行な境界線を有する多層誘電体 文献

(1)でこの問題を扱っているが、境界線のすべてが平行であれば幾層の異方性誘電体から成っていても、改善された写像によって等方化はより容易である。平行な境界線の傾きが β のときは、各誘電体ごとに(21)式または(23)式に $\alpha=\beta, \beta=\beta$ 、そして例えば $\delta=0$ とする。この写像によって、 u 軸に平行な境界線を有する等方性多層誘電体となり、種々の値の計算が容易になる。

6. む す び

影像電荷法の考えを進めて得られた正規距離係数と、等角写像法を発展させた等方化写像法との関連を明らかにし、その結果として、改善された用いやすい等方化写像の関係式(21), (23)式を得た。これによって、文献(1)および(3)の方法の繁雑さがすっかりした形に統一的にはあくされたものと考えている。

本論文で用いた諸記号は、できる限り文献(1)~(3)と一致させることを心掛けた。そのために、本論文だけで見ると不統一の感もないとは言えない。特に角の記号は、その意味するところがあいまいになりがちであり、(21), (23)式の利用にあたっては十分の注意を要する。その意味合いから、角の記号の定義をまとめて再記しておく。

α : 写像の際に z 平面上の基準となる方向を示す角 (この角が写像により w 平面の角 δ に変換される)

β : z 平面上で伸縮率を1とする方向を示す角

γ : z 平面上でテンソルの主軸の方向を示す角

δ : 写像の際に w 平面上の基準となる方向を示す角 (z 平面の角 α が変換される角)

いずれも、 z 平面においては x 軸を、 w 平面においては u 軸を基準に表わすものである。

(昭和55年3月25日受付, 同55年9月8日再受付)

文 献

- (1) M. Kobayashi & R. Terakado: "New View on an Anisotropic Medium and Its Application to Transformation from Anisotropic to Isotropic Problems", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-27, 769 (1979)
- (2) S. Kusase & R. Terakado: "Mapping Theory of Two-Dimensional Anisotropic Regions", *Proc. IEEE (Lett.)*, 67, 171 (1979)
- (3) 寺門・草瀬: 「二次元異方性複合領域の等方化写像理論」, 電学論A, 99, 465 (昭54-10)
- (4) 河田: 岩波講座基礎数学「アフィン幾何・射影幾何」, p.1 (昭51) 岩波書店
- (5) 秋山: テンソル解析の応用, p.20 (昭46) 森北出版